МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 5

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Прокошева Максима Олеговича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» 02 2024 года

Подпись участника

Ж77

15-23-21-29

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Подпись	Расшифровка подписи
0	4	12	12	12	12	12	4	68	[signature]	Кулешов И.А.
									[signature]	Егоренков В.Я.

1. ∅ — 0

2. Верное очертание луны, неверные суммарные площади. — + 4

3. Верно + 12

4. Верно + 12

Верно

\+

12

5.

Верно

\+

12

6.

Есть идеи док-ва в черновике, но не доведено до конца. \+

12

7.

NB: в условии нет ни слова о доказательстве единственности числа, сказано только найти.

Согласовано со старшим по проверке

Рассмотрены не все варианты, но есть ур-ие плоскости

\-

\+

4

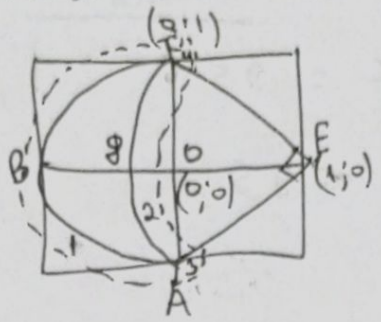
8.

---

68 (шестьдесят восемь) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задача 2

Чистовик



$S_{OCEA} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 1$

$S_{\smile CEAB} = \frac{\pi\cdot(\sqrt{2})^2}{4} = \frac{\pi}{2}$

$S_{CAB} = \frac{\pi}{2} - 1$

$S_{ABC} = \frac{\pi\cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$

$S_{CBAB} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1$

$S_1 = \frac{\pi(1+0{,}25)^2}{2} - \frac{\pi\,1^2}{2} = \frac{\pi\cdot 5^2}{4^2\cdot 2} - \frac{\pi}{2} = \frac{25\pi}{32} - \frac{\pi}{2} =$

$= \frac{25\pi - 16\pi}{32} = \frac{9\pi}{32}$

$S_2 = \frac{\pi\cdot(\sqrt{2})^2}{4} - \frac{\pi\left(\sqrt{2} - 0{,}25\right)^2}{4} = \frac{\pi\left(2 - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)^2\right)}{4} =$

$\left(\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)^2 = 2 + \frac{1}{16} - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{33}{16} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{33 - 8\sqrt{2}}{16} =$

$= \frac{32 + 1 - 8\sqrt{2}}{16} = 2 + \frac{1 - 8\sqrt{2}}{16}$

$= \frac{\pi\left(2 - 2 + \frac{8\sqrt{2} - 1}{16}\right)}{4} = \frac{8\sqrt{2} - 1}{16}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{8\sqrt{2} - 1}{64}\cdot\pi$

$S_3 = S_4 = \frac{\pi\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2}{180}\cdot 135 = \frac{\pi\,3}{16\cdot 4} = \frac{3\pi}{64}$

$S = S_1 + S_2 + S_{CBAB} + S_3 + S_4 = \frac{9\pi}{32} + \frac{8\sqrt{2} - 1}{64}\pi + \frac{3\pi}{64}\cdot 2 =$

$= \frac{12\pi}{32} + \frac{8\sqrt{2} - 1}{64}\cdot\pi = \frac{24\pi + 8\sqrt{2}\pi - \pi}{64} = \frac{23\pi + 8\sqrt{2}\pi}{64} = \frac{23 + 8\sqrt{2}}{64}\pi$

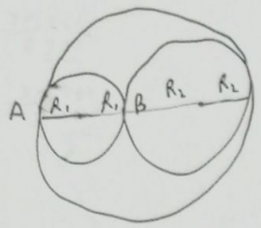
Ответ: $\frac{23 + 8\sqrt{2}}{64}\cdot\pi$

135 | 45
-135 | 3
0

180 | 45
-180 | 4
0

Чистовик

Задача 4.



