0 212743 640003

21-27-43-64
(40.37)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Прохорова Павла Игоревича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Прох

21–

Итоговая оценка:

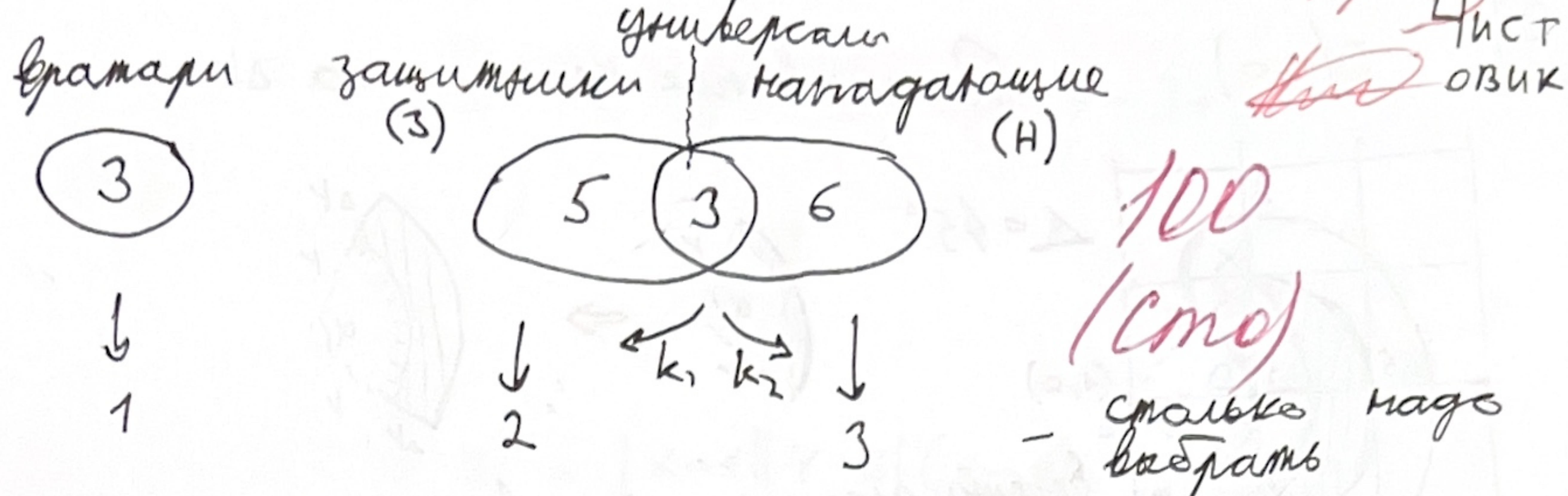
1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	12	12	12	12	12	12	12	100

21-27-43-64 (40.37)

Чист ~~Черн~~ овик

100 (сто)

1



Из универсалов можно выбрать ≤2 защитников и ≤3 нападающих, число способов их распределения (защитники – различные): по формуле множественного выбора $C_n^{(k_1, k_2 \ldots k_s)} = \dfrac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_s!}$

$k_1 + \ldots + k_s = n.$

тут 3 группы: (З), (Н) и невыбранные.
k_1, k_2, $3-k_1-k_2$

*1

k_1 (З) \ k_2 (Н)	0	1	2	3
0	1	3	3	1
1	3	6	3	X
2	3	3	X	X

После выбора универсалов выбираем (З) и (Н) из профильных игроков.

