0 784544 490007

78-45-44-49
(40.52)

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3

Место проведения Москва
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Пирогова Николая Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 4 | 8 | 4 | 12 | 8 | 0 | 8 | 56 |

78-45-44-49 (40.52)

Черновик

$$\begin{cases}(xy+4x-y-4)\,|y-x-8| = (x-4)\,|xy+4x-y-4| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3\end{cases}$$

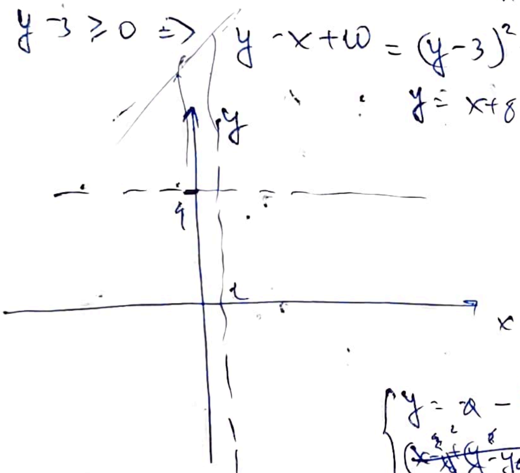
$(x-1)(y-4) = xy-4x-y-4$

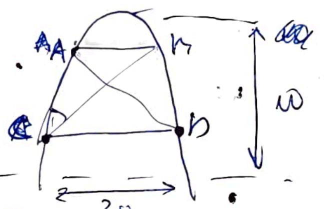
$(x-1)(y-4)\,|y-x-8| = (x-4)\,|x-1|\,|y-4|$

$y-3 \geq 0 \Rightarrow y-x+10 = (y-3)^2 \Rightarrow y-x+10 = y^2-6y+9$

$y = x+8$ $\quad y^2-7y-1 = -x$

$x = -y^2+7y+1$





$$\begin{cases}y = a-bx^2 \\ \cancel{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2} \\ x^2+(y-y_0)^2 = r^2\end{cases}$$

~~$x_1 - x_2 =$~~

$a-bx^2 = 0$

$\frac{a}{b} = x^2$

$\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$

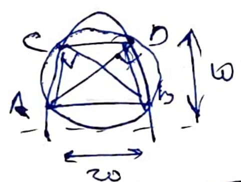
$2\sqrt{\frac{a}{b}} = 20$

$a = 10$

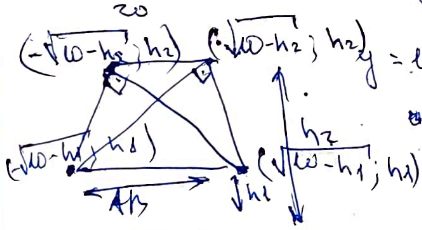
~~$a-b$~~

$\sqrt{\frac{a}{b}} = 10$

$b = 1$



$$\begin{cases}y = 10-x^2 \\ x^2+(y-y_0)^2 = r^2\end{cases}$$



$y = 10-x^2$

$h_1 = 10-x^2$

$x^2 = 10-h_1$ $\quad x = \pm\sqrt{10-h_1}$

$AB =$

$(2\sqrt{10-h_1})^2 = (h_2-h_1)^2+(\sqrt{10-h_1}-\sqrt{10-h_2})^2 + (h_2-h_1)^2 + (\sqrt{10-h_1}-\sqrt{10-h_2})^2$

$4(10-h_1) = 2(h_2-h_1)^2 + 2(10-h_1+10-h_2-2\sqrt{10-h_1}\sqrt{10-h_2})$

$40-4h_1 = 2h_2^2+2h_1^2-4h_1h_2 + 40-2h_1-2h_2-2\sqrt{\ }\sqrt{\ }$

$h_2^2+h_1^2-2h_1h_2+h_1-h_2 = \sqrt{10-h_1}\sqrt{10-h_2}$

$(h_2+h_1+1)(h_1-h_2)$

$$\begin{array}{r}\times\,56 \\ 3 \\ \hline 168\end{array}$$

$(60+25)$ мин $= 75$ мин

$7+11+17 = 17+18 = 35$

$50+35 = 85$

~~Чистовик~~ Черновик

№1 I. Допустим среди защитников не окажется ни одного „универсала":

