



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 4

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Парпиевой Екатерины Станиславовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

[Подпись]

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
0	12	12	12	12	12	0	0	60

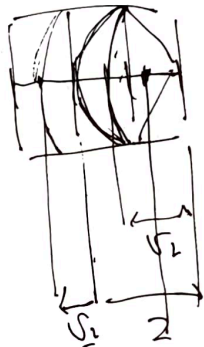
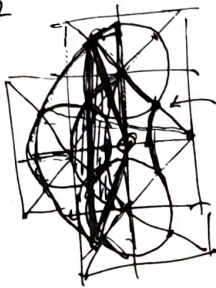
60 (младше)

Гуров Д

Чертовик

$$\begin{array}{r} \times 48 \\ 121 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ - 72 \\ \hline 49 \end{array}$$



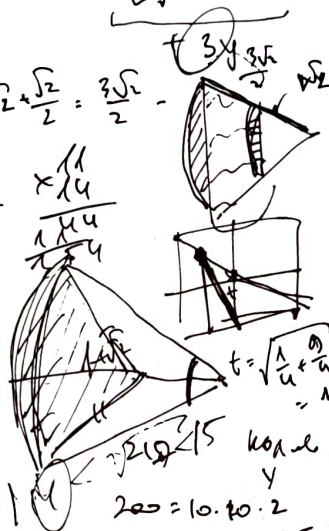
$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{26}{43}$$

$$\begin{array}{r} \times 13 \\ 16 \\ \hline 78 \\ 13 \\ \hline 208 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \times 13 \\ 15 \\ \hline 39 \\ 15 \\ \hline 165 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 14 \\ 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 15 \\ 15 \\ \hline 75 \\ 15 \\ \hline 225 \end{array}$$

1) 100 умножен.

$$\frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!}$$

2) Умножен

$$\frac{7 \cdot 6}{2} + 7 \cdot 5$$

$$\frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6}$$

3) Умножен

$$111 \dots$$

$$0 \rightarrow 2)$$

$$0 \rightarrow 3)$$

$$1 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 2$$

$$2 \rightarrow 1$$

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8

$$\begin{cases} (xy + 2x - y - 2) | y - x - 10 = (x - 4) | xy + 2x - y - 2 \\ \sqrt{y - x + 8} = y - 5 \end{cases}$$

$$y - x - 8 = y^2 - 10y + 25$$

$$y^2 - 11y + x + 17 = 20$$

$$D = (21 - 4 \cdot (x + 17)) = 13 - 4x$$

$$y_1 = \frac{11 - \sqrt{13 - 4x}}{2}$$

$$y_2 = \frac{11 + \sqrt{13 - 4x}}{2}$$

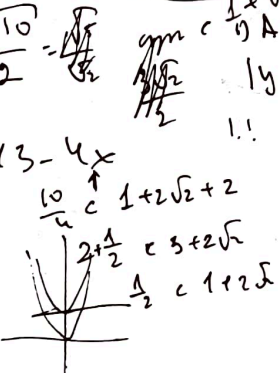
$$x = -y^2 + 11y - 17$$

$$\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$y - x \geq -8$$

$$y \geq 5$$

17/108



$$|y - x - 10| = x - 4$$

$$y - x - 10 > 0$$

$$y - x - 10 = x - 4$$

$$y - 2x - 6 = 0$$

$$y = 2x + 6$$

$$x = \frac{y - 6}{2}$$

$$y^2 - 11x + \frac{y - 6}{2} + 17 = 20$$

$$y = f(x) \quad f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$$

$$y = x^2 - 1$$

$$y = f'(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y = 1 - (0) \cdot (x - 0) = 1$$

кас в том X₀ = 0

$$y = kx + b \quad k \text{ тан}$$

$$g(k) = f(f'(x))$$

$$y = g'(x_0) - g'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$tg \alpha = -g'(x_0) = -\left(f(k(x))\right)' = (f'(t) \cdot k'(x)) = -$$

