

30-75-81-24
(37.4)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант _____

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Первушиной Валентины Михайловны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

30-75-81-24
(37.4)

АКУЛА

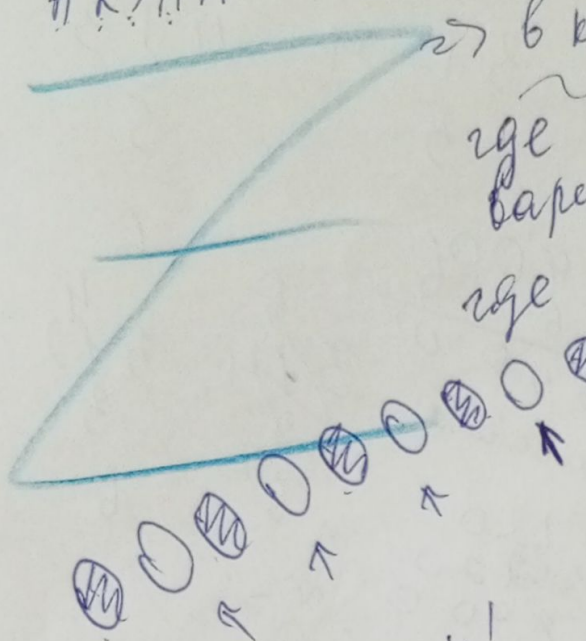
всего 4 разн. АКУЛ

Задача 1 (серновск) (сильдеят) (пять)

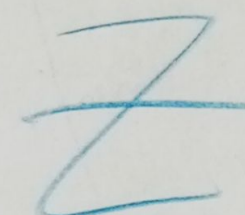
→ в каждом слове встречается А

где одна "А" → букв буквы АКУЛ
вариантов: 4!

где 2 буквы "А" → $C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot 2^2$



↑ выделяется место где будет стоять "А"
↓ выбирается две буквы из трех оставшихся (КУЛ)

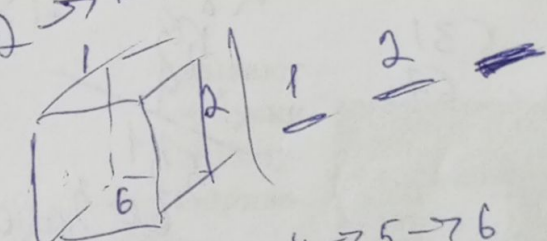
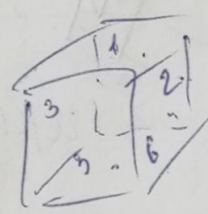
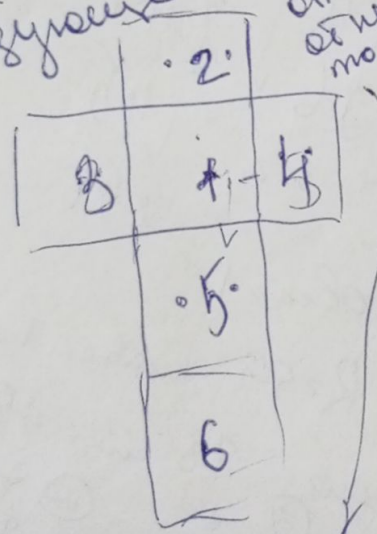


$\frac{4!}{2 \cdot 2} \cdot 6$
 $C_3^2 \cdot 2 = \frac{3! \cdot 2}{2!} = 6$

$6 \cdot 6 + 4! = 36 + 24 = 60$

Докажем что возвращает 4
поки 4 комбинации
следующее значение
отличается от предыдущего
но