Тогда количество вариантов выбора: вратаря: 2

двух защитников: $C_5^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

трёх нападающих: $C_9^3 = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$

То есть всего количество комбинаций равно $2 \cdot 10 \cdot 84 = 1680$

~~II. Допустим, что среди защитников окажется только один „универсал": вратарь: 2~~

~~двух защитников: $C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$~~

~~трёх нападающих: $C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$~~

~~Всего количество комбинаций равно $2 \cdot 15 \cdot 56 = 30 \cdot 56 = 1680$~~

~~III. Допустим, что среди защитников окажется только два „универсала":~~

~~вратарь: 2~~

~~защитник: $C_7^2 = \frac{7!}{5! \, 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21$~~

~~трёх нападающих: $C_7^3 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$~~

$\frac{3!}{3! \cdot 1} = 3$

21

Всего количество комбинаций равно:

$21 \cdot 35 \cdot 2 = 21 \cdot 7 \cdot 10 =$

$C_7^3 = \frac{7!}{4! \, 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!}$

$2 \cdot 5 \cdot 56 = 3 \cdot \cancel{560} =$ $560 \times 3 = 1680$ $\quad 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$

$(x-1)(y-4) + y - x - 8| = (x-4)|x-1|$ $\quad 1680 \cdot 2 = 3360$

$y^2 - 6y + 9 = y - x + 10$ $\quad 3360 + 210 = 3570$

$x = 7y + 1 - y^2$ $\quad 12 \times 7 = 84$

~~$(x-1)(7y+$~~

$(7y + \cancel{1} - y^2 - \cancel{1})(y-4)|y - 7y - 1 + y^2| = (7y + 1 - y^2)|$

$y(7-y)(y-4)|\cancel{y - 7y - 1} - 6y - y^2 - 9| = (7y + 1 - y^2)|y|$

$y^2 - 13y - 12$ $\quad 15^2 = 100 + 100 + 25 = 225$ $\quad x_1 x_2 = -4$

$y^2 - 2$ $\quad 3(1+\sqrt{2}) \vee 7$ $\quad x_1 + x_2 = 6$ $\quad |7-y||y-4|$

$3 \pm \sqrt{9+4} = 3 \pm 3\sqrt{2}$

$1 + 12 - 12$ $\quad 3\sqrt{2} \vee 4$ $\quad 18 > 16$ $\quad 2\sqrt{3}$ $\quad 3^2 - 14 = -5$

$169 + 48 = 217$ $\quad \frac{13 + \sqrt{217}}{4} \vee 7$ $\quad \cancel{(y - 3 + \sqrt{3})}$ $\quad (y - 3(1+\sqrt{2}))$

$13 + \sqrt{217} \vee 21$ $\quad \sqrt{217} \vee 15$ $\quad (y+3$

Чистовик:

№1 Если среди защитников нет ни одного „универсала", то количество комбинаций $I_1 = \underbrace{2}_{вр.} \cdot \underbrace{C_5^2}_{защ.} \cdot \underbrace{C_9^3}_{нап} = 2 \cdot 10 \cdot 84 = 1680$

Если среди защитников ровно один „универсал", то количество комбинаций $I_2 = \underbrace{2}_{вр} \cdot \underbrace{3 \cdot C_5^1}_{защ} \cdot \underbrace{C_8^3}_{нап} = 2 \cdot 15 \cdot 56 = 560 \cdot 3 = 1680$

Если среди защитников ровно два „универсала", то количество комбинаций $I_3 = \underbrace{2}_{вр} \cdot \underbrace{C_3^2}_{защ.} \cdot \underbrace{C_7^3}_{нап} = 2 \cdot 3 \cdot 35 = 210$

