

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Глатерова Рачана Викторовна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

35-39-78-81

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Подпись	Расшифровка подписи
4+	3+	12'	12'	12+	8'	0	0	56		Ч.Б.Кли
										Глатерова Рачана Викторовна

Церковна

35-39-78-81
(43.4)

(22)

$$\begin{cases} (xy - 3 + 3x - y) | y - x - 9 | = (x - 4) | xy - 3 + 3x - y | \\ \sqrt{y - x + 9} = y - 4 \end{cases} \quad (*)$$

(23)

$$xy - 3 - 3x - y = y(x - 1) + 3(x - 1) = (x - 1)(y + 3) = 0$$

230

$$(x - 1)(y + 3)(|y - x - 9| - (x - 4)) = 0 \quad (x \geq 1 \ \& \ y \geq -3 \ \vee \ y \leq 1 \ \& \ y \leq -3)$$

231

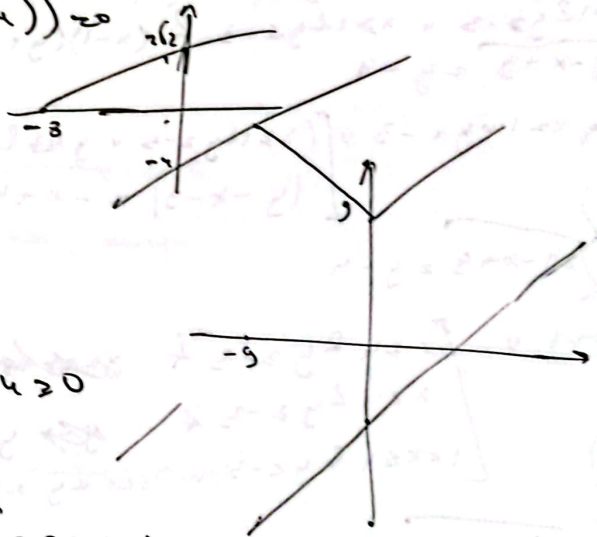
$$(x - 4)(y + 3)(|y - x - 9| + (x - 4)) = 0$$

232

$$x = 1 \quad \sqrt{y + 8} = y - 4$$

233

$$y^2 - 3 \sqrt{-x + 6} = -4$$



234

$$\sqrt{y + 8} = y - 4$$

235

$$y + 8 = y^2 - 8y + 16 \ \& \ y - 4 \geq 0$$

236

$$y^2 - 9y + 8 = 0$$

237

$$y = 1 \ \vee \ y = 8$$

238

$$13 + 9 = 22$$

239

$$22 - x = 3 \quad 1$$

240

$$-x \geq 59$$

241

$$\sqrt{x + 13} = 2x + 1$$

242

$$4x^2 + 4x + 12 = x + 13$$

243

$$4x^2 + 3x - 12 = 0$$

244

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{177}}{8}$$

245

$$x_2 = -3 \pm \sqrt{9 \cdot 16 \cdot 12}$$

246

$$3(3 + 4 \cdot 16)$$

247

$$6 \cdot 3$$

200

201

(21)

$$2(C_6^2 \cdot C_6^3 + C_3^2 \cdot C_3^3 + C_6^2 \cdot C_8^3 + C_5^2 \cdot C_9^3)$$

248

$$2 \cdot 15 \cdot 120 + 3 \cdot 1 + 15 \cdot 56 + 10 \cdot 84$$

249

250

$$63 \cdot (-60) \cdot 16 = -63 \cdot 16 \cdot 60$$

251

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

252

$$-\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}} = -\frac{1}{\frac{x}{x+1}} = -\frac{x+1}{x}$$

253

$$\begin{array}{r} x \ 135 \\ y \ 0 \\ \hline 12 \ 25 \ 0 \\ \hline x \ 16 \\ y \ 2 \\ \hline 16 \\ \hline 18 \ 2 \\ \hline 19 \ 1 \\ \hline 13 \ 3 \end{array}$$

