0 784302 320003

78-43-02-32
(40,38)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 13

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Новоселова Александра Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

АНов

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	12	4	12	12	12	12	0	64

64 (шестьдесят четыре)

78-43-02-32
(40.38)

Лист №1

Задача 1. Чистовик

~~Выбрали 0 универсалов:~~ $C^{2+4+7}_{2+4+7+3} \cdot C^1_2 \cdot C^2_4 \cdot C^3_7 =$

$= \frac{16\cdot15\cdot14}{3\cdot2}\cdot 2\cdot\frac{4\cdot3}{2}\cdot\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} =$

$= 8\cdot5\cdot14\cdot2\cdot6\cdot7\cdot5 = 2^6\cdot3\cdot5^2\cdot7^2$

~~Выбрали 1 универсала:~~ C^{14}_{16}.

$C^k_n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Останутся невыбранными минимум $2-1=1$ вратарь, $4-2=2$ защитника, $7-3=4$ нападающих − 7 человек, остальные $16-6-7=3$ человека: 0 или 1 вратарь (k_1), от 0 до 2 защитников (k_2), от 0 до 3 нападающих (k_3), от 0 до 3 универсалов (k_4)

$n_1+n_2+n_3+\dots+n_i=\ell$ в целых $C^{\ell}_{\ell+i-1}$ реш. $\forall n_x \in [0;\ell]$

$k_1+k_2+k_3+k_4=3$

$k_1=0$: $k_2+k_3+k_4=3$

$k_2=0$: $k_3+k_4=3$ C^3_{3+2-1} реш.

$k_2=1$: $k_3+k_4=2$ C^2_{2+2-1} реш.

$k_3=2$: $k_3+k_4=1$ C^1_{1+2-1} реш.

$k_1=1$: $k_2+k_3+k_4=2$

$k_2=0$: $k_3+k_4=2$ C^2_{2+2-1} реш.

$k_2=1$: $k_3+k_4=1$ C^1_{1+2-1} реш.

$k_2=2$: $k_3+k_4=1$ 1 реш.

$C^3_{3+2-1}+C^2_{2+2-1}+C^1_{1+2-1}+C^2_{2+2-1}+C^1_{1+2-1}+1=4+3+2+3+2+1=$

$=15$ способов выбрать ост. 3 невыбранных

Выбрать первых 7 невыбранных: $C^1_2\cdot C^2_4\cdot C^4_7=2\cdot6\cdot7\cdot5=$

$=14\cdot30=420$ способов

Итого $420\cdot15=6300$ способов определить 10 невыбранных из 16 <=> вопр. 6 выбранных из 16

Ответ: 6300

Лист №2 Черновик

$f(0) = f\left(\frac{-2+2}{-2-2}\right) = \frac{2}{-4}$

Вратарь 2 защ. 3 нап.

2+3 4+3 7+3

$-\frac{1}{2}$

so 5 чр. so 7 чр. so 10 чр. Всего 16 человек

выбрать 6

5 задачи сюсэ

вр + 2з + 3н 1 вр. только 2 защ. только 4 нап. только

у + 2з + 3н остается выбрать 3 человек.

0 или 1 вр. от 0 до 2 защ. от 0 до 3 нап. от 0 до 3 у

$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 3$

$11+7+17 = 18+17 = 35$

$74 + 17 = 91$

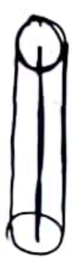
52 2155

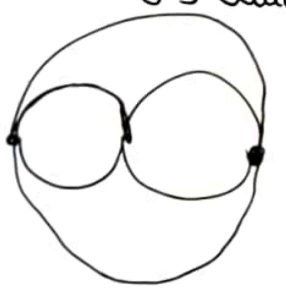
$k_1 = 0$: $k_2 + k_3 + k_4 = 3$

41 19

85 минут

30 8





85 мин $= 17 \cdot 5$

11 85 mod 11 $= -3 = 8$

66 19 8 45

41 30

34+7 17 7 7 37

21 80 30

8 0 23

$\frac{x+2}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}$

44 + 41

НОК(11;17) = 33 16

$63 = 7 \cdot 9$

без 11 17.