Значит всего комбинаций может быть:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 1680 + 1680 + 210 = 3570$$

Ответ: 3570

№3

$$\begin{cases} (xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4| \quad (2) \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \quad (1) \end{cases}$$

(1): $\sqrt{y-x+10} = y-3 \ \uparrow^2$

$$\begin{cases} y-3 \geq 0 \\ y-x+10 = y^2-6y+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y^2+7y+1 \\ y \geq 3 \ (*) \end{cases}$$

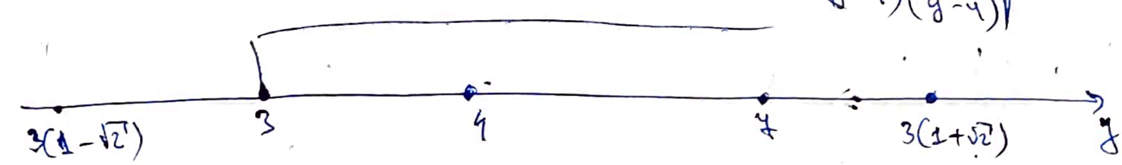
(2):

$(x-1)(y-4)|y-x-8| = (x-4)|(x-1)(y-4)|$

$(-y^2+7y+\cancel{1-1})(y-4)|y-8+y^2-7y-1| = (-y^2+7y+1-4)|(-y^2+7y+1-1)(y-4)|$

$-y(y-7)(y-4)|y^2-6y-9| = -(y^2-7y+3) \cdot |y \cdot (y-7)(y-4)|$

$y(y-7)(y-4)|y^2-6y-9| = (y^2-7y+3)\,\underbrace{y}_{\geq 0 \text{ в силу } (*)}|(y-7)(y-4)|$




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $(y^2-6y-9)$ | − | − | − | + |
| $(y-7)(y-4)$ | + | − | + | + |
| | (I) | (II) | (I) | (III) |

(I) $y \in [3;4] \cup [7; 3(1+\sqrt{2})]$:

$\underbrace{y}_{>0 \text{ в силу ор } (*)}(y-7)(y-4)\left((y^2-7y+3) - (-y^2+6y+9)\right) = 0.$

$$\left[\begin{aligned} & y = 7 \\ & y = 4 \\ & 2y^2-13y-6 = 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} & y = 7 \ \checkmark \\ & y = 4 \ \checkmark \\ & y = \frac{13 \pm \sqrt{169+4\cdot 12}}{4} \end{aligned}\right.$$

не подходит, т.к. $\frac{13-\sqrt{169+4\cdot 12}}{4} < 0$, $9 < \frac{13+\sqrt{217}}{4} < 7$

Чистовик (продолжение задачи 3)

(II): $y \in (4;7)$:

$$\underbrace{(y-7)(y-4)}_{\neq 0 \text{ на данном промежутке}}(y^2-6y-9) = (y^2-7y+3)\underbrace{(y-7)(y-4)}_{\neq 0}$$

$$(y^2-6y-9)-(y^2-7y+3)=0$$

$-6y-9+7y-3=0 \Rightarrow y=12$ × ← не подходит под ограничения

(III): $y \in (3(1+\sqrt{2});+\infty)$:

$$\underbrace{(y-7)(y-4)}_{\neq 0}(y^2-6y-9) = (y^2-7y+3)\underbrace{(y-7)(y-4)}_{\neq 0}$$

$$\cancel{y^2}-6y-9=\cancel{y^2}-7y+3$$

$-6y-9+7y-3=0 \Rightarrow y=12$ ✓ $\quad 12 \vee 3+3\sqrt{2}$

↑ подходит. $\quad 9 \vee 3\sqrt{2}$

$\quad 81 > 18$

Подставим в ур-е (1):

$$\begin{cases} x=-y^2+7y+1 \\ \left[\begin{array}{l} y=12 \\ y=7 \\ y=4 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-144+84+1=-59,\ y=12 \\ x=-49+49+1=1,\ y=7 \\ x=-16+28+1=13,\ y=4 \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(13;4);(1;7);(-59;12)\}$.

