+1 Мешуп

зашифр

0 904826 430006

90-48-26-43
(39.7)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Наумени Андрея Станиславовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
90-48-26-43	92	12	12	12	12	8	12	12	12

92 (девяносто два)

90-48-26-43 (39.7)

Задача 1. Чистовик 2 из 10

Существует 3 способа выбрать вратаря вне зависимости от выбора других.
Поэтому выберем остальных и ·3.

~~Для начала будем считать, что у нас 8 защитников и 9 нападающих, затем исключим случаи, где универсал выбран дважды:~~
~~Способов $C_8^2 \cdot C_9^3$.~~

Способов выбрать двух защитников —
$\frac{8\cdot 7}{2} = 28$.

Из них $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ — когда универсалы не задействованы, и ~~универса~~ нападающих можно выбрать способами $\frac{9\cdot 8\cdot 7}{6} = 12\cdot 7 = 84$
Итого 840

Когда задействован ровно 1 универсал — $3\cdot 5 = 15$, и нападающих можно выбрать $\frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} = 56$ способами.
Итого $15\cdot 56 = 840$

Когда задействовано 2 универсала:
$\frac{3\cdot 2}{2} = 3$, и нападающих выбрать $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{6} = 35$ способов. Итого $3\cdot 35 = 105$.

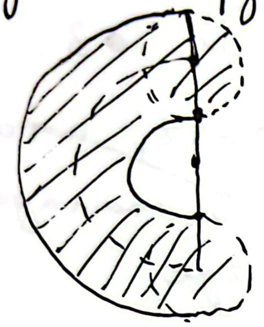
Значит итоговый ответ: $3\cdot(840+840+105) = 5355$

Ответ: 5355

Чистовик 3 из 10

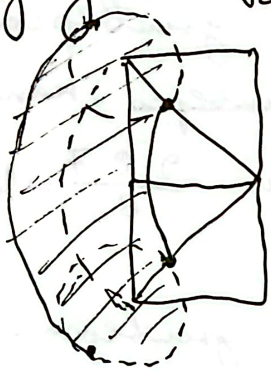
Задача 2.

Рассмотрим, во что превращается дуга окружности радиуса 1:



Получается полукруг радиуса 1,5 из которого вырезан полукруг радиуса 0,5 (и дополнительно полукруги радиуса 0,5 с краёв).

Теперь посмотрим, во что превращается дуга окружности радиуса $\sqrt{2}$:



Это будет четверть круга радиусом $\sqrt{2}+0,5$ из которой вырезана четверть круга радиуса $\sqrt{2}-0,5$. (и дополнительно полукруги радиуса 0,5 с краёв).

Очевидно, что если эти два рисунка наложить, то будет покрыт весь полумесяц.

~~Значит осталось посчитать площади этих фигур и вычесть пересечение.~~

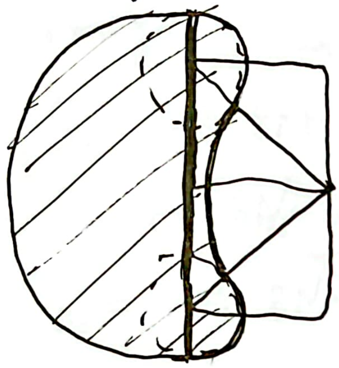
90-48-26-43 (39.7)

Чистовик 4 из 10

~~Найдём точки пер~~

Очевидно, краевые круги радиуса 0,5 (обозначены пунктиром) совпадут при наложении.

Ясно также, что не будет пересечений не ~~в~~ на этих окружностях, и выйдет такая картинка!



Итого:
разобьём на части:
полукруг радиуса ~~2~~ 1,5;
Треугольник со сторонами 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$;
две части окружностей (дуги по $\frac{3}{4}\pi$) радиуса 0,5; из этого осталось убрать четверть окружности радиуса $\sqrt{2}-0{,}5$.

$$\frac{\pi\cdot 1{,}5^2}{2}+1+2\cdot\pi\cdot 0{,}5^2\cdot\frac{3}{8}-\frac{\pi\cdot(\sqrt{2}-0{,}5)^2}{4}=$$

$$=\left(\frac{9}{8}+\frac{3}{16}-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\pi+1=$$

$$=\frac{(3+\sqrt{2})\pi}{4}+1.$$

Чистовик 5 из 10

Задача 3.

$$|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|+2+\frac{|y|}{y}-\frac{|x|}{x}=0.$$