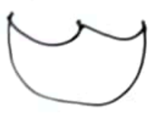
+11 · 2

18+17=35

$f\left(1 + \frac{4}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$

11 37

28



$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

22+28

$\frac{1}{2}(x-1)$ $\frac{x+2}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}$

$15 = \pi d_1$

$25 = \pi d_2$

$\frac{1}{2} + \frac{2}{x-2}$

$\pi(d_1 + d_2) = 40$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)$

78-43-02-32
(40.38)

Задача 4. Чистовик Лист №3

$85\ \cancel{мин} = 17_м \cdot 5$, но проехав по половине большой окр. (AC), автомобиль ок. в т. C => не подходит

Не ехать по какой-либо дуге также не получится, т.к. 7, 11, 17 — взаимнопростые, только НОК(7, 11) = 77 < 85, ~~ср~~-

~~сразу из 7 и 11 не получится добиться суммы 85 (либо 77+7=84,~~

~~либо 70+11=81~~ ~~85 mod 7 = 1, 85 mod 11 = 8, 85 mod 7 = 4,~~

~~т.е. $85 - 11k \not\vdots\, 7$ (можно проверить $\forall k \in [0;7]$~~

~~$85 \not\vdots\, 7$, $74 \not\vdots\, 7$, 63~~ :

т.е. возможно из 7 и 11 добиться суммы 85!

$7 \cdot 7 + 11 \cdot 2 = 63 + 22 = 85$, больше вар. нет

↳ ~~дуг~~. при таком маршруте 7 раз дуге AB + 2 раза BC =>

=> Ок. в конце в т. B

Тогда $85 = 11k_1 + 7k_2 + 17k_3$ $\quad k_1, k_2, k_3 \geq 1$

$50 = 11(k_1 - 1) + 7(k_2 - 1) + 17(k_3 - 1)$

$50 = 11 \cdot 3 + 17$ $\quad 4BC + AB + 2AC$ => не возм. маршрут

$50 = 11 \cdot 2 + 7 \cdot 4$ $\quad 3BC + 5AB + AC$ => подходит

больше вар. нет

Итого $3\cup BC + 5\cup AB + \cup AC = 3 \cdot 25 + 5 \cdot 15 + AC = 75 + 75 + 40 =$

$= 190$ (км)

$\cup AB = 15 = \frac{\pi \cdot AB}{2}$ $\quad \cup BC = 25 = \frac{\pi \cdot BC}{2}$

$\cup AC = \frac{\pi}{2}(AB + BC) = 40$

Ответ: 190 (км)

Задача 5 $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=\frac{2}{x-2}$ Чистовик Лист №4

$\frac{x+2}{x-2}=1+\frac{4}{x-2}$ $\frac{2}{x-2}=\left(1+\frac{4}{x-2}\right)\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$ =>

=> $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)$

$f(f(x))=\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{2}$

$f(f(f(x)))=\frac{1}{8}(x-1)-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

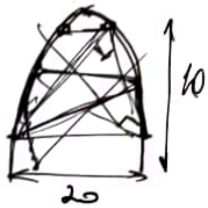
При каждом последующем применении функции к самой себе коэффициэнт перед x уменьш. в 2 раза, т.к. в рез. прим. ф-ции её аргумент уменьш. в 2 раза, при этом нас не интересует свободный член, вопрос задачи в тангенсе наклона кас. к графику в точке => произв. в точке

$\left(\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{12}\right)'=\frac{x}{2^{12}}+C$ =>

=> $\left(\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{12}\right)'=\frac{1}{2^{12}}$ $\forall x$, в т.ч. для $x=0$