**: сколько ещё (З) надо выбрать

*: сколько способов это сделать

	0	1	2	3
0				
1				
2				

k_1	$2-k_1$	$C_5^{2-k_1}$
0	2	10
1	1	5
2	0	1

k_2	$3-k_2$	$C_6^{3-k_2}$
0	3	20
1	2	15
2	1	6
3	0	1

Теперь для каждого распределения (*1) универсалов k_1, k_2 выбираем профильных, т.е. число вариантов умножается на $C_5^{2-k_1} \cdot C_6^{3-k_2}$ – выбор (З) · выбор (Н):

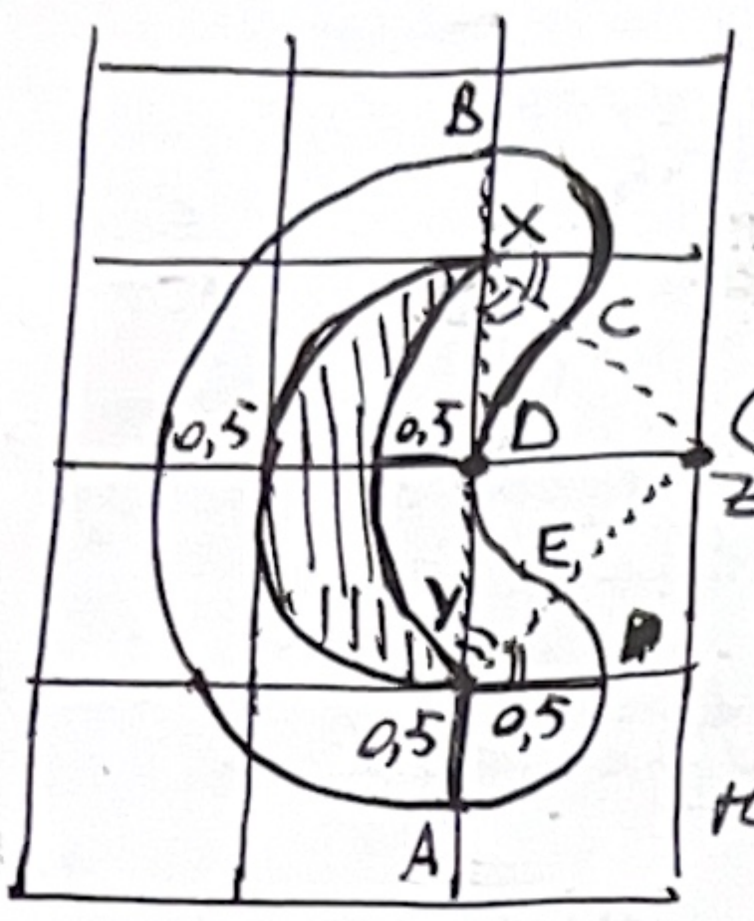
k_1 (З) \ k_2 (Н)	×20 0	×15 1	×6 2	×1 3
×10 0	200	450	180	10
×5 1	300	450	90	X
×1 2	60	45	X	X

Ещё выбираем C_3^1 вратаря

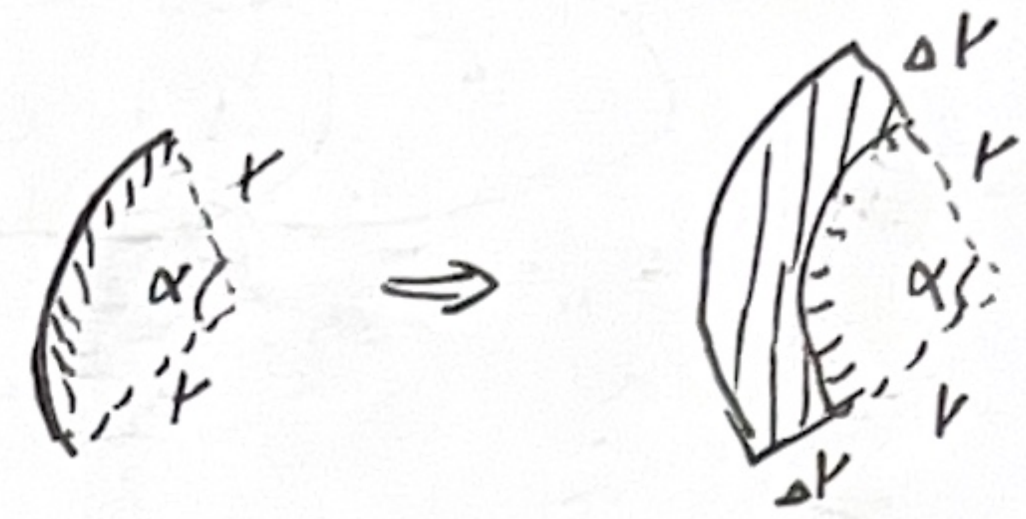
1785 вар. $\xrightarrow{\times 3}$ 5355 вариантов.