Видно, что всё, кроме $\frac{|y|}{y}-\frac{|x|}{x}$ $\geqslant 0$, причем очевидно, что $\frac{|y|}{y}=\pm 1$ и $-\frac{|x|}{x}=\pm 1$. Поэтому минимальное значение $2+\frac{|y|}{y}-\frac{|x|}{x}$ – это 0. А значит

$$\begin{cases} x^3+y^3-19=0 \\ x^2y+xy^2+6=0 \quad |\cdot 3 \\ y<0 \\ x>0 \end{cases}$$

$$x^3+y^3+3x^2y+3xy^2+18-19=0$$

$$(x+y)^3=1 \Rightarrow x+y=1$$

Из 2-го ур-я:

$$xy(x+y)=-6. \Rightarrow xy=-6$$

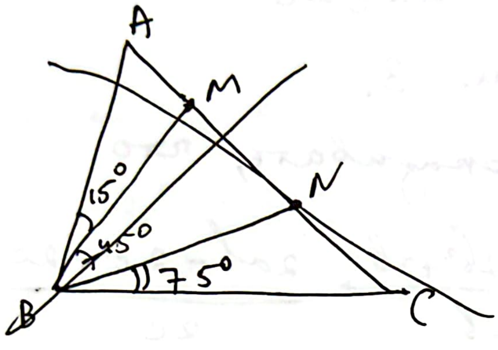
Нетрудно заметить, что у ~~этой~~ системы ровно 1 решение при $x>0$ и $y<0$:

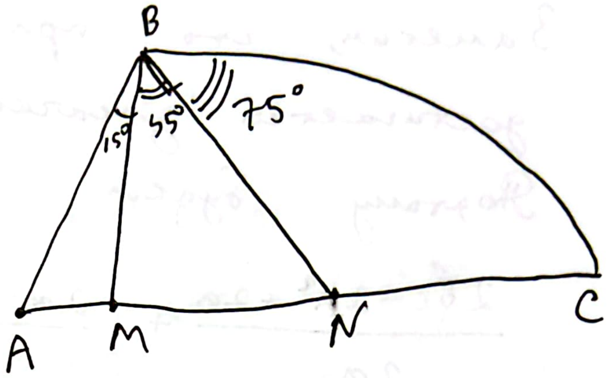
$x=3$; $y=-2$.

Ответ: $x=3$; $y=-2$.

90-48-26-43 (39.7)

Задача 4. Чистовик 6 из 10





Пусть S_A, S_B и S_C – площади $\triangle ABM$, $\triangle MBN$ и $\triangle NBC$ соответственно.

Тогда $S_A + S_C = 5$; $S_A \cdot S_C = 3$.

$S_A = AB \cdot BM \cdot \sin 15°$

$S_C = BC \cdot BN \cdot \sin 75°$

$S_B = BM \cdot BN \cdot \sin 45°$

$$S_A S_C = AB \cdot BC \cdot \frac{S_B}{\sin 45°} \cdot \sin 15° \cdot \cos 15°$$

$$S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \sin 135° = AB \cdot BC \cdot \sin 45°$$

$$S_A \cdot S_C = S_{ABC} \cdot \frac{(S_{ABC} - (S_A + S_C))}{2\sin^2 45°} \cdot \sin 30°$$

$$3 = \frac{x(x-5) \cdot \frac{1}{2}}{\cancel{2 \cdot \frac{2}{4}}}$$

$x^2 - 5x = 6$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

По т. Виета $x = 6$ и $x = -1$.

$S_{ABC} = x > 0$, поэтому $S_{ABC} = 6$

Ответ: $S_{ABC} = 6$.

Задача 5. Черновик!

Заметим, что при $a=b=c$ достигается значение 3.

Поэтому будем доказывать, что

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ac-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}\geq 3.$$

$$\frac{bc}{a}-a+\frac{ac}{b}-b+\frac{ab}{c}-c\geq 0$$

$$b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2\geq \cancel{a^2b^2}\ abc(a+b+c)$$

Заметим, что неравенство однородное, поэтому будем считать, что $a+b+c=3$.