Ответ: $\frac{1}{2^{12}}$

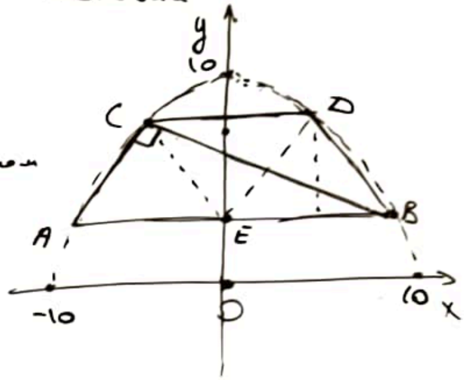
Лист N5



$y = a - bx^2$

Задача 6

Чистовик



Зададим Декартову с.о., начало отсчёта - середина пола свода в поперечном срезе туннеля

посчитаем a и b из подстановки точки $(-10;0)$, $(0;10)$

$$\left.\begin{aligned} 10 &= a \\ 0 &= a - 100b \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$\begin{cases} AB \parallel OX \\ CD \parallel OX \end{cases} \Rightarrow$ ~~ABCD~~ CDB - трапеция, ~~т.к. $\angle ACB = \angle ADB$~~, ввиду симм. C и D, A и B отн. OY, $ACDB$ - р/б с осн. AB и CD

$\angle ACB = \angle ADB = 90° \Rightarrow ACDB$ - впис. в окр. с центром E - - сер. AB, AB - диаметр, радиусом $\frac{AB}{2} = R$

рассм. $B(x_B, y_B)$ и $D(x_D, y_D)$

$y_B = 10 - \frac{x_B^2}{10}$ $\quad EB = X_B \quad$ $y_D = 10 - \frac{x_D^2}{10}$

$$\left.\begin{aligned} \underbrace{ED^2 = x_D^2 + (y_D - y_B)^2}_{\text{по т. Пифагора}} = EB^2 \\ y_D - y_B = \frac{x_B^2 - x_D^2}{10} \end{aligned}\right| \Rightarrow (x_B^2 - x_D^2)^2 = 100(x_B^2 - x_D^2)$$

$\Updownarrow$

$(x_B^2 - x_0^2)(x_B^2 - x_D^2 - 100) = 0$

$\neq 0$ т.к. Вне совп. с D, т.к. $\angle ADB = 90° \neq 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow y_D \neq y_B \Rightarrow |x_D| \neq |x_B|$
т.к. ур-ние параболы задаёт $|x| \longleftrightarrow y$

$x_B^2 - x_D^2 = 100$

$y_D - y_B = \frac{x_B^2 - x_D^2}{10} = 10$

расст. между балками $\parallel OX$ и равно $|y_D - y_B| = |y_C - y_A|$

Ответ: 10

Черновик

Лист №6

~~1~~ 2 3 ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ 8

$S(n)$ $S(m\cdot n)=S(n)$

$m\cdot n=10^k n$ $\varnothing$

123456789

$1+2+3+4$ 10

$1234\cdot k=$

1234

$99\cdot 2=198$

$99\cdot 3=297$

$99\cdot 11=900+\overset{+90}{90}=990\xrightarrow{+99}$

$\longrightarrow 1089$

$990+99=1089$

$9\ldots 9\cdot k=$

$\cdot 2\rightarrow$ $(10^i-1)\cdot k=10^i\cdot k-k$

10^i-1 9

$(10-1)\cdot k=10k-k$

$(10^{75}-1)\cdot k=10^{75}\cdot k-k$

не более 75 разрядов

75 пустых разрядов

$10^{75}(m-1)$

$10^{75}\cdot m-m$

k $10-k-1$

472000

472

471528

$270+27$

Задача 7 Чистовик Лист №7

Это число, состоящее полностью из девяток, т.е.

$$n = \underbrace{9 \dots 9}_{75} = 10^{75} - 1$$

$1 \le m \le n \Rightarrow m$ cos. не более 75 разрядов

пусть в m a разрядов.

$$(10^{75} - 1) \cdot m = 10^{75} \cdot m - m$$

75 свободных (занятых 0) разрядов

тогда число k_i в i-ом разряде дает в первом слагаемом k_i, во втором $10 - k_i - 1$,