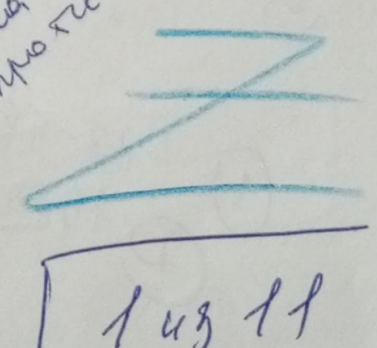
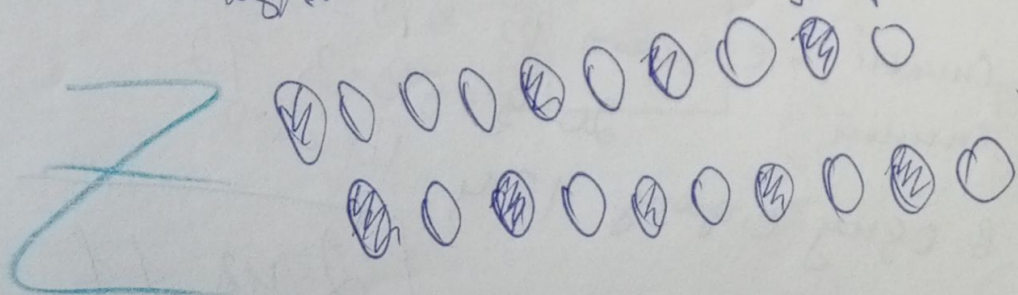
Задача 2 (перновск) Ответ: 60
лучше запоминать
кеу - кей на меньшей грани
→ когда вышала 6
2 → когда 5, потом 6



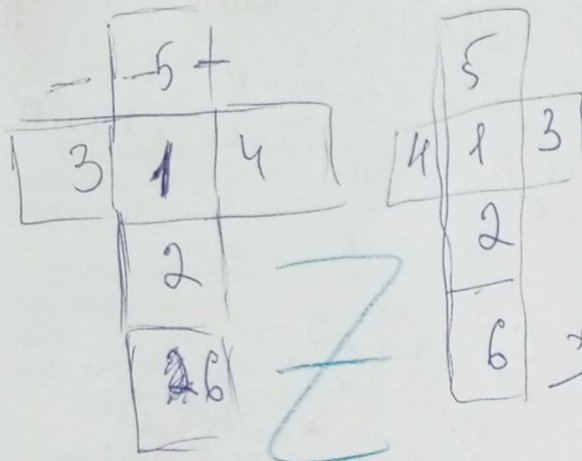
~~все буквы
2 3 4 5 6
можно сгруппировать
по парам~~
может быть 9
или больше

в этой комбинации
может быть 6
или больше
но

3 → когда 4 → 5 → 6
4 → 2 - 4 - 5 - 6
5 → 1 - 2 - 4 - 5 - 6
6 → 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6
лучше запоминать
можно переписать



Задача 2 (Серковск)

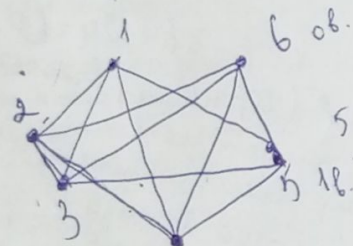


2 2
3 1 4 4 1 3
5 5

$\times 144006$
86400
Квадрат

$3 \frac{1}{2}$
 $5 \frac{1}{2}$
6

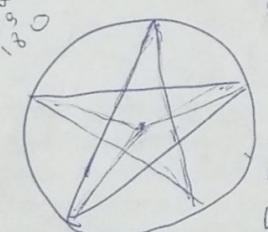
1) машина 74 456
 $29 \times 3 = 87$
 26



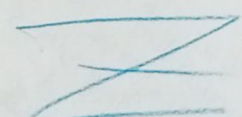
$120 \times 120 = 14400$
 2400
 120
 236
 136
 123
 124
 126
 $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$
 135
 145
 156

531
57
 $\times 9$
531
570
570

Задача 3 (Серковск)



$R=59$ кубометров
вес: 70 см 79 см
 $\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow$
 $\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow$



$T=240$ см $T=241$
 $Z=38$ шагов

1) $78-59=19$ ступай, т.е. длина
2) $79-59=20$ ступай
гн. в одну сторону 174. Пример:
 $2 \ 43 \ 11$

30-75-81-24
(37,4)