254

$$\frac{-3 \pm \sqrt{201}}{8}$$

255

$$-15$$

Числовые

(23)

$$\begin{cases} (xy-3+3x-5) |y-x-9| = (x-4) |xy-3+3x-5| \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} (x-1)(y+3) |y-x-9| = (x-4) |(x-1)(y+3)| \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \& y \geq -3 \vee x \leq 1 \& y \leq -3 \& (x-1)(y+3)(|y-x-9| - (x-4)) = 0 \\ x \leq 1 \& y \geq -3 \vee x \geq 1 \& y \leq -3 \& (x-1)(y+3)(|y-x-9| + (x-4)) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\sqrt{y-x+9} = y-4$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \vee y \geq -3 \vee \left[(x \geq 1 \& y \geq -3 \vee y \leq -3 \& x \leq 1 \& |y-x-9| \geq x-4) \right. \\ \left. |y-x-9| = -x+4 \& x \geq 1 \& y < -3 \vee x > 1 \& y \leq -3 \right] \end{cases} \quad (2)$$

$$\sqrt{y-x+9} = y-4$$

$$y \geq -3 - \text{не может}$$

$$\sqrt{-x+6} = -\frac{7}{6} \quad x \neq \emptyset$$

$$\begin{cases} x=1 \vee \begin{cases} x \geq 4 \& y \geq -3 \& y-x-9 = x-4 \& y-x-9 \geq 0 \\ x \geq 4 \& y \geq -3 \& y-x-9 < 0 \end{cases} \\ 1 < x \leq 4 \& y < -3 \vee x < 1 \& y > -3 \& \begin{cases} y \geq 13 \& y-x-9 \geq 0 \\ y \geq 2x+5 \& y-x-9 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt{y-x+9} = y-4$$

$$\begin{cases} x=1 \vee \sqrt{y+8} = y-4 \\ \begin{cases} y \geq 13 \& \sqrt{13-x+9} = 13-4 \& x \geq 4 \& 4 < x \\ y \geq 13 \& 4 \geq x \& \sqrt{13-x+9} = 13-4 \& x < 1 \\ y-x \geq x+5 \& x+5-9 \geq 0 \& x \geq 4 \& y \geq -3 \& \sqrt{x+13} \geq 2x+1 \\ y \geq 2x+5 \& x+5-9 < 0 \& 1 < x < 4 \& y < -3 \vee x < 1 \& y > -3 \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y^2-9y+8=0 \\ y \geq 4 \end{cases} \vee \begin{cases} y \geq 13 \& x = -59 \& x > 4 \\ y \geq 13 \& x = -59 \& x \leq 4 \& x < 1 \\ y \geq 2x+5 \& x \geq 4 \& x+13 \geq 4x^2+4x+1 \\ y \geq 2x+5 \& x < 4 \& x < 1 \& y \geq -3 \& 4x^2+3x-12=0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -59 \\ y \geq 13 \end{cases} \vee \begin{cases} y \geq 2x+5 \& (x < 1 \vee x \geq 4) \& x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16 \cdot 12}}{2} \end{cases} \quad (2)$$

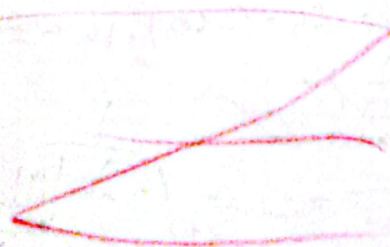
$$4 > \frac{12}{8} > \frac{-3 + \sqrt{201}}{8} > \frac{11}{8} > 1$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \& y \geq 2 \\ x = -59 \& y = 13 \end{cases} \vee \begin{cases} y \geq 2x+5 \& x = \frac{-3 \pm \sqrt{201}}{2} \end{cases} \& (-4 \leq x < 1 \vee x \geq 4) \quad (2)$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \& y \geq 2 \\ x = -59 \& y = 13 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{-3 - \sqrt{201}}{2} \& y = \frac{13 - \sqrt{201}}{4} \end{cases} \quad \frac{-1 - \frac{13}{2}}{2} > \frac{-3 - \sqrt{201}}{2} > -\frac{9}{4}$$

н.обр $\left\{ (1; 2); (-59; 13) \right\}$

Ответ: $\left\{ (1; 2); (-59; 13) \right\}$



35-39-78-81
(43.4)

Числовые

21

Рассмотрим случаи:

1) 3 университета - заняты, тогда:

$$2 \cdot C_2^2 \cdot C_6^3$$

время заняты не

2) 2 университета - заняты, 1 - не занят, тогда:

$$2 \cdot C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot C_3^3$$

врем. не-во заняты не
с.п. времени 1 не занят из университетов

3) 1 университет - занят, 2 - не занят, тогда

$$2 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2 \cdot C_3^3$$

врем. заняты не

не-во

с.п. времени 1 занят из университетов

4) 3 университета - не занят.