Ответ: 5355.

$\boxed{2}$ $D(0,0)$ Расплывание краски на Δr:

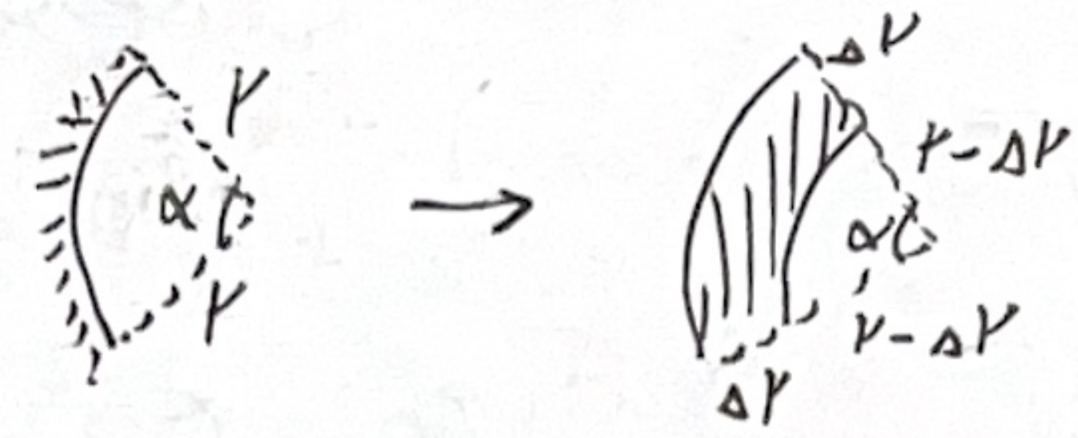


$\angle = 45^\circ$

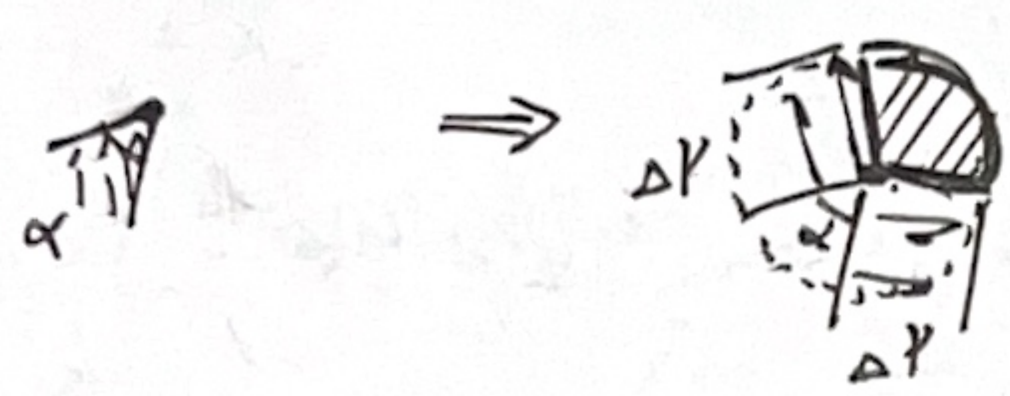


выпукл. дуга окр. $\Rightarrow$ в дугу бо́льшей окр.

невыпукл. дуга окр. $\Rightarrow$ в дугу меньшей окр.