Задача 4 (Серковск)

Кубом вперед 9 см, 5 шагов.
Ступай вперед 3 см

2×19
 $\times 59$
1

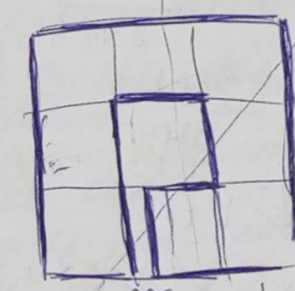
38 шагов \rightarrow 40 или 41 \leftarrow

1) Всего: $38+40=78$, \rightarrow ступай $\rightarrow 19$

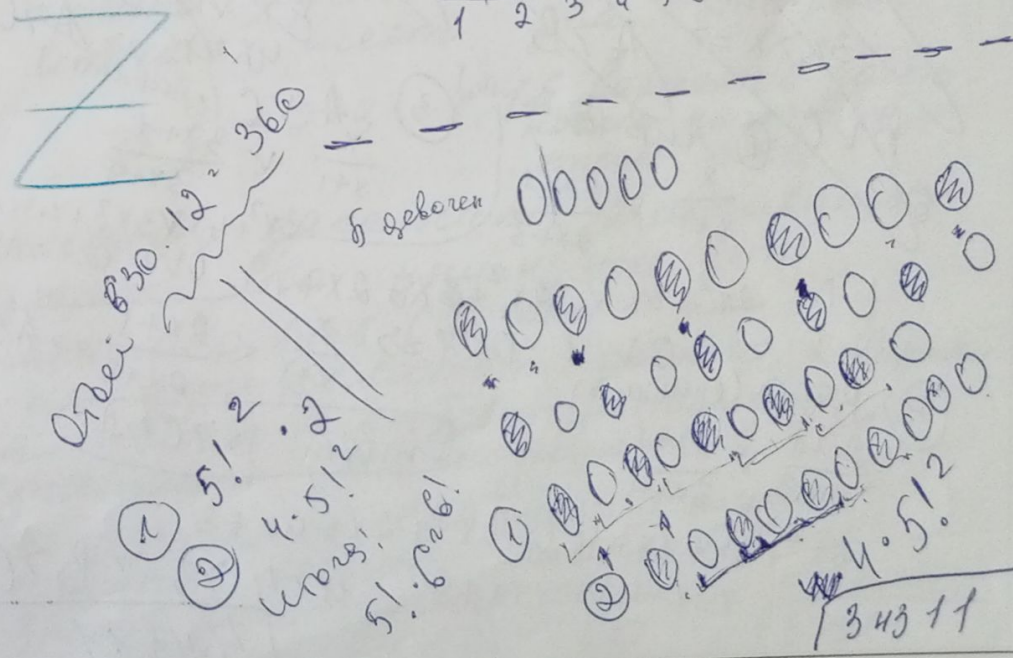
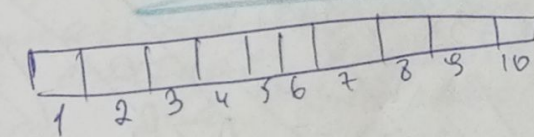
длина $19 \cdot 3 + 59 \cdot 9 = 57 + 531 = 588$ см

2) вес \uparrow 294

Пример: $3+3+3$ $\frac{58}{2}=29$
 $41 \ 30 \ 29$
8 11



Задача 15 (Серковск)
Задача 16 (Серковск)
5 девчонок Знатьево ушел.