Черновик

$$4x + 66 + 27 + 6 + 47 + 28 + 51 + 16 + 24 \quad \frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$$

$$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$$

$$f(-1) = -1$$

$$f\left(\frac{1}{-3}\right) = \frac{2}{-3}$$

$$f(0) =$$

$$f(t) = 2 \cdot \frac{t+1}{t-1}$$

$$f'(t) = 2 \cdot \left(\frac{t-1+2}{t-1} \right) = 2 \cdot \left(1 + \frac{2}{t-1} \right) = 2 + \frac{4}{t-1}$$

$$f'(t) = 0 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{(t-1)^2} \cdot 1 \right) = -\frac{4}{(t-1)^2}$$

$$f(x) = f(x_0) = -f'(x) \cdot k'(x)$$

$$t = \frac{x+2}{x-2}$$

$$x-2 = \frac{x+2}{t}$$

$$tx - 2t = x+2$$

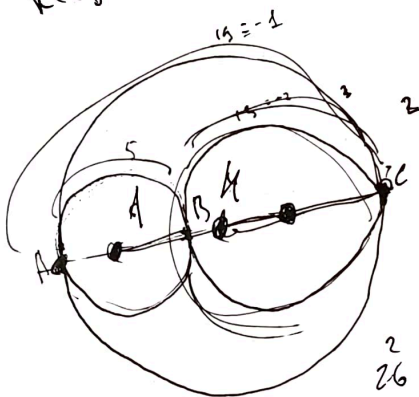
$$tx - x = 2t+2$$

$$x(t-1) = 2t+2$$

$$x = 2 \cdot \frac{t+1}{t-1}$$

$$k(x) = f_{max}$$

$$= \frac{4}{(k(x)-1)^2} \cdot k'(x)$$



$$v_{AB} = 13 \text{ km} \quad \frac{13 \text{ km}}{5 \text{ min}} = v_{AB}$$

$$v_{BC} = 2t \quad \frac{2t \text{ m}}{13 \text{ m}} = v_{BC}$$

$$v_{AC} = x \quad \frac{40 \text{ m}}{13 \text{ m}} = v_{AC}$$

$$t = 95 \text{ min}$$

$$26, 39, 52, 65, 78, 92$$

$$\frac{95}{57} = \frac{95}{57}$$

$$S = 13 \cdot a + 27 \cdot b + 40 \cdot c$$

$$l_{AB} = 2\pi r_1$$

$$l_{BC} = 2\pi r_2$$

$$l_{AC} = 2\pi(r_1 + r_2) = l_{AB} + l_{BC}$$

$$P_3 = (r_1 + r_2)$$

$$95 = 5 \cdot a + 13 \cdot b + 19 \cdot c$$

$$\begin{matrix} 3 & 1 \\ \times 5 & 1 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 6 & 1 & 1 \end{matrix}$$

кажд 5 мин.

$$C=3: 38 = 5a + 13b$$

$$b=1: 25 = 5c$$

$$b=2: 38 = 5a + 26$$

$$b=3: 48 = 5a + 39$$

$$\begin{matrix} \times 19 \\ 95 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \times 19 \\ 76 \\ \hline 19 \end{matrix}$$

$$c \neq 5 - \text{max } x$$

$$19 = 5a + 13b$$

Кисловик

Задача 1.

Для партия разберётся с закупкой картошки и картофеля (З и К)

1) Если через З и К мы универсалов (У):

$$\frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 6 + 35 = 41 \text{ вариант}$$

2) Если У нет через З, но есть 1 через К:

$$\frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 3 = 6 + 63 = 66$$

3) У нет через З, но 2 через К: $\frac{4 \cdot 3}{2} + 7 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 6 + 21 = 27$

4) У нет через З, но все через К: $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

5) У нет через К, но 1 через З:

$$4 \cdot 3 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 12 + 35 = 47$$

6) У нет через К, но 2 в З: $\frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 3 + 35 = 38$

7) 1 У в З, 1 У в К:

$$3 \cdot 3 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 2}{2} = 9 + 42 = 51$$

8) 1 У в З, 2 У в К:

$$3 \cdot 3 + 7 \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = 16$$

9) 2 У в З, 1 У в К: $\frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 1}{2} = 3 + 21 = 24$

Складывает все варианты и умножает на 2, чтобы получить одно из двух вариантов:

$$(41 + 66 + 27 + 6 + 47 + 38 + 51 + 16 + 24) \cdot 2 = 316 \cdot 2 = 632$$

Ответ: 632 варианта

Задача 3.