№5

$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\frac{1}{x+1} \Rightarrow \left(\text{т.к. } \frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}=1-2\cdot\frac{1}{x+1}\right)$

$\left\| t=\left(\frac{1}{x+1}\right)\right\| \Rightarrow f(1-2t)=-t \Rightarrow \left\| \alpha=1-2t \Rightarrow -t=\frac{\alpha-1}{2}\right\| \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\alpha)=\frac{\alpha-1}{2} \Rightarrow \|\alpha=x\| \Rightarrow f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2} \Rightarrow f(f(x))=\frac{x}{4}-\frac{3}{4} \Rightarrow f(f(f(x)))=$

Отсюди следует, что ~~f(f(x))~~ $\quad = \frac{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)}{4}-\frac{3}{4}=$

$\underbrace{f(f(\ldots f(x)}_{k \text{ раз}}\ldots))= \quad =\frac{x}{2\cdot 4}-\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{3}{4}=$

$=\frac{x}{8}-\frac{7}{8}$

т.к. $\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{k \text{ раз}}=$

$=\underbrace{f(f(\ldots f(\tfrac{x}{2}-\tfrac{1}{2})))}_{k-1 \text{ раз}}$

$\underset{(*)}{=}\frac{x}{2^k}-\frac{2^k-1}{2^k} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=g'(0)=$

тангенс угла накл. кас. в точке

Черновик

$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$

$f\left(1 - \frac{2}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$

$f(\underbrace{1-2t}_{\alpha}) = -t$ $\quad \alpha = 1 - 2t \Rightarrow -t = \frac{\alpha-1}{2}$

$f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{2}$ $\quad f(f(\alpha)) = \frac{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)-1}{2} = \frac{\alpha-1-2}{4} = \frac{\alpha-3}{4}$

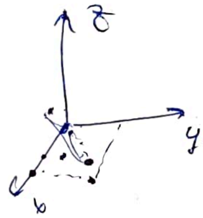
$f(f(f(\alpha))) = \frac{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)-3}{4} = \frac{\alpha-1-6}{8} = \frac{\alpha-7}{8}$ $\quad \left(\frac{\alpha-1}{2}\right) - 7 = \frac{\alpha-1-14}{2}$

$\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}$ $\quad \frac{\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{4} - \frac{3}{4}$

$\frac{\alpha}{8} - \frac{7}{8}$ $\quad \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$

$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\Big|_{x=1} = f(0) = -\frac{1}{2}$

$\frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)}{2} - \frac{1}{2}$




(0;0;0)
(6;8;1)
(4;2;4)

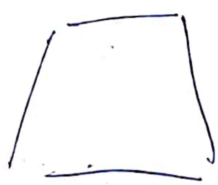
$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{i}\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\right| =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(8\cdot4-2)^2 + (24-4)^2 + (6\cdot2-8\cdot4)^2} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{30^2 + 20^2 + 20^2} = 5\sqrt{3^2+2^2+2^2} =$

$20 \quad = 5\cdot\sqrt{9+8} =$

$= 5\sqrt{17}$



Черновик (продолжение задачи 5)

$= \left(\frac{x}{2^9} - \frac{2^9-1}{2^9}\right)'\Big|_{x=0} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$

(*): После каждой итерации ~~функция~~ коэффициент уменьшается вдвое, а свободный коэффициент уменьшается на себя же, уменьшенного в два раза.

