0 699648 520003

69-96-48-52
(39.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

ДЕШИФР

Вариант ____________________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

~~по~~

по математике
профиль олимпиады

Петросяна Алексана Григоровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
69-96-48-52	56	12	0	12	12	12	4	4	0

 56 (пятьдесят шесть)

лист 1

№1

Сначала посчитаем количество способов выбрать, когда в команду не берутся универсалы. Кол-во способов выбрать k игроков из n это C_n^k. Т.е:

$$C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_6^3 = 3 \cdot 10 \cdot 20 = 600$$

Пусть универсалы идут только в защитники. ~~Тогда общее кол-во:~~ Тогда на роль защитника 8 кандидатов. Т.е:

$$C_3^1 \cdot C_{\cancel{8}3}^2 \cdot C_6^3 = 3 \cdot \cancel{28}3 \cdot 20 = \cancel{1680}\ 180$$

Пусть универсалы идут только в нападающие. Тогда кандидатов на нападающие 9. Получаем:

$$C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_{\cancel{8}3}^3 = 3 \cdot 10 \cdot \cancel{84}1 = \cancel{2520}\ 30$$

Пусть универсалы входят и в защитники, и в нападающие. Тогда:

$$C_3^1 \cdot C^2$$

№1

1 сл.) В нападающие не входят универсалы. Тогда общее количество способов будет

$$C_3^1 \cdot C_8^2 \cdot C_6^3 = 3 \cdot 28 \cdot 20 = 1680$$

↑ способы выбрать вратаря

↑ способы выбрать защитника (+3 универсала)

↑ способы выбрать нападающего

лист 2.

2 сл.) В нападающие входят 1 универсал. Тогда

$$C_3^1 \cdot C_7^2 \cdot C_6^2 \cdot C_3^1 = 3 \cdot 21 \cdot 15 \cdot 3 = 2835$$

вратари

защитники (+2 универсала)

атакующие (выбрать 2 из 3 набора нападающих)

(способы выбрать 1 универсала)

3 сл.) 2 универсала. По той же логике:

$$C_3^1 \cdot C_6^2 \cdot C_6^1 \cdot C_3^2 = 3 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 3 = 810$$

4 сл.) 3 универсала:

$$C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_6^0 \cdot C_3^3 = 3 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 30$$

Общее кол-во: $1680 + 2835 + 810 + 30 = 5355$

Ответ: 5355.

№5

Ответ: 3.

$$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ac - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c} =$$

$$= \frac{bc}{a} - a + 1 + \frac{ac}{b} - b + 1 + \frac{ab}{c} - c + 1 =$$

$$= \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) - (a+b+c) + 3$$

Если докажем, что $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geqslant a+b+c$, то докажем, что выражение не меньше 3.

Доказательство:

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} = \frac{\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b}}{2} + \frac{\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}}{2} + \frac{\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c}}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2\sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ac}{b}}}{2} + \frac{2\sqrt{\frac{ac}{b} \cdot \frac{ab}{c}}}{2} + \frac{2\sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ab}{c}}}{2} = a+b+c$$

неравенство о средних

69-96-48-52 (39.3)

к лист 3.

И так, какие выражение не меньше 3.

Пример на 3:

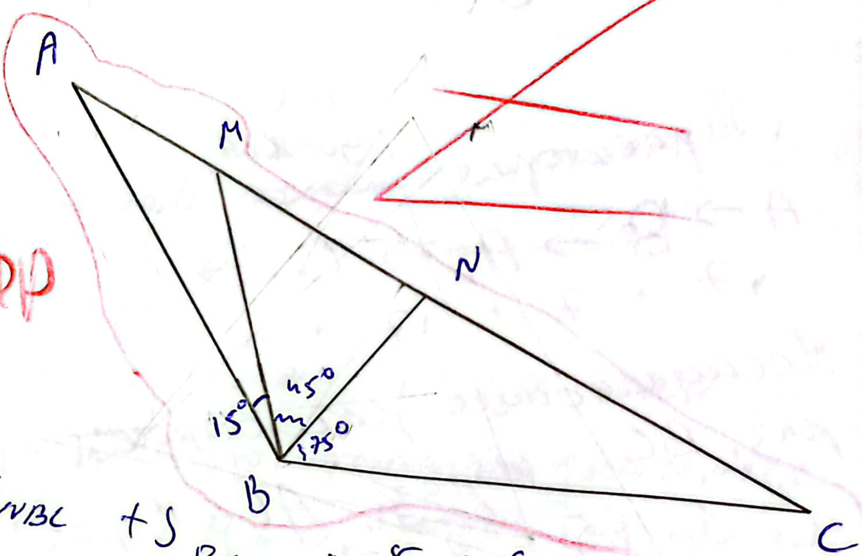
$a = b = c = 1$

$$\frac{2-2+2}{2} + \frac{2-2+2}{2} + \frac{2-2+2}{2} = 3.$$

N 4

$$\begin{cases} S_{ABM} + S_{NBC} = 5 \\ S_{ABM} \cdot S_{NBC} = 3 \end{cases}$$

ДЕШИФР



$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{NBC} + S_{BMN} = 5 + S_{BMN}$

$3 = S_{ABM} \cdot S_{NBC} = \frac{1}{4} \cdot AB \cdot BC \cdot MB \cdot BN \cdot \sin 15° \cdot \sin 75° =$

$= \frac{1}{4} AB \cdot BC \cdot MB \cdot BN \cdot \sin 15° \cdot \cos 15° = \frac{1}{4} AB \cdot BC \cdot MB \cdot BN \cdot$

$\cdot \frac{\sin 30}{2} = \frac{1}{4} \cdot AB \cdot BC \cdot MB \cdot BN \cdot \frac{1}{4}$

$AB \cdot BC \cdot MB \cdot BN = 48$

$\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 135° = S_{ABC}$

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot AB \cdot BC$

$S_{MBN} = \frac{1}{2} MB \cdot BN \cdot \sin 45° = MB \cdot BN \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$

$S_{ABC} \cdot S_{MBN} = AB \cdot BC \cdot MB \cdot BN \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{48}{8} = 6$

Получили систему:

$$\begin{cases} S_{ABC} = 5 + S_{BMN} \\ S_{ABC} \cdot S_{BMN} = 6 \end{cases}$$

Лист. 4. $S_{BMN} = S_{ABC} - 5$

$(S_{ABC} - 5) S_{ABC} = 6$

$S_{ABC}^2 - 5 S_{ABC} - 6 = 0$

По т. Виета $\left[\begin{array}{l} S_{ABC} = 6 \\ S_{ABC} = -1 \text{ (не подх.)} \end{array}\right.$

Ответ: 6.

№ 6

Траектория ~~может~~ должна быть такой:

$A \to B \to A \to C \to B \to C \to B \to C \to B \to A$

$+7 + 7 + 17 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 7 = 85$

Посчитаем общее расстояние: (AB встречалось 5 раз, BC – ~~4~~ 3 раза, AC – 1 раз).

$5 \cdot 15 + 3 \cdot 25 + 1 \cdot x = S$

найдем дугу AC длины x.

$\cup AB = \pi \cdot r_{AB}$

$\cup BC = \pi \cdot r_{BC}$

$x = \cup_{AC} = \pi \cdot r_{AC} = \pi (r_{AB} + r_{BC}) = 15 + 25 = 40$

$S = 75 + 75 + 40 = 190$ км.

Ответ: 190 км.

ДЕШИФР

a = 5 (7)
b = 3 (11)
c = 1 (17)

69-96-48-52
(39.3)

лист. 5.

№ 3

$$|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|+\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=0$$

$$\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}\le 0$$

$$\frac{|y|}{y}-\frac{|x|}{x}+2\le 0$$

$$\frac{|x|}{x}-\frac{|y|}{y}\geqslant 2$$

Значит, $\frac{|x|}{x}=1$; $-\frac{|y|}{y}=1$ (так как эти выражения принимают только значения ± 1). Т.е $x>0$; $y<0$. (Тогда $|x|=x$; $|y|=-y$.)

$$\frac{|x|}{x}-\frac{|y|}{y}=2$$

$$|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|=0$$

Т.к ~~эти~~ слагаемые неотрицательны, то они равны нулю.

$$\begin{cases} x^3+y^3-19=0 \\ x^2y+xy^2+6=0 \mid \cdot 3 \end{cases} \quad (x>0;\ y<0)$$

$$\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ 3x^2y+3xy^2=-18 \end{cases} +$$

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^2=1$$

$$(x+y)^3=1$$

$$x+y=1$$

$$y=1-x$$

Лист. 6.

