

69-96-55-17
(40.41)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 13

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Иванович Марии Александровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника
AA

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	12	12	4	12	12	0	0	64

69-96-55-17
(40.41)

Черновики

1В	2	3yn мв
23	4	
3H	7	

$$120 \sqrt{\frac{3}{15}}$$

$$\frac{x+2}{x-2} - 1 = \frac{x+2-x-2}{x-2} = \frac{2}{x-2}$$

$$\frac{2}{6} \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{4} \right) + \left[\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{4} \right] \frac{7}{4} + \left[\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{3} \right] \frac{3}{4} +$$

$$+ \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 3 \cdot 3} = 2 \left(\frac{28}{60} + \frac{21}{60} + \frac{12}{60} + \frac{6}{60} \right) = 134$$

$$\frac{2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2}}{6 \cdot 3} - \frac{4 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 4} + 2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} +$$

$$f(x) = \frac{2}{x-1} - 2$$

$$2(x_1-1) \cdot x_1(x-2) = x+2 \Rightarrow x_1(x-2) = \frac{x+2}{x-2}$$

$$\frac{632x_1+2}{x \cdot 6} = \frac{378}{378}$$



$$\frac{x-4}{4}$$

$$\Rightarrow x_1(x-2) = \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow x(x-1) = 2x+2 \Rightarrow x = \frac{2x_1+2}{x_1-1}$$

$$\frac{126}{x \cdot 4} = \frac{504}{378}$$

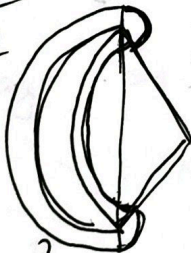
$$\frac{98}{x \cdot 4} = \frac{192}{378}$$

$$160 + 32 = 192$$

$$\frac{16}{9} - 1 = \frac{360}{27}$$

$$\frac{360}{27}$$

$$\begin{array}{r} 1745 \\ + 89 \\ \hline 1833 \\ + 63 \\ \hline 1896 \end{array}$$

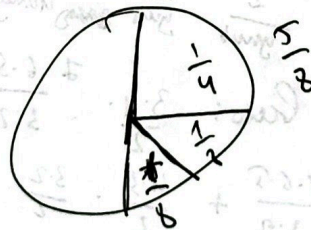


$$135 \sqrt{\frac{6}{27}}$$

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{8}$$

$$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$$

$$f(\dots)$$



$$\begin{array}{r} 630 \\ + 378 \\ \hline 1008 \\ + 405 \\ \hline 1413 \\ + 120 \\ \hline 1533 \\ + 504 \\ \hline 2037 \\ + 6 \\ \hline 2043 \\ + 1749 \\ + 84 \\ \hline 3876 \end{array}$$

$$f\left(\frac{2}{x-2}\right) = 2 = x_1+2 \Rightarrow x-2 = x_1-2 \Rightarrow x_2 = 2x_1$$

$$\sqrt{\frac{2x}{4}} \Rightarrow 1 = \frac{\sqrt{2x}}{2} \Rightarrow \sqrt{2x} = 2 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{x}{2} + 2 = \frac{x+4}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} - 2 = \frac{x-4}{2} \Rightarrow \sqrt{2x} = 2 \Rightarrow x = 2$$

630x

Числом

1. т.к. президент на линии формирует 2 и линию вобран 1 формирует, а также сам администратор 2.

Рассмотрим, сколько администратор вобран 2 занятностью и 3 занятностью: если среди вобраных нет ушкранов:

$$\frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \text{ (от } C_4^2 \text{ и } C_7^3 \text{) занятности и администратор}$$

вобраных

если 1 ушкран: 1) среди занятности: $\frac{3}{\text{губ}} \cdot \frac{4}{\text{зан}} \cdot \frac{C_7^5}{\text{намы}}$

2) среди администраторов: $\frac{C_4^2}{\text{зан}} \cdot \frac{3}{\text{губ}} \cdot \frac{C_7^3}{\text{намы}}$