$$\sqrt{xy + 2x - y - 2} |y - x - 10| = (x - 4) |xy + 2x - y - 2|$$

$$\sqrt{y - x + 8} = y - 5$$

отсюда:

$$y - x + 8 \geq 0$$

$$y - 5 \geq 0$$

$$y \geq 5$$

$$y - x + 8 = y^2 - 10y + 25$$

$$y^2 - 11y + x + 17 = 0 \rightarrow x = -y^2 + 11y - 17$$

$$xy + 2x - y - 2 = A \quad A = (y + 2)(x - 1) = 0$$

1). $A = 0$

$$xy + 2x - y - 2 = 0$$

$$x(y + 2) - y - 2 = 0 \quad x(y + 2) - (y + 2) = 0$$

$$x = \frac{y + 2}{y + 2} = 1$$



Числовые

задачи 3 просят

1.1. $x=1$

$$1 = -y^2 + 11y - 17$$

$$y^2 - 11y + 18 = 0$$

$$D = 121 - 4 \cdot 18 = 121 - 72 = 49$$

$$y_1 = \frac{11 + 7}{2} = 9$$

$$y_2 = \frac{11 - 7}{2} = 2$$

Решение:

$$x=1, y=2 \text{ - не } y, y \geq 5$$

$$x=1, y=9$$

1.2. $y = -2$

$$x = -4 + 22 - 17 = -43$$

Решение:

- не $y, y \geq 5$

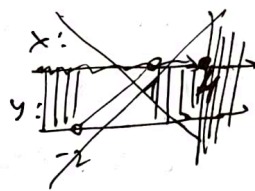
2) $A > 0$

$$\begin{cases} |y-x-10| = x-4 \\ x = -y^2 + 11y - 17 \end{cases}$$

$$(y+2)(x-1) > 0$$

$$x \geq 4$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow x \geq 4 \\ &y > -2 \end{aligned}$$



2.1.

$$y-x-10 > 0$$

$$y-x-10 = x-4$$

$$y-2x-6 = 0$$

$$y = 2x+6$$

$$x = -(2x+6)^2 + 11 \cdot (2x+6) - 17$$

$$x = -4x^2 - 24x - 36 + 22x + 66 - 17$$

$$4x^2 + 3x - 13 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 4 \cdot 13 = 9 + 208 = 217$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{217}}{8} < 0 \text{ - не } y.$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{217}}{8} < 4 \text{ - не } y.$$

2.2. $y-x-10 < 0$

$$y-x-10 = 4-x$$

$$y = 14$$

$$x \geq 4$$

$$y > -2$$

$$x = -(14)^2 + 11 \cdot 14 - 17 = -196 + 154 - 17 = -42 - 17 < 4 \text{ - не } y.$$

3) $A < 0$

$$\begin{cases} |y-x-10| = 4-x \\ x = -y^2 + 11y - 17 \end{cases}$$

$$(y+2)(x-1) < 0$$

$$y \geq 5 \Rightarrow x < 1$$

$$x < 4$$

3.1. $y-x-10 > 0$

$$y-x-10 = 4-x$$

$$y = 14$$

$$x = -(14)^2 + 11 \cdot 14 - 17 = -59$$

$$14 + 59 - 10 > 0$$

$$14 + 59 + 8 \geq 0$$

- удовлетворяет

Решение: $x = -59, y = 14$

Условие

Задан 3 точки

3.2 $y - x - 10 < 0$

$y - x - 10 = x - 4$

$y = 2x + 6$

$x = -4x^2 - 21x - 36 + 22x + 66 - 17$

$4x^2 + 3x - 13 = 0$

$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{217}}{8}$

$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{217}}{8}$

$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{217}}{8}$

$y = \frac{-3 - \sqrt{217}}{4} + 6 = \frac{21 - \sqrt{217}}{4} \approx 5$

$y = \frac{-3 - \sqrt{217}}{4} + 6 = \frac{21 + \sqrt{217}}{4} = 5 + \frac{1 + \sqrt{217}}{4} > 5$

$\sqrt{217} > 14 \Rightarrow -3 + \sqrt{217} > 11 \Rightarrow x_2 > 1$

Ответ: $x = 1, y = 9$; $x = -5, y = 14$

Задача 4.

$v_{AB} = 13 \text{ км}$

$v_{BC} = 27 \text{ км}$

$v_{AC} = ?$

$t_{AB} = 5 \text{ мин}$

$t_{BC} = 13 \text{ мин}$

$t_{AC} = 19 \text{ мин}$

$v_{AB} = \frac{2\pi \cdot r_{AB}}{2} = \pi \cdot r_{AB}$

$v_{BC} = \frac{2\pi \cdot r_{BC}}{2} = \pi \cdot r_{BC}$

A, B, C - тот касаний $\Rightarrow v_{AC} = v_{AB} + v_{BC}$

$\Rightarrow v_{AC} = \pi \cdot (r_{AB} + r_{BC}) = v_{AB} + v_{BC} = 40 \text{ км}$

Итого абсолютных проехов $a \times v_{AB}$, $b \times v_{BC}$, $c \times v_{AC}$.

