



50-50-07-60
(40.45)



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 13

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Никишина Максима Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
4	4	8	12	8	12	12	0	60

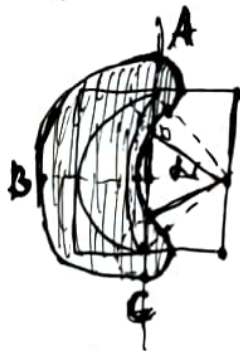
Лист Хру

Методик

№1 Залужники-3. Канадаюлице-н. Брагари-в.

Если среди универсалов выбрано оз. и он., то
 способов $2 \cdot C_7^2 \cdot C_3^4$, 1з. он. - $2 \cdot 3 \cdot C_4^2 \cdot C_7^2$,
 2з. он. - $2 \cdot 3 \cdot C_4^1 \cdot C_7^2$, 3з. он. - $2 \cdot C_7^2$,
~~1з. он.~~ 1н. оз. - $2 \cdot 3 \cdot C_4^3 \cdot C_7^1$, 2н. оз. - $2 \cdot 3 \cdot C_4^3$,
 1з. 2н. - $2 \cdot 3 \cdot C_4^2$, 1н. 2з. - $2 \cdot 3 \cdot C_4^1 \cdot C_7^1$,
 1з. 1н. - $2 \cdot 6 \cdot C_4^2 \cdot C_7^1$. Всего:
 $2(21 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \cdot 21 + 3 \cdot 4 \cdot 21 + 21 + 3 \cdot 4 \cdot 7 +$
 $+ 3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 7 + 6 \cdot 6 \cdot 7) = 2 \cdot 21(4 +$
 $+ 18 + 12 \cdot 1 + 4 + 4 + 12) + 60 = 42 \cdot 55 + 60 =$
 $= 2370$.

№2



Получившаяся фигура имеет
 границу полуокружность с
 центром в $(0,0)$ радиуса $4/3$,
 четверть окружности с
 центром $(1,0)$ радиуса $\sqrt{2}-1/3$,
 и дуги окружностей с центрами

в $(0,1)$ и $(0,-1)$ радиусами $1/3$. $\sqrt{2}-1 > 1/3$.
 $\sqrt{2}-1/3 > 1$. ~~$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}-1/3}$~~ $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}-1/3}$ $\alpha = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}-1/3})$
 $S = \frac{1}{2} \pi \frac{(4/3)^2}{2} + \frac{\pi (4/3)^2}{2} - \frac{2 \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}-1/3}) (\sqrt{2}-1/3)^2}{2} +$
 $+ \frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1/3)^2 - 1}}{2} = \frac{4\pi}{9} + \frac{\pi}{18} - \frac{\arccos(\frac{1}{\sqrt{2}-1/3}) (\sqrt{2}-1/3)^2}{2} +$
 $+ \frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1/3)^2 - 1}}{2} = \frac{7\pi}{18} + \frac{1}{2} (\sqrt{(\sqrt{2}-1/3)^2 - 1} - \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}-1/3})$
 $\cdot (\sqrt{2}-1/3)^2)$.

иштовик

№3. $(xy + 3x - 2y - 6)(y - x - 8) = (x - 5)(xy + 3x - 2y - 6)$
 $\sqrt{y - x + 10} = y - 4. \quad (2)$

Из (2) $y \geq 4$. $(x - 3)(y + 3)(y - x - 8) = (x - 5)(x - 2)(y + 3)$

При $x \geq 2$. $\sqrt{y - x - 8} = x - 5$

$y - x + 10 = (y - 4)^2 > 0 \Rightarrow y - x - 8 > 0$.

$\Rightarrow y - x - 8 = x - 5 \Rightarrow y = 2x + 3$.

$\Rightarrow x + 13 = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$.

$4x^2 - 5x - 12 = 0$.

$x = \frac{5 + \sqrt{217}}{8} > 2$. $y = \frac{5 + \sqrt{217}}{4} + 3$.

$x = \frac{5 - \sqrt{217}}{8} < 2$.

При $x < 2$. $|y - x - 8| = -(x - 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - x - 8 = -x + 5 \Rightarrow y = 13$.

Из (2) $\sqrt{23 - x} = 9$ $23 - x = 81$
 $x = -58 < 2$.