$\smile AB + y \smile BC + z \smile AC = 95$

$5x + 13y + 19z = 95$

$z=0$: $5x+13y=95$

x	y	
19	0	∅
6	5	∅

$z=1$: $5x+13y=76$

x	y	
10	2	∅

$z=2$: $5x+13y=57$

x	y	
1	4	∅

$z=3$: $5x+13y=38$

x	y	
5	1	✓

$z=4$: $5x+13y=19$ ∅

$z=5$: $5x+13y=0$

x	y	
0	0	∅

65
147
212

Итак, 5 дуг AB; 1 дуга BC и 3 дуги AC подходят

$\smile AB = \pi \cdot R_1$ - 13 км

$\smile BC = \pi R_2$ - 27 км

$\smile AC = \pi R_3 = \pi \cdot \frac{2R_1 + 2R_2}{2} = \pi(R_1 + R_2) = \pi R_1 + \pi R_2 = \smile AB + \smile BC =$

$= 13 + 27 = 40$ км

$5 \cdot 13 + 27 + 3 \cdot 40 = 65 + 27 + 120 = 212$

ответ: 212 км

Чистовик

Задача 7.

$N = 999\ldots999$ (85 девяток)

Задача 8. $(1;1;3)$; $(7;7;11)$; $(5;5;5)$

координаты D принадлежат отрезкам: $1 \le X \le 7$, $1 \le y \le 5$, $3 \le z \le 11$

Ур-ние плоскости D: $\begin{cases} A + b + 3C + 8 = 0 \\ 7A + 2B + 11C + 8 = 0 \\ 5A + 5B + 5C + 8 = 0 \end{cases}$

$10C + 4\delta = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{4\delta}{10} = -\frac{2\delta}{5}$

$-5A - 5C + \delta = 0$

$-5A + 2\delta + \delta = 0$

$A = \frac{3\delta}{5}$

$\begin{cases} A + B - \frac{6\delta}{5} + \delta = 0 \\ 7A + 2B - \frac{22\delta}{5} + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B - \frac{\delta}{5} = 0 \\ 2A + 2B - \frac{17\delta}{5} = 0 \end{cases}$

$B = -A - 3C - \delta = -\frac{3\delta}{5} + \frac{6\delta}{5} - \delta = -\frac{3\delta}{5} + \frac{\delta}{5} = -\frac{2\delta}{5}$

$\frac{3\delta}{5}x - \frac{2\delta}{5}y - \frac{2\delta}{5}z + \delta = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - 2z + 5 = 0$

$3x + 5 = 2(y + z) \Rightarrow x$ - нечет.

$x=1$: $y+z=4 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=3 \end{cases}$

$x=3$: $y+z=7$ $\Leftrightarrow$

y	1	2	3	4
z	6	5	4	3

$x=5$: $y+z=10$ $\Leftrightarrow$

y	1	2	3	4	5
z	9	8	7	6	5

$x=7$: $y+z=13$ $\Leftrightarrow$

y	2	3	4	5
z	11	10	9	8

Чистовик

Задача 5.

$y = f(x)$: $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$

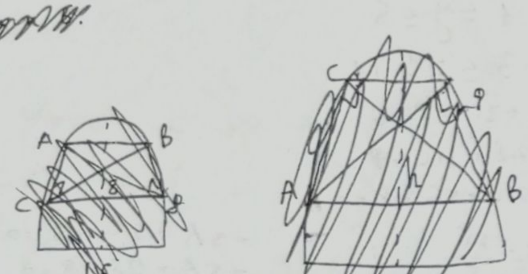
$$f\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}\right) = f\left(\frac{x+1+x-1}{x+1-x+1}\right) = f(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{1}{\frac{x+1-x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{2}$$

$$\underbrace{f(f(f\dots f(x)))}_{10} = \frac{x-1-2-4-8-\dots-512}{1024}$$

$tg\,\alpha = k$ = производная

$$\left(\frac{x-1-2-4-8-\dots-512}{1024}\right)' = \frac{1}{1024}$$

Ответ: $\frac{1}{1024}$



~~Решение на черн.~~

15-23-21-29 (43.3)

Чистовик

Задача 3.

$$\begin{cases} (xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases}$$

$y \ge 3$: $xy+4x-y-4 = (y+4)(x-1)$

$x=1$: $\sqrt{y+9} = y-3 \Leftrightarrow y+9 = y^2-6y+9 \Leftrightarrow y^2-7y=0 \Leftrightarrow y(y-7)=0$