$$2 \cdot C_5^2 \cdot C_9^3$$

врем

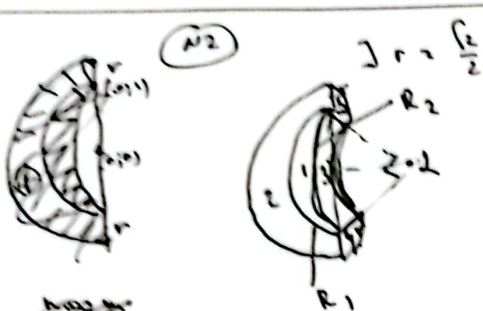
итого с.п.: $2 (C_2^2 \cdot C_6^3 + C_3^1 (C_4^2 \cdot C_3^3 + C_6^2 \cdot C_3^3) + C_5^2 \cdot C_3^3) =$

$$= 2 \left(\frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} + 3 \left(\frac{2! \cdot 3!}{1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 4!} + \frac{6! \cdot 2!}{1! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 5!} \right) + \frac{5! \cdot 9!}{1! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 6!} \right) =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 8 =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 (16 + 24 + 63 + 82) = 20 \cdot 125 = 12250$$

Ответ: 12250



числами
 площадь фигуры можно разбить
 на 5 частей (как на рисе)
 R_1 - радиусе большей дуги ($R_1 \geq 1$)
 R_2 - радиусе меньшей дуги ($R_2 \leq R_1$)

тогда
 $S_1 = \frac{\pi R_1^2}{2} - \frac{\pi R_2^2}{4}$ (т.к. $\alpha = 90^\circ \Rightarrow$ дуга R_2 - центральная угол)

$$S_2 = \frac{\pi (R_1 + r)^2}{2} - \frac{\pi R_1^2}{2}$$

$$S_3 = \frac{\pi R_2^2}{4} - \frac{\pi (R_2 - r)^2}{4}$$

$$S_4 = S_5 = \frac{\pi \cdot r^2}{8} \cdot 3$$

$$S_5 = \frac{\pi r^2}{8} \cdot 3$$

тогда площадь фигуры $= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = \frac{\pi R_1^2}{2} - \frac{\pi R_2^2}{4} + \frac{\pi (R_1 + r)^2}{2} - \frac{\pi R_1^2}{2} +$
 $+ \frac{\pi R_2^2}{4} - \frac{\pi (R_2 - r)^2}{4} + 3 \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi}{4} ((R_1 + r)^2 - (R_2 - r)^2 + 3r^2) =$

$$= \frac{\pi}{4} \left(1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{(5 + \sqrt{2})\pi}{8}$$

Ответ: $\frac{(5 + \sqrt{2})\pi}{8}$

(24)

a - кол-во дуг AB , которые прошли от A до B .

b - кол-во дуг BC $a, b, c \in \mathbb{Z} \cup \{0\}$

c - кол-во дуг AC

т.к. от A до B вернулись $a+b$, то $a+b+c \geq 0$ (1)

e - длина дуги AC

$$e = 2\pi \cdot \left(\frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} = \pi \left(\frac{25}{2} + \frac{15}{2} \right) = 40 \text{ км}$$

~~тогда~~

скорости дуг $AC = v_i = \frac{v_i}{t_i}$

тогда $a \cdot \frac{15 \cdot 5}{15} + b \cdot \frac{25 \cdot 15}{25} + \frac{c \cdot 40 \cdot 19}{40} = 25c$

$$5a + 13b + 19c = 25$$

$5 \leq 19 \leq 25$, $a, b \in \mathbb{Z}$ ($c \leq 6$, т.к. $19 \cdot 6 > 25$, $a, b \in \mathbb{Z}$)

$4c \leq 5$ $5a + 13b = 25 - 19c$ $a = b = 0$, не возможно (абн. осн $b(1)c$)

$3c \leq 4$ $5a + 13b = 25 - 19 \cdot 3 = -32$ $a, b \in \mathbb{Z}$

$2c \leq 3$ $5a + 13b = 25 - 19 \cdot 2 = -13$ $a = 2, b = -1, c = 2$ (1)

$4b \leq 4$ $a = 0$ $13b = 25 - 19c$
 $13b = 25 - 19 \cdot 2 = -13$ $b = -1$ $a = 2$
 $13b = 25 - 19 \cdot 1 = 6$ $b = 0$ $a = 5$