если 2 ушкрана: 1) оба занятности:

$$\frac{C_3^2}{\text{губ}_2} \cdot \frac{C_7^3}{\text{намы}}$$

2) оба администраторы: $\frac{C_4^2}{\text{зан}} \cdot \frac{C_3^2}{\text{губ}} \cdot 7$

3) 1 занятности и администратор: $\frac{3}{\text{губ}} \cdot \frac{4}{\text{зан}} \cdot \frac{2}{\text{губ}} \cdot \frac{C_7^2}{\text{намы}}$

если 3 ушкрана: 1) все администраторы:

$$\frac{C_4^2}{\text{зан}} \cdot 1 \text{ (от } C_3^3 = 1 \text{) занятности}$$

2) 2 занятности и 1 зан:

$$\frac{3 \cdot 4}{\text{губ}} \cdot \frac{7}{\text{губ}} \cdot \frac{7}{\text{зан}}$$

3) 1 занятности и 2 зан:

$$\frac{3 \cdot 2}{\text{губ}} \cdot \frac{1}{\text{губ}} \cdot \frac{C_7^2}{\text{намы}}$$

Всего всего:

$$\frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 3 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} +$$

$$+ 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 7 + \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot 1 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 + 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 + 7 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 + 6 + 3 \cdot 4 \cdot 7 + 7 \cdot 3 \cdot 5 = 210 + 420 + 378 + 105 + 126 + 504 + 6 + 84 + 63 = 1396 \rightarrow \text{всего вариантов}$$

вобраных администраторов $1396 \cdot 2 = 3792$ Ответ: 3792

69-96-55-17
(40.41)

Чертежи

Рассмотрим получим, если по, как криволинейная дуга, тогда криволинейную фигуру можно представить как составленную из нескольких дуг окружностей, с центром в (0,0) и радиусом $\frac{1}{3}$ (дуга = 165°) и дуги окружности с центром (1,0) радиусом $\frac{1}{3}$ (дуга = 90°) (как показано на рисунке)

Это можно сделать, т.к. криволинейная дуга, как криволинейная фигура, которую можно представить как составленную из нескольких дуг окружностей, с центром в (0,0) и радиусом $\frac{1}{3}$ и криволинейной дуге с центром (1,0) радиусом $\frac{1}{3}$ и криволинейной дуге с центром (0,0) и радиусом $\frac{1}{3}$ и криволинейной дуге с центром (1,0) радиусом $\frac{1}{3}$ и криволинейной дуге с центром (0,0) и радиусом $\frac{1}{3}$.



а на "концах" получим дуги, тогда криволинейную фигуру можно представить как составленную из нескольких дуг окружностей, с центром в (0,0) и радиусом $\frac{1}{3}$ и криволинейной дуге с центром (1,0) радиусом $\frac{1}{3}$ и криволинейной дуге с центром (0,0) и радиусом $\frac{1}{3}$ и криволинейной дуге с центром (1,0) радиусом $\frac{1}{3}$ и криволинейной дуге с центром (0,0) и радиусом $\frac{1}{3}$.

тогда $S_1: S_1 = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot \sqrt{2}^2}{4} - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 1 = 1$

$S_2: \frac{\pi \cdot (\frac{1}{3})^2}{2} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi \cdot 7}{18}$; $S_3 = \frac{\pi \cdot \sqrt{2}^2}{4} - \frac{\pi (\sqrt{2} - \frac{1}{3})^2}{4} = \frac{\pi \cdot \sqrt{2}^2}{4} - \frac{\pi (2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{9})}{4}$

$S_4 = \frac{135}{360} \cdot \pi \cdot (\frac{1}{3})^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{24} \Rightarrow S = S_1 + S_2 + S_3 + 2S_4 = 1 + \frac{7\pi}{18} + \frac{\pi}{36} (6\sqrt{2} - 1) + 2 \cdot \frac{\pi}{24} = 1 + \frac{7\pi}{18} + \frac{\pi}{36} (6\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi}{12} = 1 + \frac{(16 + 6\sqrt{2})\pi}{36} = 1 + \frac{(8 + 3\sqrt{2})\pi}{18}$