Тогда:

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq 3$$

Докажем, что $\frac{bc}{a}\geq b+c-a$:

$\cancel{a^2+bc\geq ab+ac}$ $a=3-b-c$.

$$bc\geq(3-b-c)(2b+2c-3).$$

$$bc\geq 6b+6c-9-2b^2-2bc+3b-2bc-2c^2+3c$$

$$5bc+2b^2+2c^2-9b-9c+9\geq 0$$

$$2b^2+(5c-9)b+(2c^2-9c+9)\geq 0$$

Осталось ~~показа~~ рассмотреть дискриминант этого ур-я отн. b.

$$D=(5c-9)^2-8(2c^2-9c+9)$$

$$D=25c^2-90c+81-16c^2+9\cdot 8c-72$$

Черновик 4 из 6

$\frac{D}{9} = c^2 - 2c + 1 = (c-1)^2.$

Значит корни этого ур-я:

$b_{1,2} = \frac{-5c+9 \pm 3(c-1)}{4}$

$(a+b-1)(b+1)$

$(ab+c+f)(d^2+e)$

$b_1 = \frac{-2c+6}{4}$; $b_2 = \frac{-8c+12}{4} = -2c+3$

Очевидно, что $b+c = 3-a < 3$.

Поэтому $b_1 > 0$

Допустим, есть b^* и c^*, что это условие неверно. Тогда

$b^* < b_2 = -2c^* + 3$

$b^* + c^* < 3 - c^*$

$\frac{1}{a} \geq 2-a$

$\frac{1}{a} \geq 2-a$

$bc + a^2 \geq ab + ac$ $abc = 1$.

$1 \geq 2a - a^2$

~~$a(a-b) \geq c(a-b)$~~

$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a+b+c$

$a(a-b) - c(a-b) \geq 0$

$\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$

$(a-c)(a-b) \geq 0$

$b^2c^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{bc} + b + c$

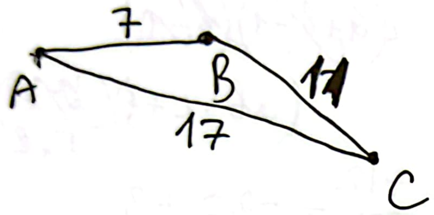
$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq 3\sqrt[3]{abc}$

$x + y + \frac{1}{xy}$

$b^4c^4 + b^2 + c^2 \geq bc + b^3c^2 + b^2c^3$

Задача 6. Чистовик 8 из 10

Построим схему:



Автомобиль может разворачиваться только в узлах и проезжает сторону ~~на~~ за указанное время.

Докажем эквивалентность задачи: Приехав из любой точки в точку A автомобиль может проехать в C за 17 мин или в B за 7 мин. Других действий нет. Аналогично и в моей схеме. Так с любой точкой.

Заметим, что 1час 25мин = 85 мин.

Рассмотрим, как мы можем прийти в A, выйдя из неё (сколько потребуется времени до первого возвращения). Очевидно, что

$$t=17\cdot 2+11\cdot 2k,\quad k\in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

или

$$t=17+7+11+11\cdot 2k \quad \text{или} \quad t=7\cdot 2+22k$$

Значит $t=34+22k$ или $t=35+22k$.

или $t=14+22k$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик 5 из 6

$\frac{bc}{\cancel{a}} + \frac{1c}{b} + \frac{1b}{c} \geq 1+b+c$

$a\left(\frac{c}{b}-1\right)$

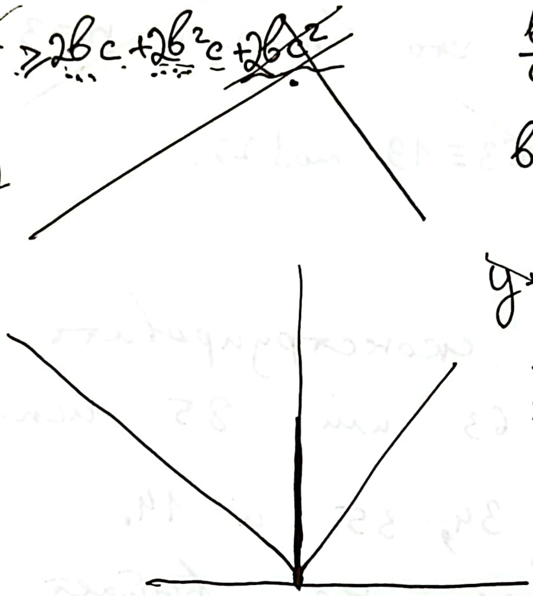
$bc+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 1+b+c$