При $x = 2$. $\sqrt{y + 8} = y - 4 \Rightarrow y = 8$.

Ответ: $(\frac{5 + \sqrt{217}}{8}; \frac{5 + \sqrt{217}}{4} + 3)$, $(-58; 13)$,
 $(2; 8)$.

№24 1 час 25 мин. Итоговик
85 минут ~~на решение~~

Способы представить $85 = 17x + 11y + 7z$.

$85 = 17 \cdot 5$, $85 = 17 \cdot 2 + 11 \cdot 4 + 7$, $85 = 17 + 7 \cdot 5 + 11 \cdot 3$

$85 = 2 \cdot 11 + 7 \cdot 9$. Чтобы вернуться в точку A

число проездов по дугам AB AC должно быть четное кол-во $\Rightarrow 1), 2), 4)$ не подходит. 3) способ возможен.

$A \rightarrow C$, $B \rightarrow C$, $A \rightarrow B$. Длина полуокружности $\overset{5}{AC} = \overset{3}{AB} + \overset{3}{BC}$, т.к. диаметры окружностей лежат на одной прямой \Rightarrow диаметр большой окружности = сумме диаметров маленьких $\Rightarrow AC = AB + BC$.

$AC = 40$ км. $S = 40 + 5 \cdot 15 + 3 \cdot 25 = 40 + 150 = 190$ км.

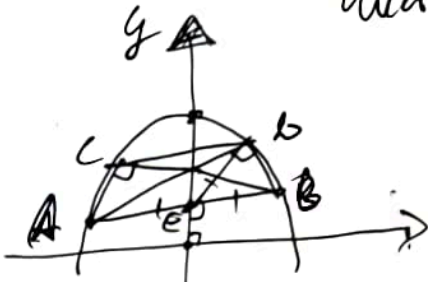
№5. $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2} \Rightarrow f\left(\frac{t-1}{2}\right) = \frac{t-1}{2}$, $t = \frac{x+2}{x-2}$. Угол на тангенс угла наклона кас. - производная в $x=0$.

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-2}{(x-2)^2}\right)$ $f'(h(x)) = \frac{df(h(x))}{dh(x)} \cdot \frac{dh(x)}{dx}$
 $= \frac{d\left(\frac{h(x)-1}{2}\right)}{dh(x)} \cdot \frac{dh(x)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dh(x)}{dx} \Rightarrow$

$(f(f(x)))' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{(x-2)^2}$ при $x=0$.
 $g'(0) = -\frac{1}{2 \cdot 3}$.

Ишовик

№6



$$y = a - bx^2$$

По условию
высота 10
а₂ ⇒ a = 10

Ширина $2x = 2\sqrt{a/b} = 20$

$$\sqrt{a/b} = 10 \quad b = 0,1 \quad B(x_1; y_1)$$

$D(x_2; y_2)$. AB лежит объекту y
пополам i.k. так объекту y симметрична
параболе ⇒ EB = ED $E(0; y_1) \Rightarrow$

$$x_1 = \sqrt{x_2^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad x_1^2 = x_2^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$y_1 = a - bx_1^2 \quad y_2 = a - bx_2^2 \Rightarrow$$

$$b(x_1^2 - x_2^2) = y_2 - y_1 \Rightarrow$$

$$\frac{y_2 - y_1}{b} = (y_2 - y_1)^2 \Rightarrow (y_2 - y_1) = \frac{1}{b} = 2$$

$$y_2 = 10 \text{ м.}$$

№7 Ответ: $\underbrace{9 \dots 9}_{75}$ Пусть $m \leq \underbrace{9 \dots 9}_{75}$