Лист 2

Числовой

$$\sqrt{(xy + 3x - 2y - 6) |y - x - 8|} = (x - 5) |xy + 3x - 2y - 6| \quad (1)$$

ОДЗ:

$$y - x + 10 > 0$$

$$y > x - 10$$

$$y > 4$$

$$\sqrt{y - x + 10} = y - 4 \quad (2)$$

Рассмотрим (1): при $xy + 3x - 2y - 6 > 0$:

получим $|y - x - 8| = x - 5$

\Rightarrow при $y - x - 8 > 0$: $y - x - 8 = x - 5$

($y > x + 8$)

$y = 2x + 3 \Rightarrow 2x + 3 > x + 8$
 $x > 5$

тогда $x(2x + 3) + 3x - 2(2x + 3) - 6 > 0$

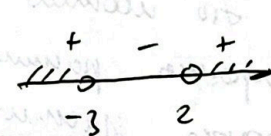
$$2x^2 + 3x + 3x - 4x - 6 - 6 > 0;$$

$$2x^2 + 2x - 12 > 0$$

$$x^2 + x - 6 > 0$$

$$(x + 3)(x - 2) > 0$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$$



тогда в (2): $\sqrt{2x + 3 - x + 10} = 2x + 3 - 4$

$$\sqrt{x + 13} = 2x - 1$$

$$x + 13 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$4x^2 - 5x - 12 = 0;$$

$$D = 25 + 192 = 217$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{217}}{8} \text{ где } \begin{cases} x < -3 \\ x > 2 \end{cases}$$

\Rightarrow при $x = \frac{5 + \sqrt{217}}{8} > 2$ - подходит $\Rightarrow y = \frac{5 + \sqrt{217}}{4} + 3$

при $x = \frac{5 - \sqrt{217}}{8}$ - не подходит (но при $x > 5$ не подходит)

при $y - x - 8 < 0$: $8 + x - y = x - 5$

($y < x + 8$)

$y = 13 \Rightarrow 13x + 3x - 26 - 6 > 0$

$\Rightarrow 13 < x + 8 \quad 16x - 32 > 0$

$\Rightarrow x > 5$

$x > 2$

$\Rightarrow x > 5$

и $\sqrt{13 - x + 10} = 9$

$$\sqrt{23 - x} = 9$$

$23 - x = 81 \Rightarrow x = 23 - 81 < 5 \Rightarrow$ не подходит

2) при $xy + 3x - 2y - 6 < 0$: $|y - x - 8| = 5 - x$

лист 3

тогда при $y > x+3$ $y-x-3 = 3-x$

$y=13 \Rightarrow x \leq 5$

и $17x+3x-26-6 < 0$

$\Rightarrow x < 2$

и $\sqrt{23-x} = 9$

$x = 23-81 = -58 \Rightarrow$

$(-58; 13)$ ~~и $(-58; 13)$~~ ~~и $(-58; 13)$~~

при $y < x+3$: $y-x-3 = x-5$

$y = 2x+3 \Rightarrow 2x^2+3 < x+3$
 $x < 5$

и $x(2x+3) + 3x - 2(2x+3) - 6 < 0$

$x^2+x+6 < 0$

$\Rightarrow x \in (-3; 2) \Rightarrow$ кор (2) $\sqrt{2x+3-x+6} = 2x+3-4$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{217}}{8}$ (анализ)

и $x = \frac{5 + \sqrt{217}}{8} > 2$ не подходит

$x = \frac{5 - \sqrt{217}}{8} > -3 \Rightarrow$ подходит $y = \frac{5 - \sqrt{217}}{4} + 3$

но так $y \geq 4$ - не

подходит

3) при $xy+3x-2y-6 = 0$

$\Rightarrow x(y+3) - 2(y+3) = 0$

$\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ - исключено так $y \geq 4$

$\Rightarrow x=2 \Rightarrow y \geq -8, y \geq 4$

тогда для (2): $\sqrt{y-2+6} = y-4$

$\sqrt{y+8} = y-4$

$y+8 = y^2 - 8y + 16$

$y^2 - 9y + 8 = 0$

$(y-8)(y-1) = 0$

$\begin{cases} y=8 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow y=8$ (так $y \geq 4$)