т.к. $10^{75} \cdot m$ и m разрядами не пересекаются, вычитая m i разряд создаёт $10 - k_i - 1$ к общей сумме цифр, т.к. мы занимаем от разряда слева 1. Итого получится число вида $\overline{(k_a)(k_{a-1}) \dots (k_1 - 1)\underbrace{9 \dots 9}_{75-a}\underbrace{(9-k_a) \dots (10-k_1)}_{a}}$

сумма цифр которого

$$\underbrace{(k_a + 9 - k_a) + (k_{a-1} + \cancel{10} - k_{a-1}) + \dots (k_1 - 1 + 10 - k_1)}_{9 \cdot a} + 9 \cdot (75 - a) =$$

$= 9 \cdot 75$, что равно $S(n)$, таким образом, $S(m \cdot (10^{75} - 1)) = S(10^{75} - 1)$, причём это наибольшее число 75-значное $\Rightarrow$ Ответ: $10^{75} - 1$

Задача 3 Чистовик Лист №8

$xy+3x-2y-6=(y+3)x-2(y+3)=(y+3)(x-2)\geq 0 \rightarrow$ при $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\geq -3\\ x\geq 2\end{cases}\\ \begin{cases}y<-3\\ x<2\end{cases}\end{array}\right.$

но

$\sqrt{y-x+10}=y-4 \Rightarrow \begin{cases}y\geq 4\\ y\geq x-10\end{cases} \Rightarrow y+3\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (y+3)(x-2)\geq 0$ при $x\geq 2$, $<0 \rightarrow x<2$

Тогда

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 2 \quad x\geq 5\\ |y-x-8|=(x-5)\end{cases}\\ \begin{cases}\boxed{x<2} \quad \cancel{x\leq 5}\\ |y-x-8|=5-x\end{cases}\end{array}\right.\\ \sqrt{y-x+10}=y-4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 5\\ y=2x+3\end{cases}\\ \begin{cases}x>5\\ y=13\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2\\ y=13\end{cases}\\ \begin{cases}x<2\\ y=2x+3\end{cases}\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \sqrt{y-x+10}=y-4\end{cases}$

$\begin{cases}|y-x-8|=x-5\\ (x\geq 5)\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\geq x+8\geq 13\\ y=2x+3\geq 13\\ x\geq 5\end{cases}\\ \begin{cases}y<x+8\geq 13\\ y=13\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2x+3\\ x\geq 5\end{cases}\\ \begin{cases}y=13\\ x>5\end{cases}\end{array}\right.$

$|y-x-8|=5-x$
$x<2$

$\Downarrow$

$y\geq x+8<10$ $\qquad$ $y<x+8<10$

$\begin{cases}y=13\\ x<2\end{cases}$ $\qquad$ $8+x-y=5-x$
$y=2x+3$

подст. $y=13$: $\sqrt{13-x+10}=9 \Rightarrow x=-58<2$

но тогда $|13+58-8|=63=(-58-5)\cdot(-1)=63$,

т.е. $(-58;13)$ подходит

Тогда остаются

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 5\\ y=2x+3\end{cases}\\ \begin{cases}x<2\\ y=2x+3\end{cases}\end{array}\right.\\ \sqrt{y-x+10}=y-4\end{cases}$

$(-58;13)$

подст. $y=2x+3$:

$\sqrt{2x+3-x+10}=2x+3-4$

$\sqrt{x+13}=2x-1 \quad x\geq 0{,}5$

прод. на сл. стр.