$\cancel{2b^2c^2+2b^2+2c^2 \geq 2bc+2b^2c+2bc^2}$

$\frac{b}{c}=x$

$\cancel{bc(bc+b+c)}$

$bc=y$



$\cancel{b(-c^2}$

$\cancel{b(-c^2}$

$-1(-2c^2$

$\cancel{y+x+\frac{1}{x}\geq}$

$\geq 1+\sqrt{xy}=\sqrt{\frac{y}{x}}$

$2b^2c^2+2b^2+2c^2\geq 2bc+2b^2c+2bc^2$

$cy=\frac{a}{x}$

$\cancel{2+2,5-9}+0,5-4,5\pm 9$

$(b-1)(bc^2-c^2$

$\cancel{\frac{a}{b}=x}$

$\frac{6,5\pm 1,5}{4}$

$b(b^4c^2+\cancel{bc}c^2+2bc)$

$\cancel{\frac{b}{c}=y}$

$1(bc^2+c^2+2bc)$

$\frac{a}{b}\geq \cancel{b}\ a-b+1$

$\cancel{\frac{c}{a}=z}$

$a\geq ab-b^2+b$

$\frac{a}{b}=x$

$(b^2-b)-(ab-a)\geq 0$

$\frac{b}{c}=y$

$\frac{c}{a}=z$

$b(b-1)-a(b-1)\geq 0$

$(b-a)(b-1)\geq 0$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик 9 из 10

~~Рассмотрим по модулю 22:~~

~~$85 \equiv 19 \mod 22$~~

~~$t \equiv 12$ или $t \equiv 13$ ~~mod 22~~. или $t \equiv 14 \mod 22$.~~

~~$12m + 13n \equiv 19 \mod 22$~~

~~Заметим, что $m=2$ и $n=3$ подходит,~~

~~$24 + 39 = 63 \equiv 19 \mod 22$.~~

~~Очев~~

Попробуем сконструировать число 19, 41, 63 или 85 используя числа 34, 35 и 14.

19 – очевидно не выйдет.

41 – тоже не выйдет, т.к. $41 < 34 + 14$, а только из 14 не выйдет.

63 – нужно использовать 35 и сколько-то по 14, а именно:

$63 = 35 + 2 \cdot 14$

85 – нужно использовать 35 и сколько-то раз 34 и/или 14.

Но не получается, очевидно.

Значит маршрут состоял из

1) полный треугольник

2) 4 стороны AB

3) 2 стороны BC.

Длина $\cup AC = \pi(R+r) = \pi R + \pi r = \cup AB + \cup BC$.

Расстояние $L = (15+25) + 5 \cdot 15 + 3 \cdot 25 = 190$ км.

Ответ: 190 км.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

90-48-26-43
(39.7)

Задача 8. Черновик. 2 из 6

Докажем, что $n=10^{100}-1$ — подходит.

Рассмотрим число, которое делится на n, допустим сумма его цифр 900. Тогда докажем, что при прибавлении к нему нашего числа n его сумма цифр не изменится:

~~Пусть было k переходов через десяток. Тогда сумма цифр полученного числа будет равна $2 \cdot 900 - 9k$. То есть необходимо показать, что будет k переходов через десяток~~

Мы вначале прибавим 10^{100}, а затем вычтем 1. Допустим, при добавлении 10^{100} произойдёт переход через десяток. Тогда при вычитании 1 тоже должен произойти переход. И наоборот. Иными словами, если $k, \ldots, 101$ цифры — девятки, то $(k-100), \ldots, 1$ цифры — нули (отсчёт с конца). Если ~~последние~~ $(k-100), \ldots, 1$ — нули, то очевидно $m \vdots 10^{k-100}$, а значит

Задача 8. Черновик Зуб

~~$\partial 1$~~ Докажем, что $n=10^{100}-1$ — подходит. При заданном условии ~~неат~~ m число представимо в виде:

~~$m \cdot 10^{100}$~~ $(m-1)\cdot 10^{100}+(10^{100}-m)$.

~~Первая часть~~

Тогда $S(mn)=S(m-1)+S(10^{100}-m)$.

$S(10^{100}-m)=\cancel{S(10^{100}-1-m)}\ S((10^{100}-1)-(m-1))$

Это значит, что $S(mn)=$

Задача 8. Чистовик 1 из 10

Рассмотрим самое большое из 100-значных $n = 10^{100} - 1$:

При $m \leq 10^{100} - 1$, $0 < 10^{100} - m < 10^{100}$;

поэтому $S(mn) = S\left((m-1) \cdot 10^{100} + (10^{100} - m)\right) =$

$= S(m-1) + S(10^{100} - m) = S(m-1) + S(\underbrace{99\ldots9}_{100} - (m-1))$.