$\begin{cases} y=7 \\ x=1 \end{cases}$ ✓ подходит

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y+4\ge0 \\ x-1\ge0 \end{cases} \\ \begin{cases} y+4\le0 \\ x-1\le0 \end{cases} \end{array}\right.$:

$|y-x-8| = x-4$

$y \ge x+8$: $y-x-8 = x-4 \Leftrightarrow y = 2x+4$

$\sqrt{x+14} = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ x+14 = 4x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+3x-13=0 \\ x \ge -\frac{1}{2} \end{cases}$

$4x^2+3x-13=0$

$x = \frac{-3\pm\sqrt{9+16\cdot13}}{8}$ = т.к. $x \ge -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3+\sqrt{217}}{8}$

$y = \frac{-3+\sqrt{217}+16}{4} = \frac{13+\sqrt{217}}{4}$

Итак $\left(\frac{-3+\sqrt{217}}{8}; \frac{13+\sqrt{217}}{4}\right)$ не подходит

$\frac{-3+\sqrt{217}}{8} > 1$; $-3+\sqrt{217} > 8$; $\sqrt{217} > 11$; $217 > 121$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y+4\ge0 \\ x-1\le0 \end{cases} \\ \begin{cases} y+4\le0 \\ x-1\ge0 \end{cases} \end{array}\right.$: $|y-x-8| = 4-x$

$y \le x+8$: $y-x-8 = 4-x \Leftrightarrow y=12$: $\sqrt{22-x} = 9 \Leftrightarrow x = -59$ ∅

$\frac{61+\sqrt{217}}{8} > \frac{13+\sqrt{217}}{4}$

$61+\sqrt{217} > 26+2\sqrt{217}$

$35 > \sqrt{217}$

$y \ge x+8$: $y-x-8 = 4-x$

$\begin{cases} y=12 \\ x=-59 \end{cases}$ ✓ подходит

$\sqrt{x+14} = 2x+1$

$y \le x+8$: $y-x-8 = x-4 \Leftrightarrow y = 2x+4$

$\begin{cases} x = \frac{-3+\sqrt{217}}{8} \\ y = \frac{13+\sqrt{217}}{4} \end{cases}$ ∅

$\frac{-3+\sqrt{217}-8}{8} = \frac{\sqrt{217}-11}{8} > 0$

$\frac{61+\sqrt{217}}{8} > \frac{13+\sqrt{217}}{4}$

$61+\sqrt{217} > 26+2\sqrt{217}$

$35 > \sqrt{217}$

Ответ: $\{1;7\} \cup \{-59;12\}$

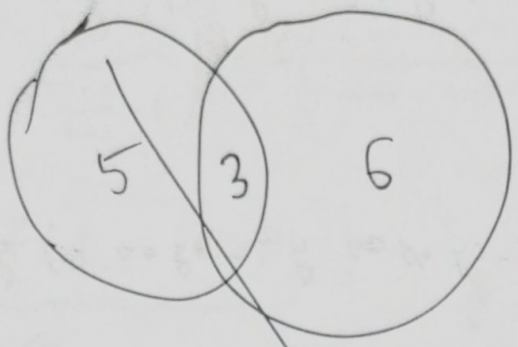
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-59 \\ y=12 \end{cases} \end{array}\right.$

18|9, 2

61 − 26 = 35

16 × 13 = 48 + 16 = 208; 217

Чистовик

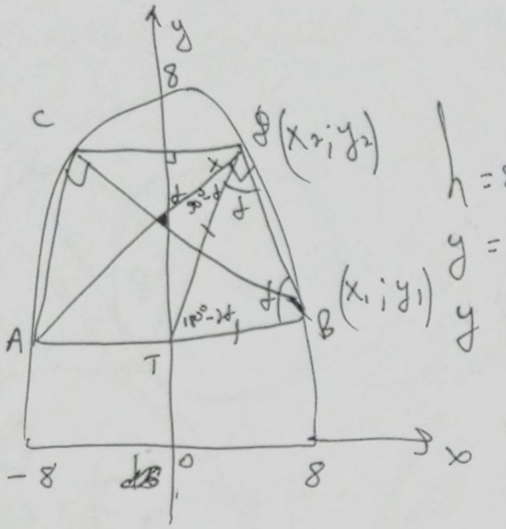


$$C_3^1 \cdot \left(C_8^2 \cdot C_9^3 - \right.$$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Задача 6 ~~Черновик~~ Чистовик