и $(2; 8)$ подходит

\Rightarrow Ответ: $(-58; 13); (2; 8)$

числовые

1) иб. $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$

пусть $x_1 = \frac{x+2}{x-2}$, тогда

$x_1 x - x_1 \cdot 2 = x + 2$

$x(x_1 - 1) = 2(x_1 + 1)$

$x = \frac{2(x_1 + 1)}{x_1 - 1}$

$\Rightarrow f(x_1) = \frac{2}{\frac{2(x_1+1)}{x_1-1} - 2} = \frac{2(x_1-1)}{2x_1+2-2x_1+2} = \frac{x_1-1}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{2}$ (при $x \neq 2$)

тогда $f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x-3}{4}$

$f(f(f(x))) = \frac{\frac{x-3}{4} - 1}{2} = \frac{x-7}{8}$

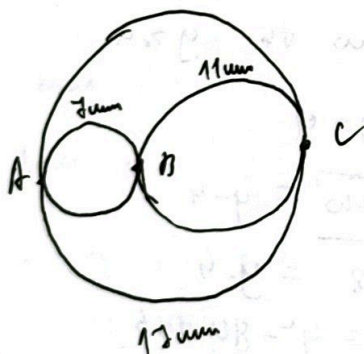
$\Rightarrow \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n} = \frac{x - (2^n - 1)}{2^n}$

тогда пусть найдем производную $g(x) = g'(x)$

$\Rightarrow g'(x) = \left(\frac{x - (2^n - 1)}{2^n}\right)' = \frac{1}{2^n} \Rightarrow$ при $x=0$

Ответ: $\frac{1}{4096}$

нч.



все время $t = 12 \cdot 25 \text{ мм} = 300 \text{ мм}$

т.к. $35 : 17 \Rightarrow$ окружность

или все по дуге AB

он пройдет x раз, по дуге BC

y раз, по дуге AC z раз \Rightarrow

$7x + 11y + 17z = 35$

и $7x + 11y \neq 17$

т.к. его путь состоит из пересекающей с окружностью

и дуги и покрывает круг по окружности,

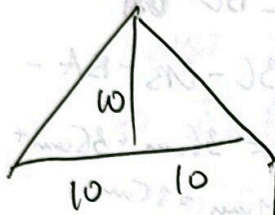
если путь вернется в A, рассмотрим пересечение

относительно окружности. если он пересечет

дуги AB: путь от A: AB - BC - CA - 35 мм

AB - BA - 14 мм Лич 5

Черновики



$$7 + 11 +$$

$$10 \quad 14$$

$$21$$

$$7 + 7 a = 14$$

$$+ 11 + 17 = 35$$

$$+ 11 + 11 + 7 = 36$$

$$35$$

$$+ 11$$

$$17 + 17 = 34$$

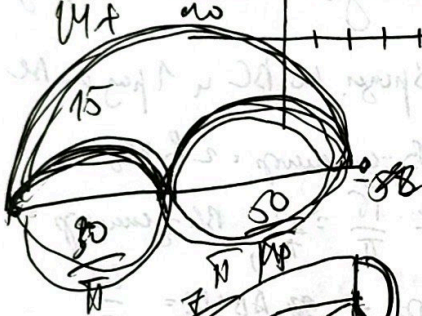
$$+ 11 + 7 = 35$$

$$30 + 30 + 30 = 90$$

$$36$$

$$+ 17$$

$$+ 17$$



$$50 + 50 = \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{9} = \frac{2\pi}{24}$$