$x^3+(1-x)^3=19$

$x^3+1-3x+3x^2-x^3=19$

$3x^2-3x-18=0$

$x^2-x-6=0$

$x=3;-2$

$y=-2;3$

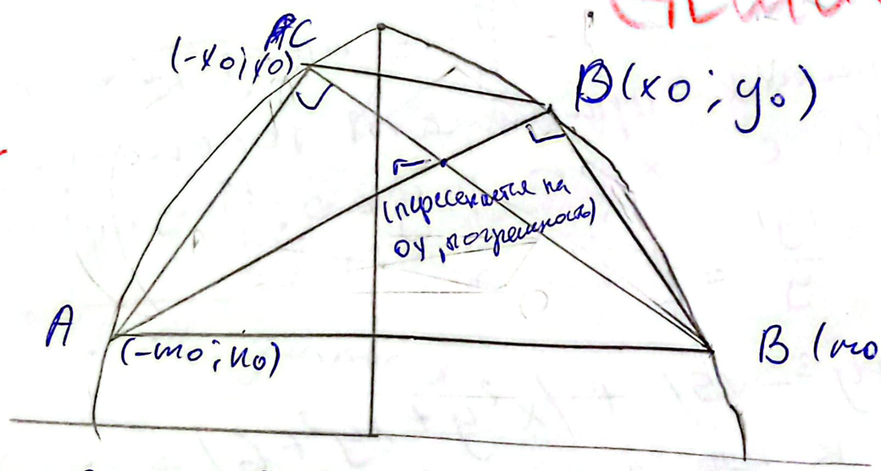
Но т.к $x>0; y<0$; то подходящая пара – $(3;-2)$.

Ответ: $(3;-2)$.

$S(u)=S(mu)$

ДЕШИФР

№2



$y=\cancel{ax^2}\ a-bx^2$

$a=18$ (по условию)

Ширина $=12$, т.е ~~корень урав~~ пересечение в точках ± 6.

$18-36b=0$

$b=0,5$ $\quad y=18-0,5x^2$

Пусть координата D $(x_0;y_0)$; B $(m_0;n_0)$

Тогда C $(-x_0;y_0)$; A $(-m_0;n_0)$

лист 7. Известно, что если ~~у пр~~ прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1.

Пусть Уравнение AD ~~k~~ $y=kx+r$.

$kx_0+r=y_0=-0{,}5x_0^2+18$

$-km_0+r=n_0=-0{,}5m_0^2+18$

Тогда уравнение BD $y=-\frac{1}{k}x+q$

$-\frac{1}{k}\cdot m_0+q=n_0=-0{,}5m_0^2+18$

$-\frac{1}{k}x_0+q=y_0=-0{,}5x_0^2+18$

~~$\begin{cases} kx_0+r=-\frac{1}{k}\cdot x_0+q \\ -km_0+r=-\frac{1}{k}\cdot m_0+q \end{cases}$~~

~~$2k(x_0-m_0)=-\frac{1}{k}(x_0-m_0)(x_0+m_0)$~~

~~$2k=-\frac{1}{k}$~~

~~$k=-2$~~

В сухом остатке имеем:

$kx_0+r=-0{,}5x_0^2+18$

$-km_0+r=-0{,}5m_0^2+18$

$-\frac{m_0}{k}+q=-0{,}5m_0^2+18$

$-\frac{x_0}{k}+q=-0{,}5x_0^2+18$

Также $r=q$ из соображений симметрии.

Лист.8. К2

$$\begin{cases} kx_0+2=-0{,}5x_0^2+18 & (1) \\ -km_0+2=-0{,}5m_0^2+18 & (2) \\ -\frac{x_0}{k}+2=-0{,}5x_0^2+18 & (3) \\ -\frac{m_0}{k}+2=-0{,}5m_0^2+18 & (4) \end{cases}$$

4 уравнения, четыре неизвестных. Можем найти все неизвестные (т.е уравнения прямых ~~После этого~~ и координаты точек пересечения. Ответом будет разность значений параболы в точке x_0 и m_0.

Остается арифметика.

$(1)-(2)$: $k(x_0+m_0)=-0{,}5(x_0-m_0)(x_0+m_0)$

$\Rightarrow k=-0{,}5(x_0-m_0)$ (5)

$(3)-(4)$: $-\frac{1}{k}(x_0-m_0)=-0{,}5(x_0-m_0)(x_0+m_0)$

$\Rightarrow -\frac{1}{k}=-0{,}5(x_0+m_0)$ (6)

~~$k=\frac{1}{k}$~~ ~~$x_0^2-m_0^2$~~

$(5)\cdot(6)$: $(x_0^2-m_0^2)\frac{1}{4}=-1$

$x_0^2-m_0^2=-4$