Тогда $b \leq 75$ знаков. $\underbrace{9 \dots 9}_{75} \cdot m =$

$$= \underbrace{m 0 \dots 0}_{75} = m \quad \text{Пусть } m =$$

$$= \frac{x_1 x_2 \dots x_{75}}{x_1 x_2 x_3 \dots x_{75} 0 \dots 0} = \frac{x_1 x_2 \dots x_{75}}{x_1 x_2 \dots x_{75}}$$

$$= x_1 x_2 x_3 \dots x_{75} = 19 - x_{19} - x_{29} - x_{39} - \dots - x_{75}$$

Имярек
 №7 $\Rightarrow S(9 \dots 9 m) = x_1 + \dots + x_{75} + 9 - x_1 + 9 - x_2 + \dots + 9 - x_{75} = 9 \cdot 75 = S(9 \dots 9)$.
 Если ~~к~~ к последним цифрам m нули,
 то для числа $\frac{m}{10^k} \cdot 9 \dots 9 =$
 $= S(9 \dots 9)$ Деление на 10^k
 не меняет сумму цифр. $S(\frac{m}{10^k} \cdot 9 \dots 9) =$
 $= S(\frac{m}{10^k} 9 \dots 9) = S(9 \dots 9)$.
 $9 \dots 9$ - наибольшее 75-ти значное
 число.

50-50-07-60
(40.45)

Черновик ...

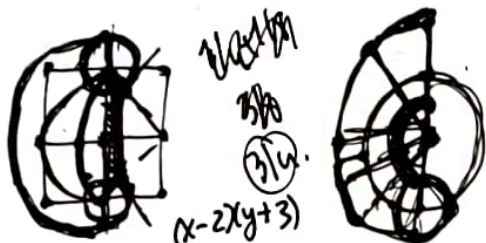
№1

$$2 \cdot C_7^2 \cdot C_4^3 + 2 \cdot C_7^2 \cdot C_3^1 \cdot C_4^2 + C_7^2 \cdot C_4^1 \cdot 3 + C_7^2 + C_7^1 \cdot 3 \cdot C_4^3 + 3 \cdot C_4^3 + C_4^2 \cdot 3 + 3 \cdot C_7^1 \cdot C_4^1 = 2(21 \cdot 4 + 21 \cdot 3 \cdot 6 + 21 \cdot 4 \cdot 3 + 21 + 7 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 7 \cdot 4)$$

$$2 \cdot 21(4 + 18 + 12 + 1 + 4 + 4) + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot 3$$

$$42 \cdot 43 + 60 = 1806 + 60 = 1866$$

№2



$$\frac{\sqrt{4/3}}{4} + 1 - \frac{\sqrt{1/3}}{8} + 3/4 \frac{\sqrt{1/3}}{2}$$

№3

$$(xy + 3x - 2y - 6) / (y - x - 8) = (x - 5) / (xy + 3x - 2y - 6)$$

$$\sqrt{y - x + 10} = y - 4$$

$$x + 13 = (2x - 1)^2$$

$$x + 13 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$4x^2 - 5x - 12 = 0$$

$$x > 2$$

$$y - x - 8 = x - 5$$

$$y - x + 10 = (y - 4)^2$$

x < 2

$$(y - x - 8) = -(x - 5)$$

$$y - x - 8 = -x + 5$$

$$y - x + 10 = (y - 4)^2$$

$$13 - x + 10 = 81$$

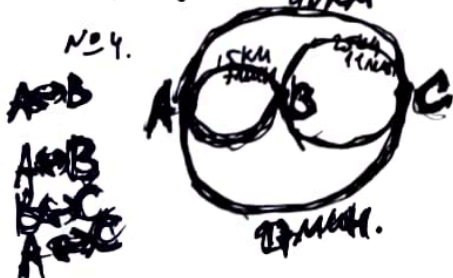
$$3 - x = 81$$

$$x = -78$$

$$y + y + 5 = y^2 - 8y + 16$$

$$y^2 - 9y + 8$$

№4



1 см. 27 мм.

85 мм.

$$85 = 17 \cdot 5$$

$$85 = 17 \cdot 3 + \dots$$

$$85 = 17 \cdot 2 + \dots$$

$$85 = 17 + \dots$$

$$5 \cdot 40 = 200 \text{ км.}$$

$$34 = 7x + 11y$$

$$51 = 7x + 11y$$

$$= 7 + 4y$$

$$4 \cdot 25 = 100 + 15 \cdot 10$$

$$68 = 7 \cdot 4 + 11 \cdot 3$$

$$68 = 7 \cdot 5 + 11 \cdot 3$$

$$1 \cdot 17 = 40 + 75 + 75 = 190 \text{ км}$$

$$85 = 17 + \dots$$

$$85 = 22 + 63$$

$$241 + 79$$