$$\left(\frac{\pi}{12} \right)$$

$$13 + 63$$

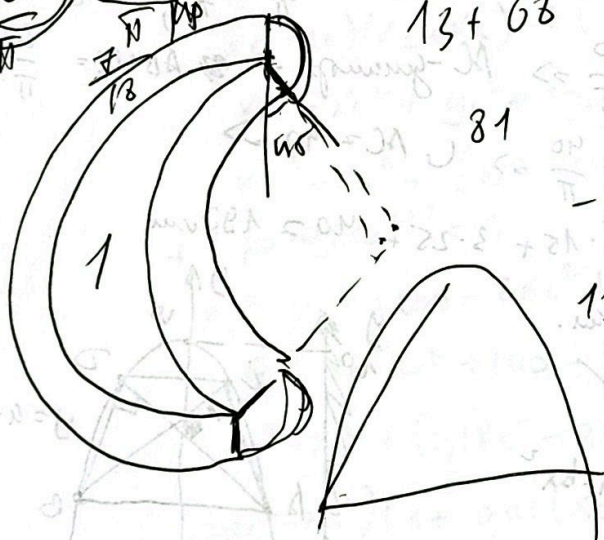
$$9 = 9$$

$$81$$

$$- 58 \quad 13$$

$$1 + \frac{3\pi}{12} +$$

$$+ \frac{17\pi}{36} + \frac{(6\sqrt{2})\pi}{36}$$



$$13 + 58 - 8$$

$$63 - 63$$

$$\frac{\pi}{36} (18\pi + 6\pi)$$

$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi(2 - \frac{1}{3})^2}{4} - 58 \cdot 13 + 58 \cdot 3 - 26 - 6 \geq 0$$

$$\frac{\pi(\frac{4}{3})^2}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} +$$

$$= 2 - 2 + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{9}$$

$$\frac{5}{9} - \frac{19}{9}$$

$$- \frac{10}{9} + \frac{6\sqrt{2}}{9}$$

$$\frac{6\sqrt{2} - 14}{9}$$

$$\frac{3\sqrt{2} - 5}{9}$$



число 1

$$AB - BC - CB - BA = 36 \text{ мм}$$

если концы с AC: $AC - \cancel{CB} - \cancel{BA} = 34 \text{ мм}$

$$AC - CB - BA = 35 \text{ мм}$$

т.к. все всегда 35 мм \Rightarrow м.б. $AB - BC - \cancel{CB} -$

$$- AB - BC - CB - BA -$$

$$- AB - BA = 36 \text{ мм} + 35 \text{ мм} + 14 \text{ мм} = 85 \text{ мм}$$

м.б. $AC - CB - BA - AB - \cancel{BA} - AB - BC - CB - BA = 35 \text{ мм} + 14 \text{ мм} + 36 \text{ мм} = 85 \text{ мм}$ (комбинированная лестница по кругу)

туда от 5 раз вверх по AB, 3 раза по BC и 1 раз по AC

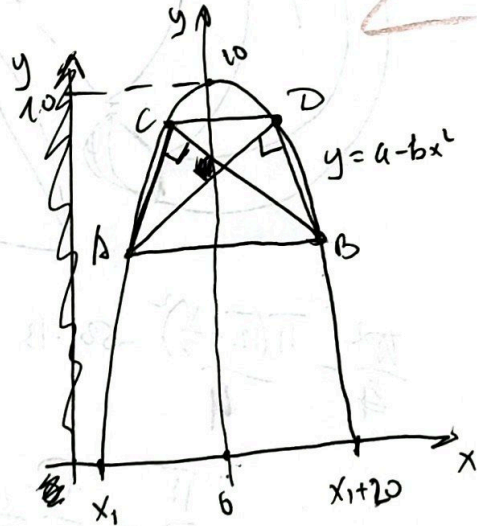
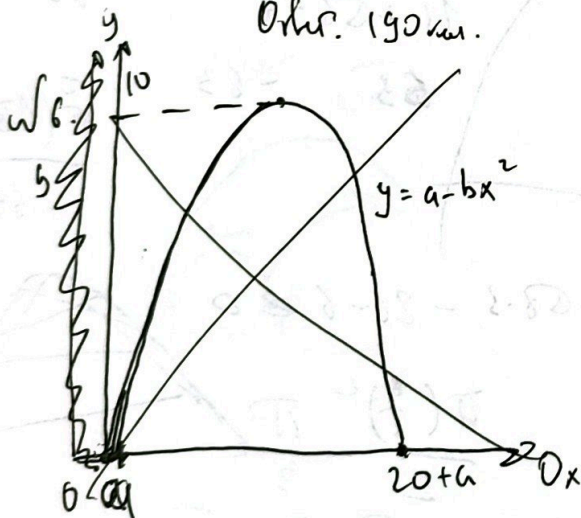
уже т.к. $\cup AB = 15 \text{ мм} \Rightarrow$ AB -генератор $= 2R$ уже