Тогда общее время в минутах:

(a, b, c - время в мин.)

$95 = 5a + 13b + 19c$

Заметим, что $c \leq 5$, т.к. $19 \cdot 5 = 95$.

$c = 5$ - не уст., т.к. тогда $a, b = 0 \Rightarrow$ он едет только по

большому кругу, по 5-ми, \Rightarrow велосипедист только на вершине не спадает.

$c = 4$: $19 = 5a + 13b$ - нет решений

$c = 3$: $38 = 5a + 13b$ $b = 0$ не уст. по $\perp 5$

$b = 1$: $25 = 5a$ $a = 5$ - этот вариант возможен;

$b = 2$: $12 = 5a$ нет реш.

$b = 4$: $3b > 38$

$c = 2$: $57 = 5a + 13b$

$b = 1, b = 2, b = 3$ - не возможно по кратности остатку 5-и

$b = 4$: $57 = 5a + 52$ $a = 1$ - не уст., \Rightarrow он едет по большому кругу, и еще $a = 1$

Условия

Задача 4 продолжение: $a=1 \Rightarrow$ от него по высоте из Т.А. не начертим кругу и не заштрифуем.

(В этом случае машина не сможет вернуться в Т.А.)

$c=1: 76=5a+13b$

$b=1, 3, 4, 5$ не удовлетворяют по mod 5; ~~6~~ $6 \cdot 13 > 76$

$b=2: 76=5a+26$

$5a=50 \quad a=10$ - не удовлетворяет, машина не вернется в А.

$c=0: 95=5a+13b$

$b=0: a=19$ - не уе, машина не вернется в А

$b=1, 2, 3, 4, 6$, не уе. по mod 5; $8 \cdot 13 > 95$

$b=5: 95=5a+65$

$b=5a \quad a=6$ - не уе; $b \geq 2 \Rightarrow$ машина не сможет вернуться в А

Итак, мы получили варианты, и найдем, что он удовлетворяет условиям.

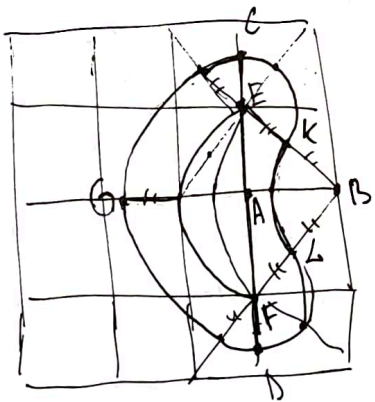
$a=5 \quad b=1 \quad c=3$

$S = 13a + 27b + 40c = 13 \cdot 5 + 27 + 40 \cdot 3 = 65 + 27 + 120 = 212$

Ответ: 212 км

Задача 2.

$\Delta r = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$S = \text{GCAD} + \text{CEK} + \text{DFL} + \text{EBF} - \text{KBL}$

$A(0;0) \quad B(1;0)$
 $\text{GCAD} = \frac{1}{2} \pi r_1^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\text{CEK} = \text{DFL} = \frac{3}{8} \pi r^2 = \frac{3}{8} \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\text{EBF} = \frac{1}{2} AB \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$

$\text{KBL} = \frac{1}{4} \pi r_2^2 = \frac{1}{4} \pi \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$r_1 = AC = AE + EC = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $r_2 = BK = EB - EK = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S = \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{4 + 4\sqrt{2} + 2}{4} + \frac{3}{4} \pi \cdot \frac{2}{4} +$

$+ 1 - \frac{1}{4} \pi \cdot \frac{2}{4} =$

$= \pi \cdot \left(\frac{12 + 8\sqrt{2}}{16} + \frac{6}{16} - \frac{2}{16}\right) + 1 =$

$= \pi \cdot \left(\frac{16 + 8\sqrt{2}}{16}\right) + 1 = \pi \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1$

Ответ:

$S = \pi \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1$

~~Задача~~: Зерновик

$S(n)$ от n крив. n .