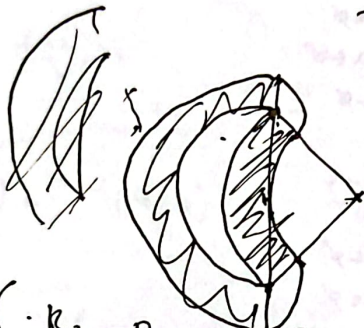
черновики

$$-\frac{3 - \sqrt{201}}{8} \rightarrow y = \frac{13 - \sqrt{201}}{4}$$

$$\frac{34 - 2\sqrt{201} + 23 + \sqrt{201}}{8} = \sqrt{\frac{32 - \sqrt{201}}{8}} = \frac{1 - \sqrt{201}}{4}$$

$$32 - \sqrt{201} = \frac{404 - 4\sqrt{201}}{4}$$

$$33 - \sqrt{201} = 101 - \sqrt{201}$$



$$(R_1 + R_2) (\cdot R_1 - R_2 + 2r)$$

$$(\sqrt{2+1}) (1 - \sqrt{2} + \sqrt{2})$$

$$\sqrt{2+1} + \frac{3}{2}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = zt$$

$$1 + \frac{1}{x+1} = zt + 1$$

$$y(x) = t - 1$$

$$1 - \frac{1}{x+1}$$

~~98/7~~ $2\pi\omega z v$

a. bc

$$\frac{5 \cdot a \cdot 5}{8} + \frac{13 \cdot b \cdot 13}{25} + \frac{19 \cdot c \cdot 19}{80} = 95$$

= 95

$$5 \cdot a + 13 \cdot b + 19c = 95$$

~~c=4~~ $5a + 13b = 19$

c=3 $5a + 13b = 38$

c=3 a=5 b=1 ✓

c=2 $5a + 13b = 58$

c=2 a=1 b=4

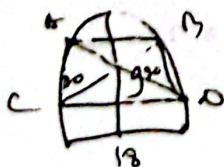
c=1 $5a + 13b = 46$

c=1 b=2 a=10

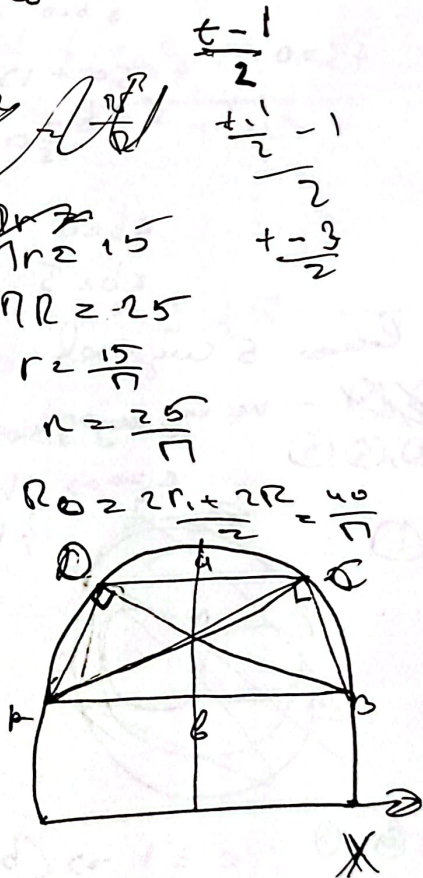
~~a=7~~

~~b=3~~

~~b^2~~



$$b^2 = \frac{AP \cdot PB}{AB} = \frac{a \cdot (a-x)}{a}$$



$b = 2 \times 2$

$a = 2 \times 2$

числами

(24)

4 c = 22

5a + 13b = 54

4 b = 5 ~~a~~ a ∈ ∅

Δ b = 4 5a = 5 (2) c = 22 b = 4 a = 1 (2)

4 b = 3 5a = 13 (2) a ∈ ∅

4 b = 2 5a = 31 (2) a ∈ ∅

4 b = 1 5a = 44 (2) a ∈ ∅

4 b = 0 5a = 54 a ∈ ∅

4 c = 1

5a + 13b = 46

4 b = 6 a ∈ ∅

4 b = 5 5a = 11 (2) a ∈ ∅

4 b = 4 5a = 24 (2) a ∈ ∅

4 b = 3 5a = 37 (2) a ∈ ∅

4 b = 2 5a = 50 (2) c = 1 b = 2 a = 10 (3)