Ответ: $\frac{1}{512}$

№8

Перейдём в другую декартову систему координат, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют правую тройку и сонаправлены ортам в предыдущей системе координат, а начало координат перенесём в точку $(-5;-5;-5)$

Тогда вершины треугольника будут иметь следующие координаты:

$(-5;-5;-5) \to (0;0;0)$

$(1;3;-4) \to (6;8;1)$

$(-1;-3;-1) \to (4;2;4)$

Тогда уравнение плоскости для этих трёх точек:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 6-0 & 8-0 & 1-0 \\ 4-0 & 2-0 & 4-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$x(32-2) - y(24-4) + z(12-32) = 0$

$x \cdot 30 - 20y - 20z = 0 \Rightarrow y = \frac{3x-2z}{2} = \frac{3}{2}x - z$

Проверим все комбинации координат $(x; z)$, где $x \in \{0, 1, 2; 3; 4; 5; 6\}$, $z \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Из уравнения для $y$ видно, что подходят только чётные $x$, а сами $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

$x=0, z=0 \Rightarrow y=0$ ✓

$x=0; z=1 \Rightarrow y=-1$ ✗

Для $x=0$ нужны только неотрицательные $z$, чтобы $y \geq 0$

$x=2, z=0 \Rightarrow y=3$ ✓

$x=2; z=1 \Rightarrow y=2$ ✓

$x=2; z=2 \Rightarrow y=1$ ✓

$x=2; z=3 \Rightarrow y=0$ ✓ остальные $z$ при $x=2$ не подходят

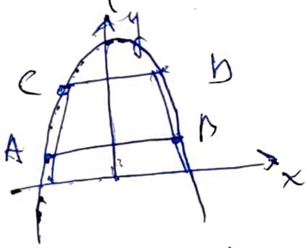
Черновик (продолжение задачи 8)

$$5\begin{cases} x=4,\ z=0 \Rightarrow y=6\ V \\ x=4,\ z=1 \Rightarrow y=5\ V \\ x=4,\ z=2 \Rightarrow y=4\ V \\ \vdots \\ x=4,\ z=4 \Rightarrow y=2\ V \end{cases} \qquad 4\begin{cases} x=6,\ z=0 \Rightarrow y=9\ X \\ x=6,\ z=1 \Rightarrow y=8\ V \\ x=6,\ z=2 \Rightarrow y=7\ V \\ \vdots \\ x=6,\ z=4 \Rightarrow y=5\ V \end{cases}$$

№ 6

Заметим, что если подставим эле. параболы её характерные величины: $y = a - bx^2 \Rightarrow \begin{cases} a = \text{верш} \\ 2\sqrt{\frac{a}{b}} - \text{расстояние между её двумя корнями} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ 2\sqrt{\frac{a}{b}} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{y = 10 - x^2}$$




Рассмотрим трапецию ABDC ($AB \parallel CD$, $AC \nparallel BD$)

Пусть т. A имеет координату по x равную $-x_A$, а

т. B тогда имеет координату $x_B = x_A$

Аналогично $C: -x_C$, а $D: x_C = x_D$

Запишем т. Пифагора для $\Delta ACB$:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 \Rightarrow (2x_A)^2 = \left((x_A - x_C)^2 + \left((10 - x_A^2) - (10 - x_C^2)\right)^2\right) + \left((x_A + x_C)^2 + \left((10 - x_A^2) - (10 - x_C^2)\right)^2\right)$$

$$4x_A^2 = 2x_A^2 + 2x_C^2 + 2\cdot(x_A^2 - x_C^2)^2 \quad |:2$$

$$x_A^2 = x_C^2 + x_A^4 - 2x_A^2x_C^2 + x_C^4$$

$$(x_A^2 - x_C^2)^2 - (x_A^2 - x_C^2) = 0$$

$$(x_A^2 - x_C^2)(x_A^2 - x_C^2 - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_A^2 = x_C^2 \quad X, \text{ т.к. в таком случае не существует AB и CD по отдельности} \\ x_A^2 - x_C^2 = 1 \Rightarrow \text{(т.к. } h_A = 10 - x_A^2, \text{ а } h_C = 10 - x_C^2\text{) то } h_C - h_A = x_A^2 - x_C^2 = \underline{1} \end{array}\right.$$