Очевидно, что приведенная сумма сумм цифр в точности равна 900 (т.к. для каждой цифры из левого числа $(m-1)$ можно сопоставить цифру из правого числа, чтобы их сумма была 9.

Ответ: $10^{100} - 1$.

Задача 5. ~~Черновик~~ Чистовик

Заметим, что при $a=b=c$ достигается значение 3.

Поэтому будем доказывать, что приведенное выражение ≥ 3.

Перепишем:

$$\frac{bc}{a}-a+\frac{ac}{b}-b+\frac{ab}{c}-c\geq 0.$$

Так как неравенство однородно, положим $a=1$.

$$bc-1+\frac{c}{b}-b+\frac{b}{c}-c\geq 0$$

$$\cancel{\begin{cases} 2b^2c^2-2bc^2-2b^2c+2b^2+2c^2-2bc\geq 0 \\ b^2-2bc+c^2\geq 0 \end{cases}}$$

$$\cancel{\Uparrow}$$

$$\cancel{2b^2c^2-2bc^2-2b^2c+b^2+c^2\geq 0}$$

$$\cancel{c^2(1+2b+b^2)+}$$

$$2b^2c^2-2bc^2-2b^2c+2b^2+2c^2-2bc\geq 0$$

дешифр

$$c^2(b-1)^2+b^2(c-1)^2+(b-c)^2\geq 0$$ — очевидно!

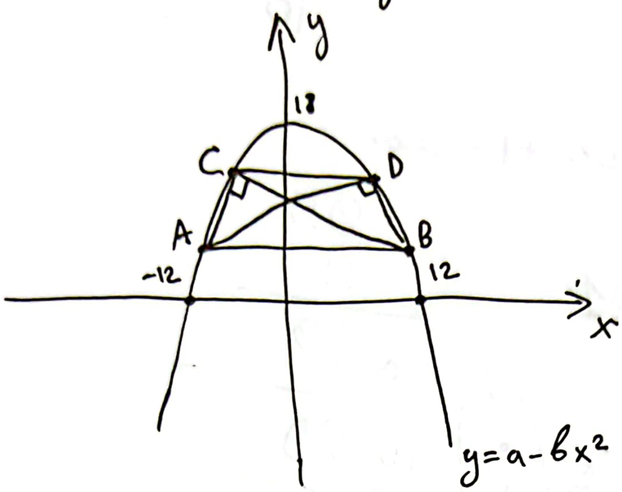
ЧТД! дешифр

Ответ: 3

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Задача 7.

Чистовик 10 из 10



Т.к. высота равна 18, $a=18$.

Половинная ширина такова, что

$-12^2=-h^2=\cancel{\ }\ \frac{a}{-b}$ – из т. Виета.

$\cancel{b=}\ b=\frac{18}{144}=\frac{3^2\cdot 2}{3^2\cdot 2^4}=\frac{1}{8}$

Пусть координаты точки B – $(x_B;y_B)$, координаты D – $(x_D;y_D)$, A – $(-x_B;y_B)$, C – $(-x_D;y_D)$.

Мы знаем, что

$y_B=18-\frac{1}{8}x_B^2$

$y_D=18-\frac{1}{8}x_D^2$

Из перпендикулярности: $\frac{(y_D-y_B)}{(x_D+x_B)}\cdot\frac{(y_D-y_B)}{(x_B-x_D)}=$

$=1$

Заметим, что $y_D-y_B=\frac{1}{8}(x_B^2-x_D^2)$

Отсюда $\frac{1}{64}(x_B^2-x_D^2)=1$

$(y_D-y_B)^2=64 \Rightarrow y_D-y_B=\pm 8$

Ответ: 8.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Задача 8

Черновик 6 из 6

$10^{100}-1$

$99^2 = (100-1)^2 = 10000+1-200 = 9801$

$99 \cdot 11 = 1089$

990

$11\ldots1$

$99 \cdot 56 = 5544$

~~дециф~~

$\underbrace{99\ldots99}_{n}$

$k \le \underbrace{9\ldots9}_{n}$

~~$9x + 10\cdot x\cdot 9\ldots9 + 9\ldots9\cdot k\cdot 100 + 9k$~~

$9\cdot10^n k + km$

$9k + 10$

$1785 \cdot 3 = 5355$

900

1100

$bc + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \ge 1 + b + c$

199

$(10^{100}-1)^2 = \boxed{C^{199}_{1099}}$

200 цифр.

$= 10^{200} - 2\cdot10^{100} + 1$