$$15 \text{ мм} = \pi R \Rightarrow AB = 2 \cdot \frac{15}{\pi} = \frac{30}{\pi}, \quad BC\text{-генератор} = 2 \cdot \frac{25}{\pi} = \frac{50}{\pi} \Rightarrow AC\text{-генератор} = AB + BC = \frac{80}{\pi}$$

$$\Rightarrow R = \frac{40}{\pi} \Rightarrow \cup AC = 40 \Rightarrow$$

$$\text{Весь путь: } 5 \cdot 15 + 3 \cdot 25 + 40 = 190 \text{ мм}$$

Отв. 190 мм.



т.к. $y = a - bx^2$ и y вершина параболы $y_0 = 10$
 уже $x_0 = -\frac{0}{-2b} = 0 \Rightarrow y_0 = a = 10$, уже параболы

симметричные Oy и корни, т.к. расставили сумму

$$\text{минимум} = 20 - x_1 = -10, \quad x_2 = 10 \Rightarrow$$

$$y = a - bx^2 = a(x-10)(x+10) = a(x^2 - 100)$$

лист 6

Числа

$$y = 10 - bx^2 = cx^2 - 100c$$

где $10 = -100c$

$$\Rightarrow c = -0,1$$

$$\Rightarrow y = 10 - 0,1x^2$$

пусть $A(x_a; y_a), C(x_c; y_c), B(x_b; y_b)$

$$\rightarrow \overline{AC} \{x_c - x_a; y_c - y_a\} \text{ тк } \angle ACB = 90^\circ \rightarrow$$

$$\overline{BC} \{x_c - x_b; y_c - y_b\} \quad (x_c - x_a)(x_c - x_b) + (y_c - y_a)(y_c - y_b) = 0$$

(тк $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = 0$)

при этом $y_a = 10 - 0,1x_a^2$

$$y_b = 10 - 0,1x_b^2$$

$$y_c = 10 - 0,1x_c^2, \text{ а } y_a = y_b \text{ тк.}$$

(тк ось симметрии Oy) $AB \parallel O_x$

$$\Rightarrow x_a = -x_b \Rightarrow$$

$$(x_c - x_a)(x_c + x_a) + (y_c - y_a)^2 = 0$$

$$x_c^2 - x_a^2 + y_c^2 + 2y_c y_a + y_a^2 = 0$$

$$x_c^2 - x_a^2 + (10 - 0,1x_c^2)^2 - 2(10 - 0,1x_c^2)(10 - 0,1x_a^2)$$

$$+ (10 - 0,1x_a^2)^2 = 0$$

$$x_c^2 - x_a^2 + 100 - 2x_c^2 + 0,01x_c^4 - 200 + 2x_c^2 + 2x_a^2$$

$$- 0,02x_a^2 x_c^2 + 100 - 2x_a^2 + 0,01x_a^4 = 0$$

$$x_c^2 - x_a^2 + (0,1x_a^2 - 0,1x_c^2)^2 = 0;$$

$$(x_c^2 - x_a^2)(1 + 0,01(x_c^2 - x_a^2)) = 0;$$

$$\begin{cases} x_c = \pm x_a - \text{невозможно тк. } A \text{ и } C \text{ не симметричны} \\ x_a^2 - x_c^2 = 100 \end{cases}$$

тогда тк расстояние между AB и $CD = y_c - y_a$

$$= 10 - 0,1x_c^2 - 10 + 0,1x_a^2 = 0,1(x_a^2 - x_c^2) = 10$$

Ответ 10.