~~точка~~ точка $\Rightarrow$ окружность Δr. (сектор окр., зажатый между расплывши-мися другими частями)



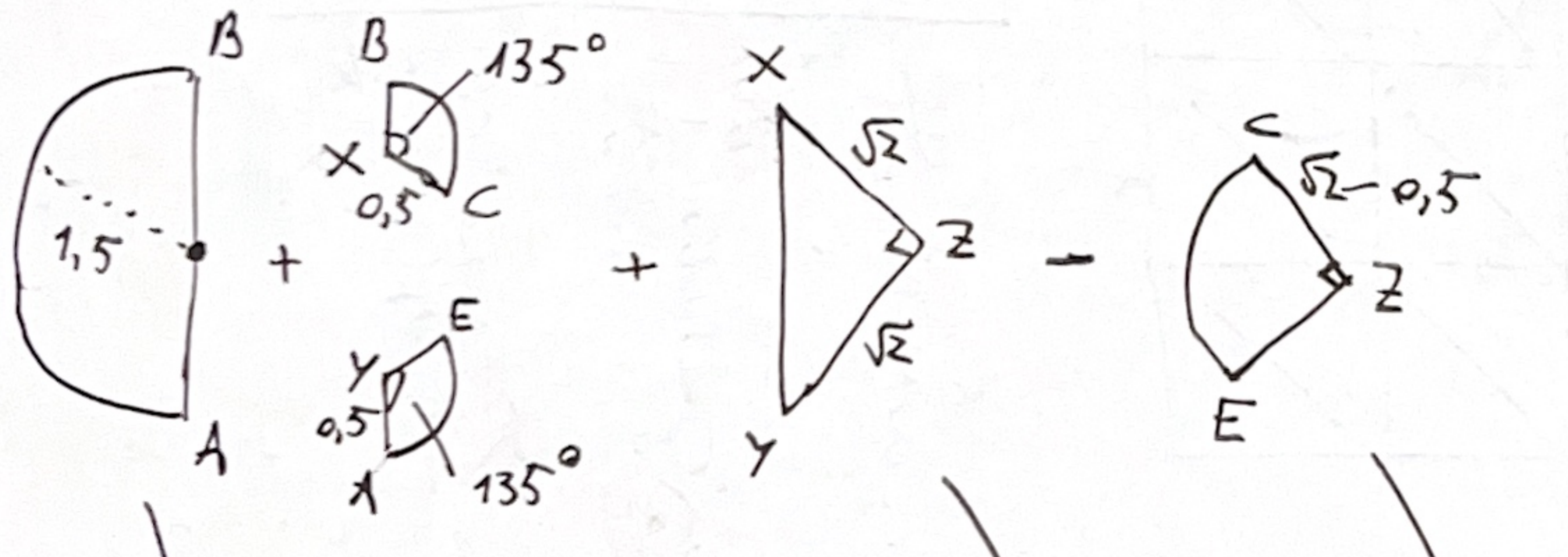
Полученная фигура:

AB − дуга окр. с центром $(0,0)$ радиуса $1+0{,}5$

BC − сектор окр. с центром $(1,0)$ радиуса $0{,}5$ с углом $90^\circ+45^\circ$

CE − дуга окр. с центром $(1,0)$ радиуса $\sqrt{2}-0{,}5$

EA − как BC, но с центром $(-1,0)$.



− вот из таких частей состоит фигура.

$$S = \frac{1}{2}\pi\underset{\frac{3}{2}}{(1{,}5)}^2 + 2\cdot\frac{3}{8}\pi\underset{\frac{1}{2}}{(0{,}5)}^2 + \frac{1}{2}\cdot\underbrace{(\sqrt{2})^2}_{2} - \frac{1}{4}\pi\underbrace{(\sqrt{2}-0{,}5)^2}_{2-\sqrt{2}+\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{9}{8}\pi + \frac{3}{16}\pi + 1 - \frac{1}{2}\pi + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi - \frac{1}{16}\pi =$$

$$= \frac{18+3-8-1}{16}\pi + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi + 1 = \frac{3+\sqrt{2}}{4}\pi + 1$$

Лист

3

$$\begin{cases} (xy-3+3x-y)|y-x-9| = (x-4)|xy-3+3x-y| \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases}$$

$\downarrow$

$$(x-1)(y+3)|y-x-9| = |x-1||y+3|(x-4)$$

$\sqrt{y-x+9} = y-4$ $\quad \boxed{y \geq 4}$

$y-x+9 = y^2-8y+16$

$y^2-9y+7+x = 0$

$y = \dfrac{9 \pm \sqrt{\overset{53}{81-28}-4x}}{2}$ $\qquad x = -y^2+9y-7$.