Чистовик



$h=8$

$y=a-bx^2=-bx^2+a$

$y=8-bx^2$

$0=8-b\cdot 8^2$

$0=8-64b$

$0=1-8b$

$b=\frac{1}{8}$

$y=8-\frac{x^2}{8}$

$AB=2x_1$

$CФ=2x_2$

$BФ=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$AФ=\sqrt{(x_2+x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

по ∇ Пир: $AB^2=AФ^2+BФ^2 \Leftrightarrow 4x_1^2=2x_2^2+2x_1^2+2y_2^2+2y_1^2-4y_1y_2$

$2x_1^2=x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2$

$x_1^2=x_2^2+(y_1-y_2)^2 \Rightarrow ФT=BT=x_1$

$x+90°-\varphi+\varphi+\alpha=180° \Leftrightarrow x=90°-\alpha$

$y_2=8-\frac{x_2^2}{8}$

$y_1=8-\frac{x_1^2}{8}$

$(y_1-y_2)^2=x_1^2-x_2^2 \Leftrightarrow \left(8-\frac{x_1^2}{8}-8+\frac{x_2^2}{8}\right)^2=x_1^2-x_2^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x_1^2-x_2^2}{8}\right)^2=x_1^2-x_2^2 \Leftrightarrow$] $x_1^2-x_2^2=t$: $\left(\frac{t}{8}\right)^2=t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{t^2}{64}=t \Leftrightarrow$ |т.к. $t\neq 0$| $\Leftrightarrow \frac{t}{64}=1 \Leftrightarrow t=64 \Leftrightarrow x_1^2=x_2^2+64$

$y_2-y_1=\frac{x_1^2-x_2^2}{8}=\frac{x_2^2+64-x_2^2}{8}=\frac{64}{8}=8$

$\rho(AB;CФ)=y_2-y_1=8$

Ответ: 8

Черновик

$9999 \times$

999×13: 2997, 999, 12987

$9999...999\cdot t=$

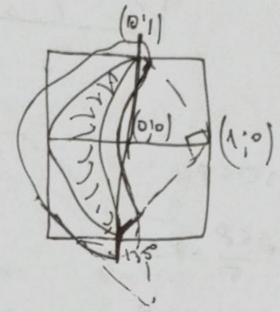
$=999$

$90000...+900...+...+900+90+9$

$99...99\cdot x=$

$=$ $9x\equiv \mathrm{mod}\ 10$

$9t000...$



$R_1=1$

$R_2=\sqrt{2}$

$S_2^1=\frac{\pi R_2^2}{4}=\frac{\pi\cdot 2}{4}=\frac{\pi}{2}$

$S_2^0=\frac{S_2\cdot S_2}{2}=1$

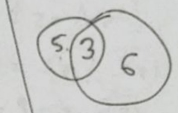
$S_2=\frac{\pi}{2}-1$

$S_1=\frac{\pi R_1^2}{2}=\frac{\pi\cdot 1}{2}=\frac{\pi}{2}$

$S_1-S_2=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+1=1$

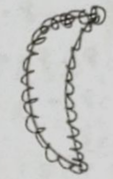
1 ВР, 2 3Ч, 3 МЛ

3 ВР, 5 3Ч, 6 МЛ, 3 ЧНИВ



$C_8^2\cdot C_6^3+C_9^3\cdot C_5^2+$

$+$



90, $+45$, 135

$\begin{cases}(xy+4x-y-4)|y-x-8|=(x-4)|xy+4x-y-4| \\ \sqrt{y-x+10}=y-3\end{cases}$