кажд. 90-град. крив. n

$n : 8 \mid 1 \leq m \leq n$

$S(mn) = S(n)$

$n = a_1 a_2 \dots a_{90}$

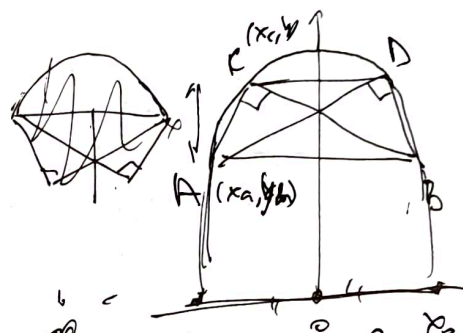
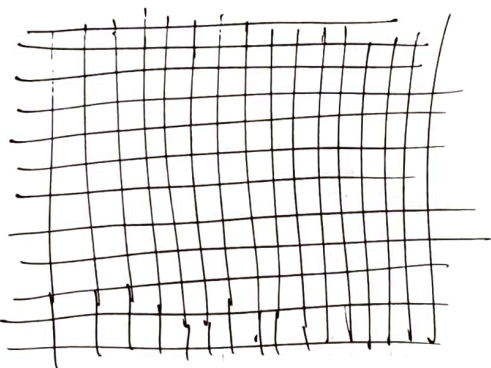
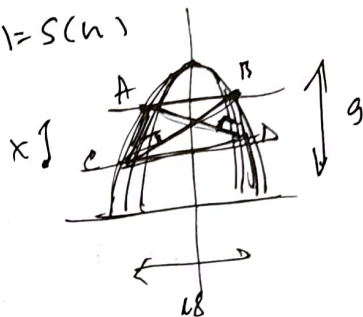
a_1, a_2, \dots, a_{90}

$S(n) = n$

$A: (1, 1, 1)$

$B: (7, 2, 11)$

$(5, 7, 5)$



~~$y = -ax^2 + b$~~

~~$y = -ax^2 + b$~~

~~$x_b = \frac{0}{2a} = 0$~~

$x_0 = 9$

~~$y_b = b$~~
 $= g$

$y = -\frac{1}{9}x^2 + 9$

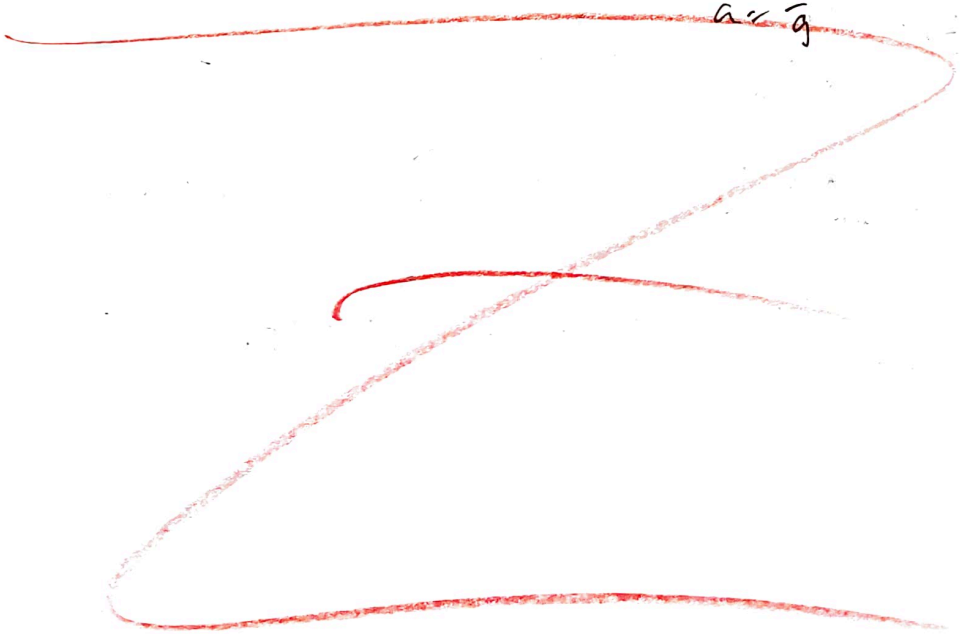
$y = -ax^2 + 9$

$0 = -a \cdot 81 + 9$

$81 \cdot a = 9$
 $a = \frac{1}{9}$

$x = \frac{296}{2} \rightarrow 4+1+8+1+2 \rightarrow 16$
 ~~592~~
 $592 \rightarrow 16$

Объём n n n , n n



Эквивалент
Задача 5.
 $y = f(x)$

$$f(x) = \frac{x+2}{x-2} = \frac{2}{x-2}$$

$$\frac{x+2}{x-2} = t$$

$$x+2 = tx-2t$$

$$x - tx = -2t - 2$$

$$x = 2 \cdot \frac{t+1}{t-1}$$

$$t \neq 1 \quad (x+2 \neq x-2)$$

$$f(t) = \frac{2}{2 \cdot \frac{t+1}{t-1} - 2} = \frac{1}{\frac{t+1}{t-1} - 1} = \frac{1}{\frac{t+1 - t + 1}{t-1}} = \frac{t-1}{2}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{2} \quad (x \neq 1)$$