№ 7. Заметим, что в.к. - дуги конуса т.к. сумма

углов равна π , а x и y $\in \mathbb{R}$, \Rightarrow обратится
 от 0 до $\pi \Rightarrow$ т.к. π имеет все возможные
 значения, тогда y т.к. принимает любые значения, ответ 7

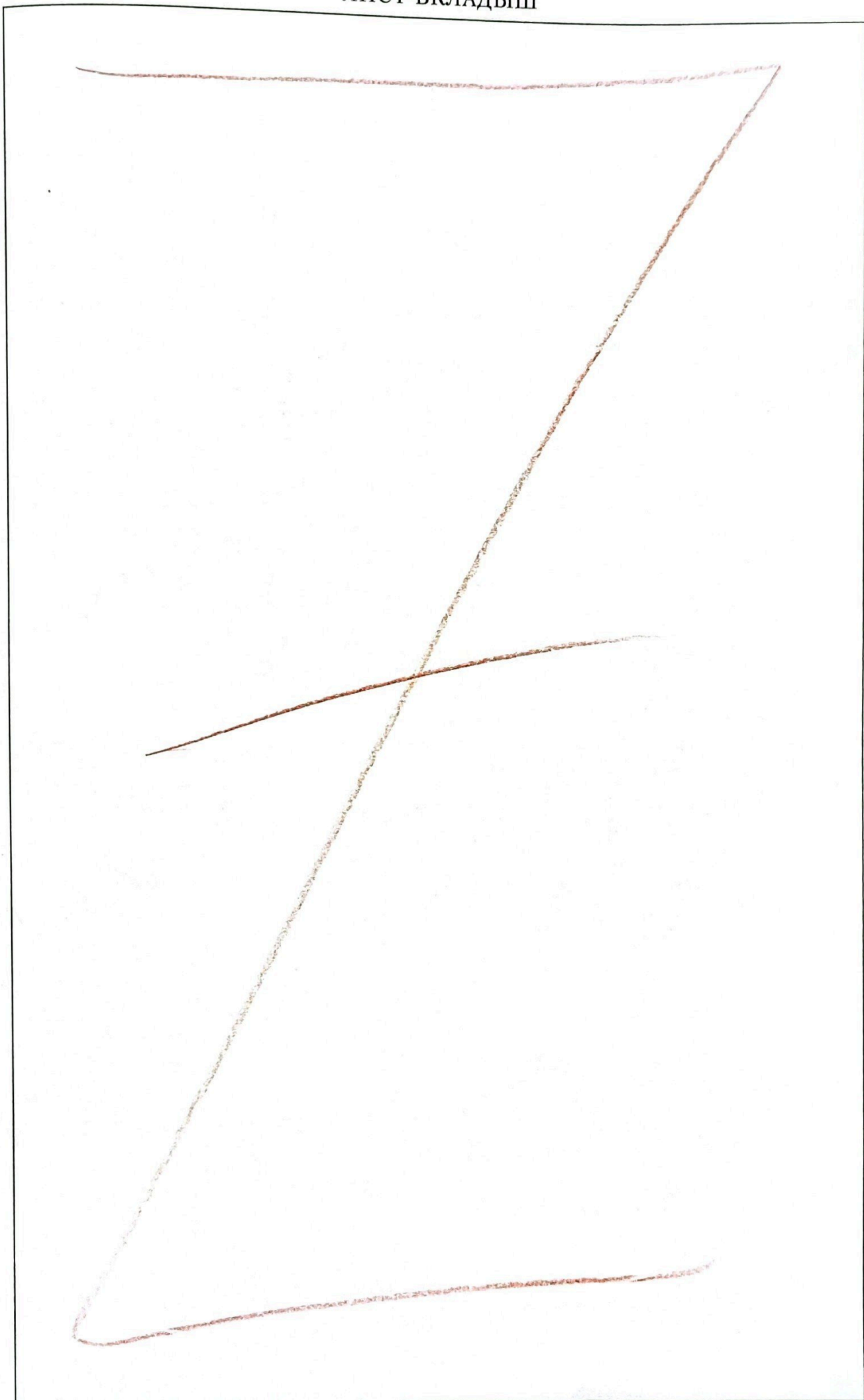
Числами

годн n:9

[Faint handwritten mathematical notes and equations, including matrix-like structures and algebraic expressions, are visible but mostly illegible due to fading and being crossed out.]