4 b = 1 5a = 63 (2) a ∈ ∅

4 b = 0 5a = 46 a ∈ ∅

4 c = 0

5a + 13b = 95 (2) 13b = 5(19 - a) ⇒

4 b ≡ 0 (2) b = 0 ∨ b = 5 ~~10~~
b ≡ 0 (2)

4 b = 0 5a = 95 (2) 95 = 19 * 5 c = 0 b = 0 c = 19 (5)

4 b = 5 5a = 30 (2) c = 0 b = 5 c = 6 (4)

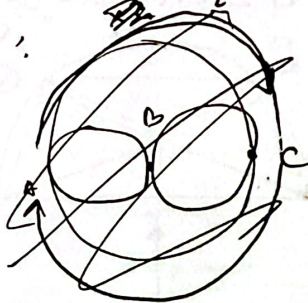
всего 5 случаев

(1), (2), (3) - не могут быть, так как ~~...~~

(2), (4), (5)

c ≡ 22 (2) { b + c ≡ 0 (2) (исходно c ≡ 2) A вернувшись в (1) A
b ≡ c ≡ 0 (2) (!?)

(1) :



(1) : Сначала 3 раза думал AC, а потом
⇒ c) c в (1) B по сути BC, а потом
5 раз AB
↑
пример

(2) (3)

c ≡ 1 (2) ⇒ { b + d ≡ 0 (2) (исходно c ≡ 1) A вернувшись в (1) A
b ≡ d ≡ 1 (2) (исходно c ≡ 1) A

(?!), т.к. b ≡ d ≡ 0 (2) и не будет ~~...~~

тогда возможны только (1) случай

S = (3 * 40 + 1 * 25 + 5 * 15) км = 120 км + 25 км + 75 км = 220 км

Ответ: 220 км

используем

(25)

$$] t = \frac{x-1}{x+1} \sim 1 - \frac{2}{x+1} \text{ , тогда } f(x) = \frac{t-1}{2}$$

$$g(x) = f(f(\dots f(x))) \text{ в м. } t=0$$

$$f(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{t-1}{2} - 1}{2} = \frac{t-3}{4}$$

$$f(x) = f(f(f(x))) = f(f(f(x))) = \frac{\frac{t-3}{4} - 3}{4} = \frac{t-15}{16}$$

$$f(\dots f(x)) = f(f(f(x))) = \frac{\frac{t-15}{16} - 15}{16} = \frac{t - 15 \cdot 16}{16^2}$$

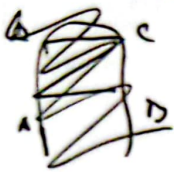
$$g(x) = f(f(f(x))) = \frac{\frac{t - 15 \cdot 16}{16^2} - 1}{2} = \frac{t - (16^2 \cdot -1) - 16^2}{2 \cdot 16^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2 \cdot 16^2} = \frac{1}{2^9} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{2^9}$$

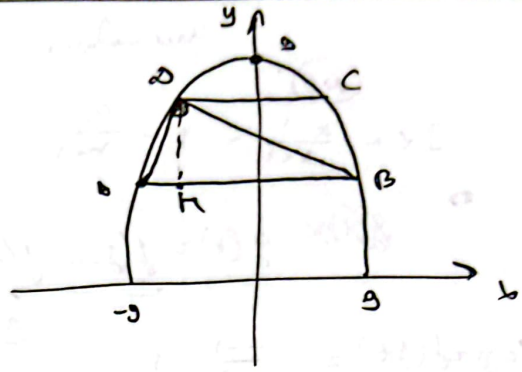
наименее убогая наименьшая касательная к кр. в 0. $g(x)$ в м. $t=0$
 это производная этой кр. в м. $t=0$
 и.обр $tg \alpha = \frac{1}{2^9}$

Ответ: $\frac{1}{2^9}$

№ 1177 (16) Числовые



сначала, что
(AB) - хорда, т.к. $\angle ACB = 90^\circ$



~~1177~~

$$y = a - bx^2$$

$$a = 9$$

$$x=0 \Rightarrow y = 9 - bx^2 \quad (*)$$

$$bx^2 = 9 \quad (**) \quad x = \pm \sqrt{\frac{9}{b}} \quad (***) \quad x = \pm \frac{3}{\sqrt{b}} \quad (***)$$

$$b \cdot \frac{9}{b} = 9 \quad (***) \quad b = \frac{1}{9}$$

т. обр парабола: $y = 9 - \frac{x^2}{9}$

$$\rightarrow (*) \quad A(x_1; 9 - \frac{x_1^2}{9}) \quad (**) \quad B(-x_1; 9 - \frac{x_1^2}{9})$$