Касательная к $g(x)$:

$$y = g(x_0) - g'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$x_0 = 0$$

$$\Rightarrow -g'(x_0) = \text{tg } \alpha \quad ?$$

$$g(x) = f_{12}(x) = f(f_{11}(x)) = \frac{f_{11}(x) - 1}{2} = \frac{\frac{f_{10}(x) - 1}{2} - 1}{2}$$

$$= \frac{f_{10}(x) - 1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{f_{10}(x)}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{f_9(x) - 1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{f_8(x) - 1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \dots = \frac{f_2(x)}{2^{10}} - \frac{1}{2^{10}} - \frac{1}{2^5} - \dots - \frac{1}{2^1} =$$

$$= \frac{f(x) - 1}{2^{10}} - \frac{1}{2^{10}} - \dots - \frac{1}{2} = \frac{f(x)}{2^{11}} - \frac{1}{2^{11}} - \frac{1}{2^{10}} - \dots - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{x-1}{2^{11}} - \frac{1}{2^{11}} - \dots - \frac{1}{2} = \frac{x}{2^{12}} - \frac{1}{2^{12}} - \frac{1}{2^4} - \dots - \frac{1}{2} = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2^{12}} = g'(0)$$

$$\text{tg } \alpha = -g'(0) = -\frac{1}{2^{12}}$$

Ответ: $\text{tg } \alpha = -\frac{1}{2^{12}}$

Ускорен
Задача 6 про формулу

$$k - l = t$$

$$t = \left(\frac{1}{5}t\right)^2$$

$$t = \frac{1}{81}t^2$$

$$t \neq 0$$

$$1 = \frac{1}{81}t$$

$$t = 81$$

$$k - l = 81 = x_a^2 - x_c^2$$

$$y_c - y_a = \frac{1}{5} (x_a^2 - x_c^2) = \frac{1}{5} \cdot 81 = 9$$

получается 9

Задача 7. Заметим, что если у нас на h км там и, как с тем же самым шагом идем, то шаг не меняется у нас на h км.

Рассмотрим, как меняются шаги при перемещении пешехода по дороге! одна:

0 → 0 не меня

1 × a → a - шаг увеличился на a-1

2 × 1...4 → 2a - шаг увеличился на 2a-2 = 2(a-1)

2 × 5 → 10 → 1 - шаг ↓ на 1

2 × 6 → 12 → 3 ↑ на 1

2 × 7 → 14 → 5 ↑ на 3

2 × 8 → 16 → 7 ↑ на 5

2 × 9 → 18 → 9 ↑ на 7

3 × 2 → 6 ↑ на 3

3 × 3 → 9 ↑ на 6

3 × 4 → 12 → 3 не шаг

3 × 5 → 15 → 6 ↑ на 3

3 × 6 → 18 → 9 ↑ на 6

3 × 7 → 21 → 3 не шаг.