Задача 4 (Кривошапкин)

$$A = \frac{1111 \dots 10}{111 \dots 1}$$

$$B = \frac{2222 \dots 21}{222 \dots 223}$$

$$C = \frac{333 \dots 331}{333 \dots 34}$$

$$A = \frac{111 \dots 1 \cdot 10}{111 \dots 1071}$$

Задача 7 (Кривошапкин)

Пусть $111 \dots 10 = x$

$$A = \frac{x}{x+1}$$

$$B = \frac{2x+1}{2x+3}$$

$$C = \frac{3x+1}{3x+4}$$

$$A = \frac{x}{x+1} \quad B = \frac{2x+1}{2x+3}$$

$$C = \frac{3x+1}{3x+4}$$

1) $A < B$ (сравнить)

$$\frac{x}{x+1} < \frac{2x+1}{2x+3}$$

$$2x^2 + 3x < 2x^2 + 8x + 2x + 1$$

$$0 < 1, 0 < 1 \Rightarrow \frac{x}{x+1} < \frac{2x+1}{2x+3} \Rightarrow A < B$$

2) $B < C$ (сравнить)

$$\frac{2x+1}{2x+3} < \frac{3x+1}{3x+4}$$

$$6x^2 + 3x + 8x + 4 < 6x^2 + 2x + 9x + 3$$

$$11x + 4 < 11x + 3; 4 > 3 \Rightarrow B < C$$

Ответ: $B < C < A$

30-75-81-24
(37,4)

Ответ: 60 Задача 1 (Кривошапкин)

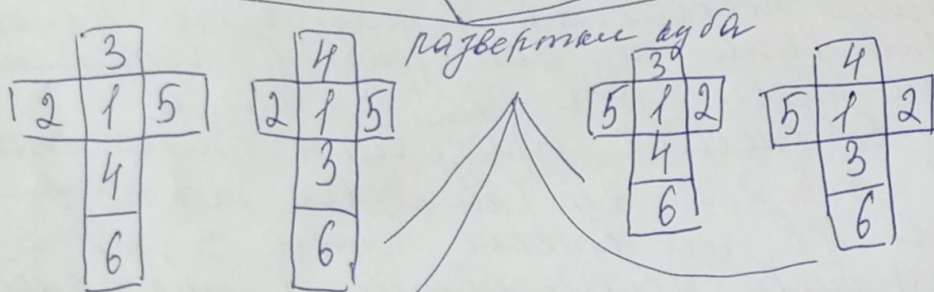
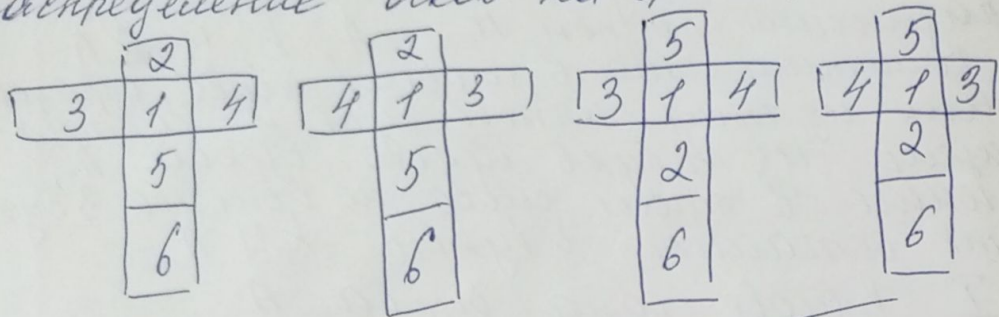
Имеется буквы: А, К, У, Л, А,
различных букв 4: А, К, У, Л
замечим, что в любом слове, образованном
из этих пяти букв и состоя-
щим из 4 букв будет буква А
менее 3 в этом слове не больше 3 букв,
так останется 3 буквы: К, У, Л,
Л. В слове одна буква А.

Тогда рассмотрим в нем всего 4 буквы,
равно одна из которых А, остальные
три буквы это: К, У, Л. Тогда
каждым способом образовать такое слово:
 $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (на первое место в
слове 4 в., на второе - уже 3, так
одну букву используем, и так далее)

II В слове две буквы А (больше быть
не может, так их всего две)
Тогда рассмотрим количество
способов выбрать из этого слова две
позиции, на которых будет стоять
буква А. Это значит, что нужно
рассчитать число способов выбрать
из четырех мест два. Это равно
 $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 2 \cdot 3 = 6$ (6 вариантов расста-
новки двух А в
этом слове)