$y-x+10\geq 0 \Leftrightarrow y\geq x-10$ ОДЗ

$\begin{cases}y\geq x-10 \\ y\geq 3\end{cases}$

$(y+4)(x-1)\geq 0$

$y-x+10=y^2-6y+9$

$y-x-8=y^2-6y-9$

$\begin{cases}x\geq 4 \\ y\geq -4\end{cases}$

$\begin{cases}x\geq 4 \\ y\geq -4\end{cases}$: $\left[\begin{array}{l}y=-4 \\ \cancel{x=1}\end{array}\right.$

$\begin{cases}x\leq 4 \\ 1\leq x\leq 4 \\ y\leq -4\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1\leq x\leq 4 \\ y\leq -4\end{cases} \\ \begin{cases}x\leq 1 \\ y\geq -4\end{cases}\end{array}\right.$

$\begin{cases}x\leq 4 \\ x\leq 1 \\ y\geq -4\end{cases}$

~~$|y-x-8|=x-4$~~

$y-x-8=4-x$ $\quad y-x-8=x-4$

$y=12$ $\quad y=2x+4\geq x+8$

$y\geq x+8$ $\quad x\geq 4$

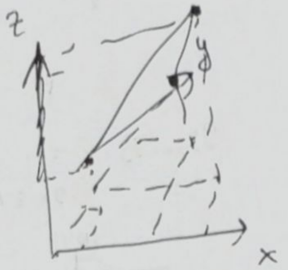
$|y^2-6y-9|=x-4$ $\quad \sqrt{x+14}=2x+1$ $\quad 5\,|\,3\,|\,6$

$y^2-6y-9=x-4$ $\quad |x-4|=x-4$ $\quad C_5^2\cdot C_9^3+C_8^2\cdot C_6^3$

$y^2-6y-5=x$ $\quad 3.5$

Черновик

A (1; 1; 3)
B (7; 7; 11)
C (5; 5; 5)



$$\begin{cases} A + B + 3C + 8 = 0 \\ 7A + 7B + 11C + 8 = 0 \\ 5A + 5B + 5C + 8 = 0 \end{cases}$$

$15C - 5C + 58 - 8 = 0$

$10C + 48 = 0$

$C = -\frac{48}{10} = -\frac{28}{5}$

~~$5A + B + 8C = 0$~~

$-5A - 5C + 8 = 0$

$-5A + 28 - 8 = 0$

$-5A + 38 = 0$

$A = \frac{38}{5}$

$B = -A - 3C - 8 =$

$= -\frac{38}{5} + \frac{68}{5} - 8 =$

$= -\frac{38}{5} + \frac{8}{5} = -\frac{28}{5}$

$\frac{38}{5}x - \frac{28}{5}y - \frac{28}{5}z + 8 = 0$

$\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y - \frac{2}{5}z + 1 = 0$

$3x - 2y - 2z + 5 = 0$

$3x + 5 = 2y + 2z$

$2 \le y \le 4$

$2 \le x \le 6$

$4 \le z \le 10$

y = 2: $3x + 5 = 4 + 2z$; $3x + 1 = 2z$

x	z
3	5
5	8

y = 4: $3x + 5 = 8 + 2z$; $3x = 3 + 2z$

x	z
3	3
5	6

y = 3: $3x + 5 = 6 + 2z$; $3x = 1 + 2z$

x	z
3	4
5	7

3; 2; 5
5; 2; 8
3; 3; 4
5; 3; 7
5; 4; 6

	9
1	9
2	8
3	7
4	6
5	5
6	4
7	3
8	2
9	1
0	0

9999 . . . 999 (85)

S(mn) = S(n)

4 и 84 нуля

1000 . . . 000 (84 нуля)