3 × 8 ↑ на 3

3 × 9 ↑ на 6

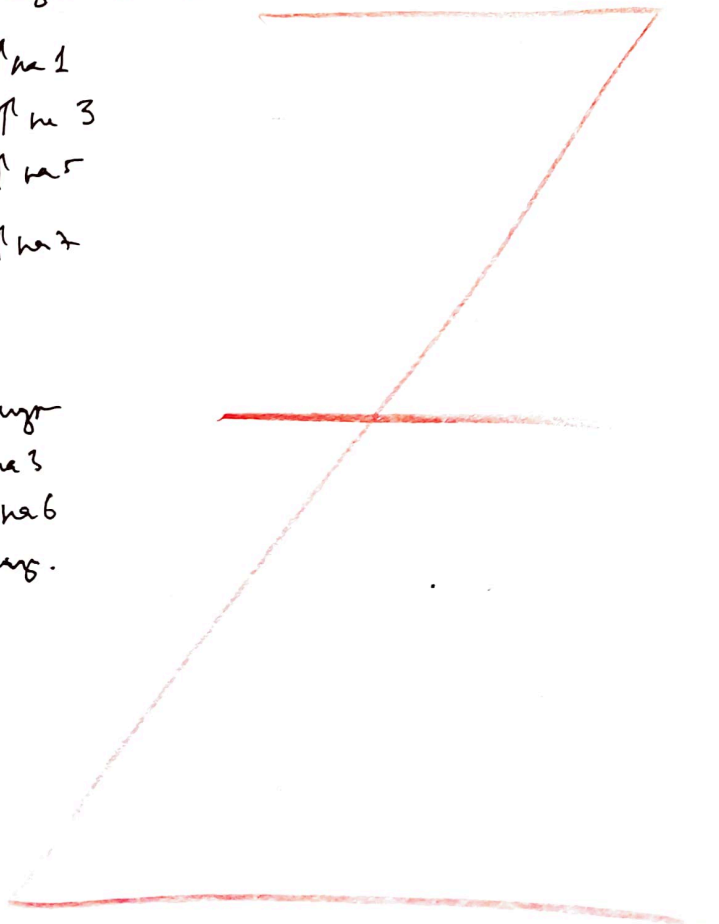
4 × 2 ↑ на 4

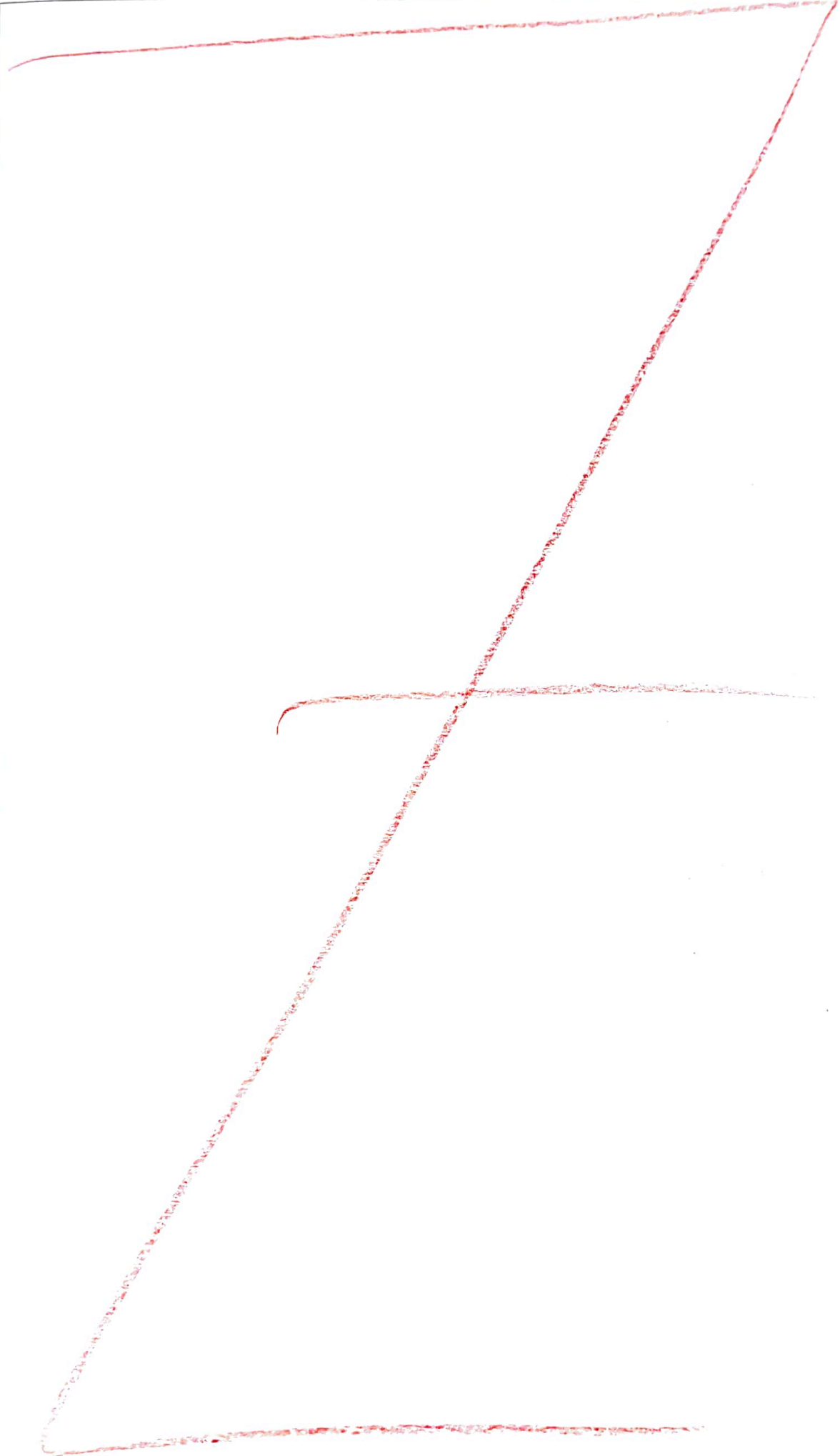
4 × 3 ↓ на 1