Ответ: 1

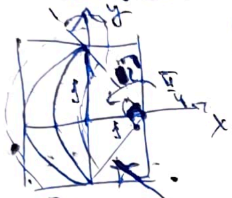
№ 2 Заметим, что при мысленном крышки фигура получается следующего вида:

где полоса представляют у себя полуокружности радиуса $\left(\frac{1}{3}\right)$, а оставшаяся часть —

Условия (продолжение задачи №2)

это „полумесяц", у которого 2, под которым видно его из точки $(1;0)$ тот же, но радиус большей части окружности увеличился на $\left(\frac{1}{3}\right)$, а радиус меньшей части уменьшился на $\left(\frac{1}{3}\right)$.

Т.е.



Т.е. ~~сегмент~~ сектор большей и с радиусом $\sqrt{2}$ стал равняться

$$S_{\text{меньш}} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{4}.$$

~~А больший стал равен $S_{\text{больш}} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2}$~~

Уравнение меньшей окружности стало:

$x^2+y^2 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^2$, а уравнение этой прямой:

$y = 1 - x$;

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2 = \frac{16}{9} \\ y+x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1-2xy \\ x^2+y^2 = \frac{16}{9} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 2xy = \frac{16}{9} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy = -\frac{7}{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{23}}{6} \\ y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{23}}{6} \end{cases}.$$

Тогда угол $\alpha$ для большего сектора равен:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{23}}{6}}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{23}}{6}}\right)$$

Тогда $S_{\text{больш}} = \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{23}}{6}}{\frac{\sqrt{23}}{6}-\frac{1}{2}}\right) =$

$$= \frac{16}{9} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{3+\sqrt{23}}{\sqrt{23}-3}\right)$$

$$S_{\text{доп}} = \pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{9}$$

$$S_\Sigma = S_{\text{больш}} - S_{\text{меньш}} + S_{\text{доп}} = \frac{\pi}{9} + \frac{16}{9}\operatorname{arctg}\left(\frac{3+\sqrt{23}}{\sqrt{23}-3}\right) - \left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $\frac{\pi}{9} + \frac{16}{9}\operatorname{arctg}\left(\frac{(3+\sqrt{23})}{(\sqrt{23}-3)}\right) - \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)^2$.

Черновик:

$\lambda^2 - \lambda + \frac{25}{18} = 0$

$D = 1 - 4 \cdot \frac{25}{18} = 1 -$

$1 - 2xy = \frac{16}{9}$

$2xy = 1 - \frac{16}{9}$

$2xy = -\frac{7}{9}$

$\lambda^2 - \lambda - \frac{7}{18} = 0$

$D = 1 + 4 \cdot \frac{7}{18} = 1 + \frac{14}{9} =$

$= \frac{23}{9}$

$\lambda = \frac{1 \pm \frac{\sqrt{23}}{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{23}}{6}$

$\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{23}{36}$

~~Ч~~ Черновик

## №4

Заметим, что если двигаться вдоль одной окружности, то при возвращении в начальную точку можно проехать только четное количество минут.
Значит хотя бы раз автомобиль был на одной из двух внутренних окружностей, а чтобы он вернулся потребуется, чтобы он был на всех трех внутренних дугах хотя бы один раз:
Т.е. 1 час 25 мин = 85 мин, 85 мин − (7+17+11) мин = 50 мин он был ~~на~~ на вторую какой-либо маршрут.
Попробуем 50 мин представить в виде следующей суммы: 50 мин = $(7 \cdot A + 11 \cdot B + C \cdot 17)$ мин, где $A, B, C \in \mathbb{N}_0$. Заметим, что 50 дает $a$ 5 при делении на 9, а $7 \equiv -2 \mod(9)$,
$11 \equiv 2 \mod(9)$
Рассмотрим случаи когда в разложение входит 17: $17 \equiv -1 \mod(9)$

~~$2 \cdot 17 + 11 = 34 + 11 = 45$~~

Заметим, что число 5 мы можем получить либо как $2+2+2-1$, либо как

$+7+11+11+11+11-17 = 44-10$