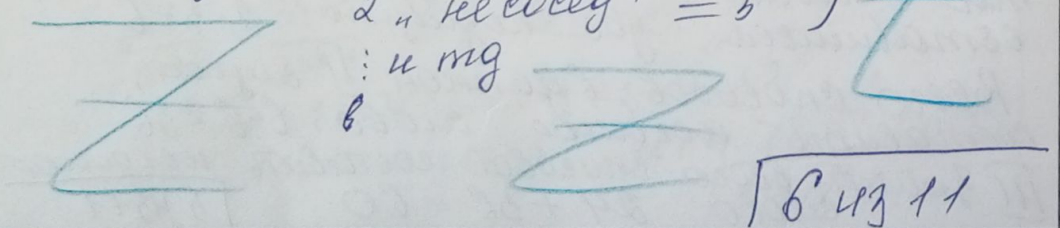
Осталось запомнить 2 оставшиеся
позиции. На одну из них есть
3 варианта букв (К или У или Л)
а на другую, соответственно, 2 вариан-
та. Число способов запомнить
оставшиеся две позиции: $2 \cdot 3 = 6$.
Всего способов, в данном II случае,
составить любое слово $6 \cdot 6 = 36$.
III значит всего способов составить любое
слово: $24 + 36 = 60$ | 5 из 11

Часть 1 Задача 2 (чистовик)
 Рассмотрим какое можно быть
 распределение очков на грани!

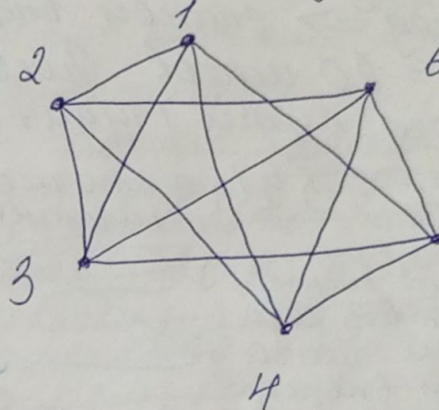


Образим граф. Пусть
 на гранях куба (тогда вершин 6)
 а две вершины соединяются ребром
 тогда, когда соответствующие грани
 куба соседние (т.е. имеют общее
 ребро). Но тогда заметим, что
 этот граф для всех разверток куба
 одинаков, тк любое ребро имеет
 4 соседа, из 5 возможных, а наименее
 «не сосед» - всегда один и тот
 же: это ~~наименьшее~~ ^{кратчайшее} ребро, которое

в сумме с данными дает 7
 (т.е. для 1 «не сосед» = 6
 2 «не сосед» = 5
 : и тд



Часть 2 Задача 2 (чистовик)
 Нарисуем этот граф
 (рядом с вершиной напишем номер
 на соответствующей грани)



Посчитаем
 число исхождений
 последовательностей
 кубик проведи
 3 раза, то
 в этой последовательности
 три шен
~~на первом месте
 не может стоять
 6 тк это наиболь-~~

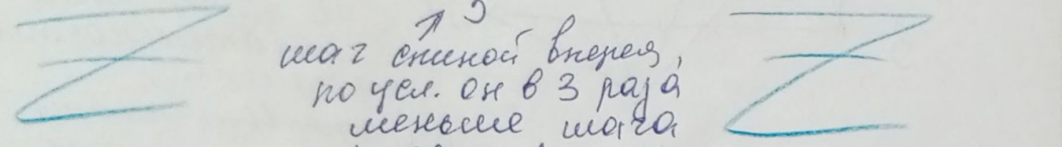
Поскольку это
 возрастающая последовательность и
 каждой новой шен обращается перека-
 тываем кубик на соседнюю грань
 (а шен на всех гранях разный)
 то в каждой такой последовательности
 будут разные шены

Это означает что первая шен
 этой последовательности не может
 быть 6 (тк это наибольшее число и
 данных, значит второй шен будет мень-
 ше него) и 5 (тк после 5 может
 быть только 6, а тогда третий
 шен будет меньше второго)