Задача 3 Чистовик $\quad 16\cdot 12 = 192 \quad$ Лист №9

$$\begin{cases} x+13 = 4x^2-4x+1 \\ x \geq 0{,}5 \end{cases} \quad 4x^2-5x-12=0$$

$$D = 25+192 = 218 > 0 \Rightarrow 2к$$

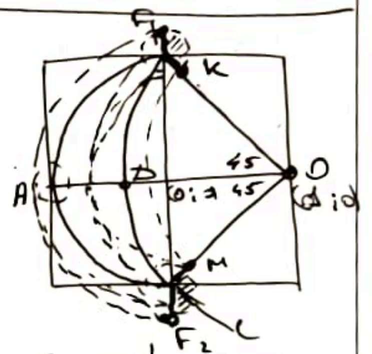
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{218}}{8}, \text{ т.к. } 14<\sqrt{218}<15 \text{ и } x \geq 0{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5+\sqrt{218}}{8} \Rightarrow y = 2x+3 = \frac{34+2\sqrt{218}}{8}$$

Ответ: $(-58;13) \cup \left(\frac{5+\sqrt{218}}{8}; \frac{34+2\sqrt{218}}{8}\right)$

Задача 2 $BO = \sqrt{2} = DO \Rightarrow$

$$\Rightarrow AD = 2-\sqrt{2} \approx 0{,}6 < \frac{2}{3} \Rightarrow$$



$\Rightarrow$ круги расплывшись, покроют весь полумесяц; или не просто дуги окр. с большими ... пересекутся из каждой дуги получится фигура, огр. дугами окр. в центре, один с изн. дугами, у одной радиус на $\frac{1}{3}$ больше, у другой — на $\frac{1}{3}$ меньше

$$S_{F_1AF_2} = \frac{\pi\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2}{2} = \frac{8}{9}\pi, \quad r=\frac{4}{3}$$

прибавим $S_{\triangle BOC}$, вычтем $S_{\text{сектора } KOM}$ окр. с $r = \sqrt{2}-\frac{1}{3}$

$$S_{\triangle BOC} = 1, \quad S_{KOM} = \frac{\pi\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)^2}{4}$$

Остаются секторы маленьких окр. (F_1BK и MCF_2):

$$S_{F_1BK} = S_{MCF_2} = \pi\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{90+45}{360}\right) = \frac{\pi}{24} \qquad \frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\text{Итого } \frac{8}{9}\pi + 1 - \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot\frac{\pi}{24} =$$

$$= \frac{4}{9}\pi - \pi\frac{\sqrt{2}}{6} + 1$$

Ответ: $\frac{4}{9}\pi - \pi\frac{\sqrt{2}}{6} + 1$

Задача 8 Чистовик Лист №10

~~Ур-ние плоскости $ax+by+cz+d=0$~~

~~подст. $(3;4;5),(11;10;6),(5;8;9)$~~

$$\begin{cases} 3a+4b+5z+d=0 \quad (1) \\ 11a+10b+6z+d=0 \quad (2) \\ 5a+8b+9z+d=0 \quad (3) \end{cases}$$

$(2)-(3) \Rightarrow 6a+2b-3z=0$

$3z=6a+2b$

$11a+10b+12a+4b+d=$ подст. в (2)

$=23a+14b+d=0$

$3a+4b+30a+10b \overset{\text{подст. в (1)}}{-} 23a-14b = 10a=0$

$a=0 \Rightarrow 3z=2b \qquad d=-14b$

Посчитаем длины сторон треугольника!

$a=|(11-3;10-4;6-5)|=\sqrt{8^2+6^2+1^2}=\cancel{\ } 11$

$b=|(11-5;10-8;6-9)|=\sqrt{6^2+2^2+3^2}=7$

$c=|(5-3;8-4;9-5;)|=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=6$

$p=\cancel{24}\,12$ $\qquad \cancel{\sqrt{12\cdot1\cdot5\cdot6}=2\sqrt{105}}$

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\cancel{\sqrt{24\cdot13\cdot17\cdot18}=12\sqrt{3\cdot13\cdot17}}$

Формула Пика? связывает число целочисл. точек внутри (i) фигуры, на её сторонах и вершинах(k) и её площадь S

$S=\sqrt{12\cdot1\cdot5\cdot6}=6\sqrt{10}$ $\qquad$ $S\approx19$

$S=k-i+1 \quad\Rightarrow\quad k-i=18$

Лист №11

Черновик

$$\begin{cases}(xy+3x-2y-6)|y-x-8| = (x-5)|xy+3x-2y-6| \\ \sqrt{y-x+10} = y-4\end{cases}$$