аналогично $(*) \quad C(x_2; 9 - \frac{x_2^2}{9}) \quad (**) \quad D(-x_2; 9 - \frac{x_2^2}{9})$

в AOD - прямоугольн

$$AO^2 + OD^2 = AD^2 \quad (1) \quad 4x_1^2 = \frac{1}{9}(-x_2 - (-x_1))^2 + (9 - \frac{x_2^2}{9} - 9 + \frac{x_1^2}{9})^2$$

$$+ (x_1 + x_2)^2 + (9 - \frac{x_1^2}{9} - 9 + \frac{x_2^2}{9})^2 \quad (2)$$

$$4x_1^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 + 2(\frac{x_1^2}{9} - \frac{x_2^2}{9})^2 \quad (3)$$

$$2x_1^2 - 2x_2^2 = \frac{2}{81}(x_1^2 - x_2^2)^2 \quad (4) \quad x_1^2 - x_2^2 = \frac{(x_1^2 - x_2^2)^2}{81} \quad (5)$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \vee x_1^2 - x_2^2 = 81 \quad (6)$$

не может быть, т.к. (AC) не совм (AB)

определим (AD) - хорду к (AB) ; $(*) \quad A \in (AB)$
 (AD) - не рассчитать

$$AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (9 - \frac{x_2^2}{9} - 9 + \frac{x_1^2}{9})^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (\frac{x_1^2}{9} - \frac{x_2^2}{9})^2} = \sqrt{\frac{1}{81} \cdot (x_1^2 - x_2^2)^2} = \frac{1}{81} \cdot 81 = 1$$

Ответ: 1

картина

$$(x_1 - x_2)^2 + \left(-\frac{x_2^2}{9} + \frac{x_1^2}{9}\right)^2 + (x_1 + x_2)^2 + \left(-\frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{9}\right)^2$$

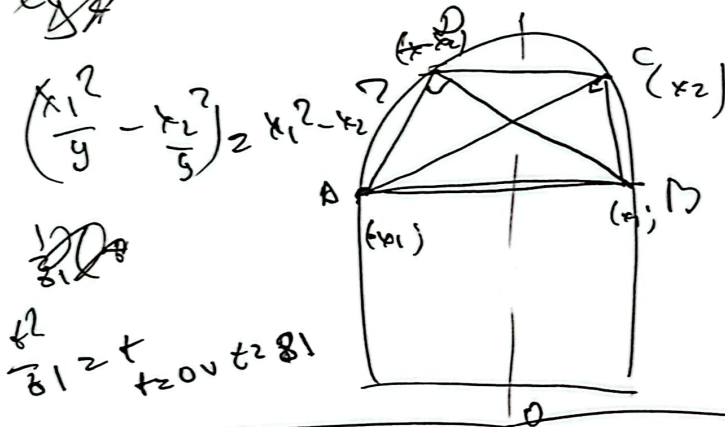
$$2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$$

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

$$4x_1^2 - 2(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 + \frac{2(x_1^2 - x_2^2)^2}{9}$$

$$4x_1^2 - 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + \frac{2(x_1^2 - x_2^2)^2}{9}$$

$$4x_1^2 - 2x_2^2 - 2\frac{x_1^2 - x_2^2}{9}$$



$$\frac{x_1^2}{9} - \frac{x_2^2}{9} = x_1^2 - x_2^2$$

$$\frac{x_2^2}{81} = t$$

$$t = 0 \text{ or } t = 81$$

$$D = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (a - bx_2 - a + bx_1)^2}$$

$$4x_1^2 = (x_1 - x_2)^2 + \frac{(x_1^2 - x_2^2)^2}{81} + (x_1 + x_2)^2$$

$$4x_1^2 - x_1^2 - x_2^2 = \dots$$

$$(x_1 - x_2)^2 + 1 + b^2(x_1 + x_2)^2$$

$$- (x_1 - x_2)^2 + \frac{b^2(x_1^2 - x_2^2)^2}{81}$$

$$a - bx_2 \geq 0$$

$$bx_2 \geq a$$

$$x \geq \pm \sqrt{\frac{a}{b}} = 18$$

$$= \frac{1}{81} (x_1^2 - x_2^2)^2$$

$$9 - \frac{x^2}{9} = \frac{a}{b} = 9^2$$

$$a = 81b$$

$$81 - 6x^2$$

$$81b = 9$$