4 × 4 ↑ на 3

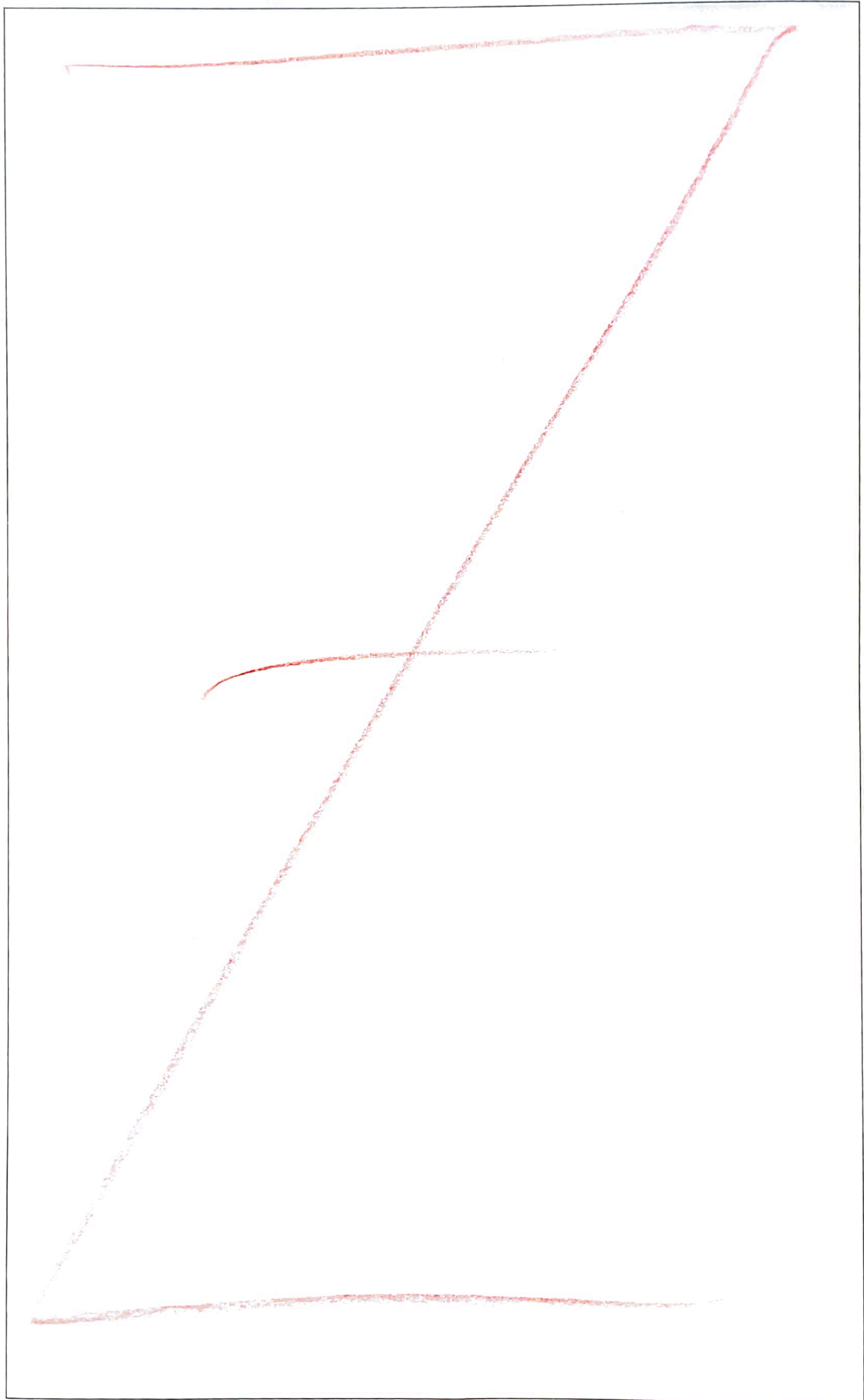
4 × 5 ↓ на 2

4 × 6 ↑ на 2





ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!