⇒ на первом месте может быть
 1, 2, 3, 4. Разберем все случаи:

- ① 1 2 3 1 3 5 1 4 5 1 5 6 всего 8
 - 1 2 4 1 3 6 1 4 6
 - 1 2 5
 - ② 2 3 5 2 4 5 всего 4
 - 2 3 6 2 4 6
 - ③ 3 5 6 всего 1
 - ④ 4 5 6 всего 1
- Ответ: 14

Часть 1) Задача 4 (Шестовик)
 Пусть обратно он налегая
 41 шаг. Тогда всего он сделал
 шагов $38+41=79$, из которых 59 - он
 шел кивком вперед \Rightarrow спиной вперед
 он сделал $79-59=20$ шагов. Посчитаем
 длину прямолинейного пути (туда+обрат-
 но): $59 \cdot 9 + 20 \cdot 9 = 591$, а это число
 нечетное

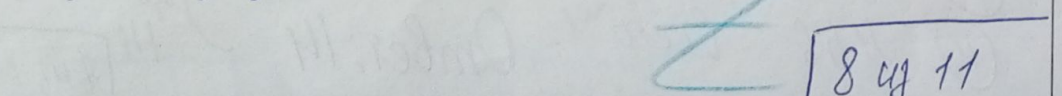
 шаг спиной вперед,
 по чел. он в 3 раза
 меньше шагов
 кивком вперед
 Но 591 см - это удвоенная длина Удава,
 (длина удава - целое число, тк его
 измерили целыми шагами шагов, а
 любой шаг по чел - целое число) \Rightarrow

$\Rightarrow 591$ должно делиться на 2.
 Противоречие \Rightarrow он мог на обратном
 пути налегать только 40 шагов

И На обратной путь затрачено 40
 шагов \Rightarrow всего шагов на весь путь
 (туда - обратно) затрачено $38+40=78$,
 из которых 59 Попугай сделал кивком,
 вперед $\Rightarrow 78-59=19$ он сделал спиной
 вперед. Посчитаем длину удава!
 (это будет меньше чем путь туда -
 обратно, тк и туда и обратно попу-
 гай проедет длину Удава):

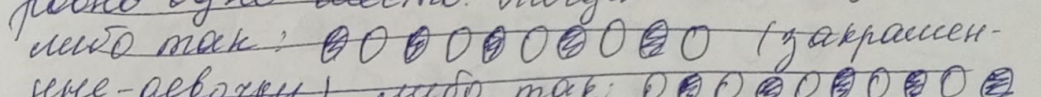
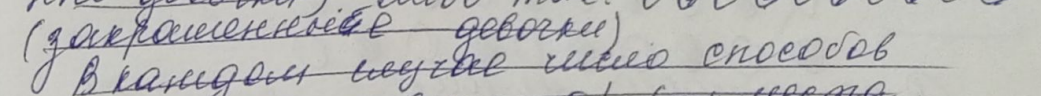
$$\frac{59 \cdot 9 + 19 \cdot 3}{2} = \frac{588}{2} = 294 \text{ см.}$$

Проверка!
 Пусть туда:
 30 шагов кивком вперед $= 30 \cdot 9 = 270 \text{ см}$
 8 шагов спиной вперед $= 8 \cdot 3 = 24 \text{ см}$
 $294 = 294 \text{ см.}$ Все верно



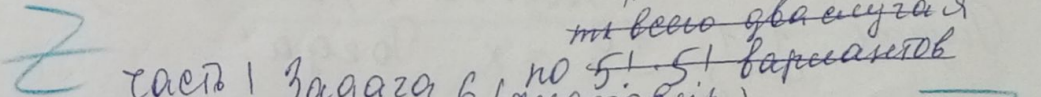
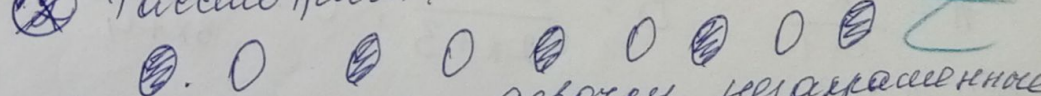
8 из 11) Часть 2, Задача 4 (Шестовик)
 Тогда обратно:
 $59-30=29$ шагов кивком вперед $= 261 \text{ см}$
 $19-8=11$ шагов спиной вперед $= 33 \text{ см}$
 $294 \text{ см} = 294 \text{ см.}$ Все верно.