$85 \times 9 = 765$

$999 \times 11 = 10989$

$999 \times 9 = 8991$

Черновик

$5x + 13y + 19z = 95$

1
2
3
4
5
6
7
8

$x + y + z$

z = 0: $5x + 13y = 95$

x	y
19	0 ×
6	5 ×

z = 1: $5x + 13y = 76$

x	y
10	2 ×

z = 2: $5x + 13y = 57$

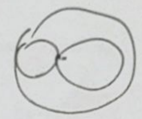
z = 3: $5x + 13y = 38$

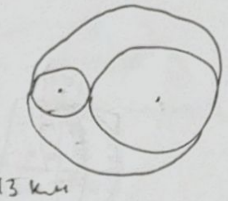
x	y
5	1

z = 4: $5x + 13y = 19$

z = 5: x 0 y 0 ×

5 AB
1 BC
3 AC





$5 \cdot 13 + 27 + 3 \cdot 40 =$

$= 65 + 27 + 120 = 212$ км

$\pi R_1 = 13$ км

$\pi R_2 = 27$ км

$AC = \pi R_3 = \pi \frac{2R_1 + 2R_2}{2} =$

$= \pi(R_1 + R_2) = \pi R_1 + \pi R_2 = 13 + 27$

№ 5 $y = f(x)$

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$

$y = \frac{x-1}{2}$

$f\left(\frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1}\right) = f\left(\frac{x+1+x-1}{x+1-x+1}\right) = f\left(\frac{2x}{2}\right) = f(x) =$

$= \frac{1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{1}{\frac{x+1-x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{2}$

f(f(... (f(x)) :

$\frac{x-1}{2}$ ...

x − 3 − 2 − 8 − 16 − 32 ...

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

x − 1 − 2 − 4 − 8 − 16 − 32 − 64 − 128 − 256 − 512

1024

$\frac{1}{1024}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

№1

кто есть

3 ВР

5 ЗЧ

6 НП

3 ЧН

кого нет

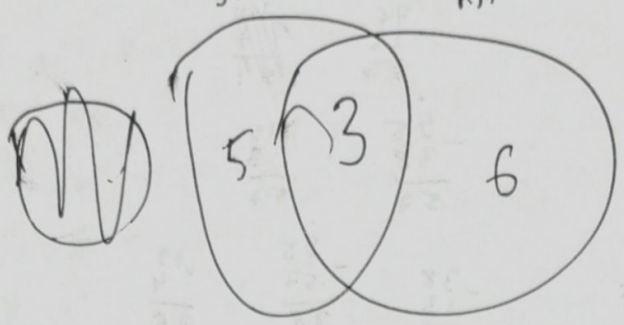
1 ВР

2 ЗЧ

3 НП

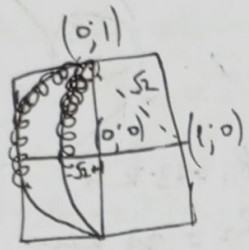
ВР ЗЧ

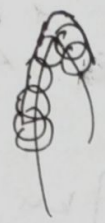
3



$C_5^2 \cdot C_9^3 + 5 \cdot 3 \cdot 6$

№2





№3

$$\begin{cases} (xy+4x-y-4)\,|y-x-8| = (x-4)\,|xy+4x-y-4| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases}$$

$y \geq 3$:

$xy+4x-y-4 \geq 0$

$x \geq 4$

$y-x+10 = y^2-6y+9$

$y^2-5y-1+x=0$

$xy+4x-y-4=0$

$x(y+4)-(y+4)=0$

$\begin{cases} (y+4)(x-1) \geq 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 4 \\ (y+4)(x-1) \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y \geq -4 \\ x \geq 4 \end{cases}$

$y-x-8 = (y-3)^2 - 18 = y^2-6y-9$

$y = \frac{6 \pm \sqrt{36+36}}{2} = 3 \pm 3\sqrt{2}$

$xy+4x-y-4 \geq 0$

$(y+4)(x-1) \geq 0$

№6

$\frac{\pi R}{t}$

АБ 13 км 5 мин

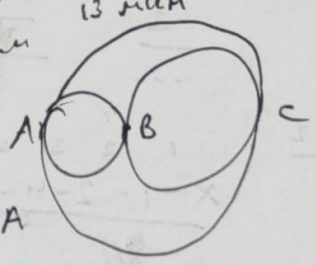
13 мин

ВС 24 км

АС 19 мин

95 мин

12 35 мин



$xAB + yBC + zAC$

$5x + 13y + 19z = 95$

2 АБ

$2(AB+BC)$

$AB + BC + AC$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!