$3^2+4^2+5^2 = 9+16+25 = $

$= (5\sqrt{2})^2$

$$\begin{cases} y \geq 4 \\ y \geq x-10 \end{cases}$$

$221+36 = 257$

$$\begin{cases} y-x+10 = (y-4)^2 \\ y \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-9y+x+6=0 \\ y \geq 4 \end{cases}$$

$y^2-9y+x+6=0$

$D = 81-4(x+6) = 57-4x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{57}{4} = 14\frac{1}{4}$

$$\left[\begin{cases} \begin{cases} xy+3x-2y-6 \geq 0 \\ |y-x-8| = (x-5) \end{cases} \\ \begin{cases} xy+3x-2y-6 < 0 \\ |y-x-8| = 5-x \end{cases} \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}\right. \Rightarrow \begin{cases} xy+3x-2y-6 \geq 0 \\ \begin{cases} y \geq x+8 \\ y = 2x+3 \end{cases} \\ \begin{cases} y < x+8 \\ y = 13 \end{cases} \end{cases}$$

$xy+3x-2y-6$

22 20 12 3

(2)-(3)

$2x+3 \geq 4$

$y^2-9y+x+6=0$

$2x \geq 1$

$x \geq 0,5$

y^2-

$D = 57-4x < 55$

$y = \frac{9 \pm \sqrt{D}}{2}$

$y=13: \sqrt{23-x} = 9$

$\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)^2 = 2+\frac{1}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\frac{8}{9}^{14} + \frac{1}{12}^{13}$

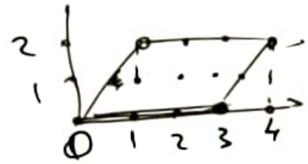
π

$\frac{3}{2}\pi$

$\frac{35}{36}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{4}$ $\pi + \frac{1}{2}\pi$

3 $\frac{34}{36}$ $\frac{17}{18} - \frac{9}{18}$ $\frac{8}{18}\pi$

Черновик Лист №12



1бр 2з 3мен

2 4 7 3ун.

$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 6$ $k = 8$ $in = 3$ $S = 4+2=6$ $k - in + 1$

$$\begin{cases} (xy+3x-2y-6)|y-x-8| = (x-5)|xy+3x-2y-6| \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$$

$y \geq 4$

8 1

8 - 1 - 16

$8^0\ 3+\frac{10}{2}$

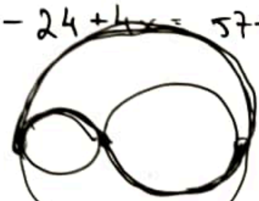
$y - x + 10 = y^2 - 8y + 16$ $81 - 24 = 67$ $8+\frac{8}{2}+1$

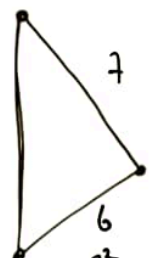
57

$y^2 - 9y + 6 - x = 0$

$D = 81 - 24 + 4x = 57 + 4x$

$S =$





$ax + by + cz + d = 0$

$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)p$

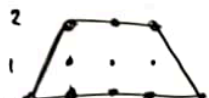
$y = f(x)\ f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$ $f(0) = -\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$ $\left(\frac{2}{x-2}\right)' =$

$= -\frac{2}{(x-2)^2}$ $(x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$ $2-2x+4$

$2+2x-4$

$f'\left(f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right) =$



$k = 8$ $i = 3$

$S = 6$

$8-3+1$

$$\frac{\frac{2}{x-2}+2}{\frac{2}{x-2}-2} = \frac{2x-2}{6-2x} =$$

$$= \frac{2}{\frac{2}{x-2}-2} \Rightarrow \left(\frac{2x-4}{6-2x}\right)'$$

$S(n)$ 75зн $S(mn) = S(n)$ $\forall\ 1 \leq m \leq n$

9000000 → 180000

$\underbrace{11111...1}_{10}\ S(n) = 10$ $S(2n) = 20$