Ответ: 294 см.

Часть 1, Задача 6 (Шестовик)
 Пусть между соседними девочками
 ровно одно место. Тогда: они идут
 либо так:  (закрашен-
 ные - девочки), либо так:  (закрашенные - девочки)
 В каждом случае много способов
 рассадить девочек 5! (тк места,
 которые они могут занимать -
 фиксированы), а число способов рассад-
 деть оставшихся мальчиков в каждом
 варианте ~~5!~~ $4! \cdot C_4^4 = \frac{5! \cdot 4!}{4! \cdot 1!} = 5!$

(тк осталось посадить 4 мальчика -
 мальчиков и учительницу, а мест
 осталось 5. Поэтому им из пяти
 оставшихся свободных мест ~~а~~
~~это C_5^4 , а затем санаят людей
 на эти места - $4!$ для каждого
 выбора четырех мест. Вот и
 получается $4! \cdot C_5^4$)~~

Значит всего способов посадить
 этих людей: $5! \cdot 5! \cdot 2 = 5!^2 \cdot 2$

 часть 1 Задача 6 (Шестовик)
 Рассмотрим: 

(закрашенные - девочки, незакрашенные
 другие места). Всего нарисовано
 9 мест, убрать им никакое место дево-
 чкам не можем, иначе найдется пара
 девочек между которыми нет другого места)

часть 2. Задача 6 (шестовик)
 По поскольку мест всего 10, то
 нужно добавить еще одно место
 случай. Всего способов добавить
 это место 6: ~~два из которых для~~
~~уже~~



Для каждого из них!
 число способов рассадить девочек - 5!
 число способов рассадить остальных:
 $C_5^4 \cdot 4! = \frac{5! \cdot 4!}{4! \cdot 1!} = 5!$ (поскольку

оставшиеся встроить 4 места из 5 свободных,
 это сделать есть C_5^4 способов, и
 рассадить на них 4 человека!
 $4!$ способов для каждого варианта
 четырех мест. Отсюда $C_5^4 \cdot 4!$)

значит всего способов рассадить
 людей: $5! \cdot 5! \cdot 6 = (5!)^2 \cdot 6 =$
 $= (20 \cdot 24)^2 \cdot 6 = 120^2 \cdot 6 = 86400$
 Ответ: 86400

Задача 7 (шестовик)
 Пусть $\frac{1+1 \dots 10}{2024} = x$. Тогда:

$$A = \frac{x}{x+1}; \quad B = \frac{2x+1}{2x+3}; \quad C = \frac{3x+1}{3x+4}$$

① $A < B$

$$\frac{x}{x+1} < \frac{2x+1}{2x+3}; \Rightarrow 2x^2 + 3x < 2x^2 + 3x + 1; \quad 0 < 1 \Rightarrow 0 < 1 \Rightarrow A < B$$

10 из 11

часть 2. Задача 7 (шестовик)

② $B < C$

$$\frac{2x+1}{2x+3} < \frac{3x+1}{3x+4}$$

$$6x^2 + 11x + 4 < 6x^2 + 11x + 3$$

$$4 < 3$$

$$4 > 3 \Rightarrow B > C$$

③ $A < C$

$$\frac{x}{x+1} < \frac{3x+1}{3x+4}$$

$$3x^2 + 4x < 3x^2 + 4x + 1$$

$$0 < 1$$

$$0 < 1 \Rightarrow A < C$$

итого: $A < B; A < C; B > C$, значит. $B > C > A$

Ответ: A, C, B

11 из 11