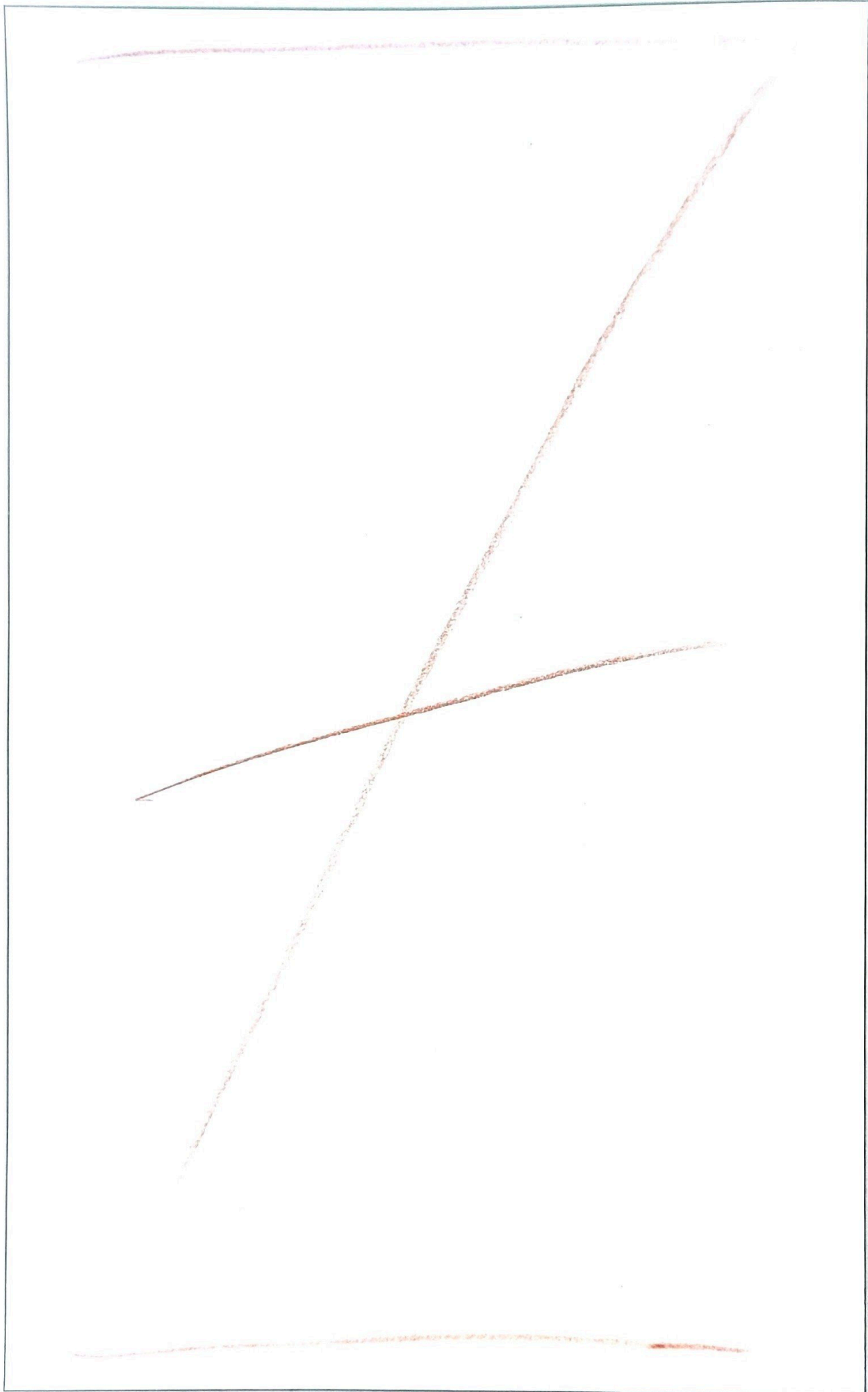
Лист 8

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!