~~$a = x-1$~~ $\quad b = y+3$ $\quad$ От линейной подстановки число корней не ~~зави~~ изменяется.

$$\begin{cases} ab|b-\overset{a}{b}-\overset{13}{\cancel{\ }}| = |a||b|(a-3) \\ \sqrt{b-a+5} = b-9 \end{cases} \Rightarrow \underline{b \geq 9} \Rightarrow b = |b| > 0$$

$$\begin{cases} a|b-a-13| = |a|(a-3) \\ b-a+5 = b^2-18b+81 \end{cases}$$

$a = -b^2+19b-76$

Если $a=0$: $\quad b^2-19b+76 =$

$y \geq 4 \Rightarrow \underset{>0}{y+3} = \underset{>0}{|y+3|} > 0$

$(x-1)|y-x-9| = |x-1|(x-4)$

Если $x=1$: $\quad y = \dfrac{9 \pm \sqrt{\overset{49}{53-4}}^{\,7}}{2} = \overset{y\geq 4}{\cancel{1}};\ 8 \Rightarrow$ решение $\underline{(1,\ 8)}$.

Если $x > 1$:

$x-1 = |x-1| > 0$

$$\begin{cases} |y-x-9| = x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases}$$

4 ЛИСТ

$\times\begin{array}{r}16\\13\end{array}$ $\frac{}{48}$ 16

Если $x > 1$ и $y \geq x+9$:

$y - x - 9 = x - 4 \geq 0$ $\quad x \geq 4$

$y = 2x+5$

$\sqrt{(2x+5)-x+9} = \sqrt{x+14} = 2x+1 \geq 0$ ✓

⊛ $x + 14 = 4x^2 + 4x + 1$

$4x^2 + 3x - 13 = 0$ $\quad$ "–" не подходит, т.к. $x \geq 4$

$\in (14, 15)$ $\quad \underbrace{\in (11, 12)}$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4 \cdot 13}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8} = \frac{\sqrt{217} - 3}{8} \in \left(\frac{11}{8}, \frac{12}{8}\right)$

нет корней $\quad 14^2 < 217 < 15^2$ $\quad$ $156 \quad 225$ $\quad < 4$ ✗

Если $x > 1$ и $y < x+9$:

$-y + x + 9 = x - 4$

$y = 13$

$x = -y^2 + 9y - 7 = -169 + 117 - 7 < 0$ ✗

Если $x < 1$: $|y - x - 9| = 4 - x \Rightarrow x \leq 4$.

Если $y \geq x+9$:

$y - x - 9 = 4 - x$

$y = 13 \qquad x = -169 + 117 - 7 = -59$ $\quad$ решение $(-59, 13)$

Если $y < x+9$:

$-y + x + 9 = 4 - x$ $\qquad 2x + 5 < x + 9$

⊛ $y = 2x+5 \geq 4$ $\qquad x \overset{\vee}{<} 4$

$\sqrt{x+14} = 2x+1 \geq 0$ $\qquad x \geq -\frac{1}{2}$

$4x^2 + 3x - 13 = 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8} = \frac{\sqrt{217} - 3}{8}$ $\qquad \cancel{y = \frac{\sqrt{217} + 17}{4}}$

"–" не подх, т.к. $x \geq -\frac{1}{2}$, а $x_- \leq -1$.

$\frac{\sqrt{217} - 3}{8} \overset{?}{<} 1$ $\quad$ ⊛⊛

$\sqrt{217} \overset{?}{\cancel{<}} 11$ $\quad$ нет, не подходит решение.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

21-27-43-64
(40.37)

4 лист

Проверка:

$$\begin{cases} (x-1)(\cancel{y+3})|y-x-9| = (x-4)|x-1|(\cancel{y+3}) \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases} \Rightarrow y \geq 4$$

	x	y
1)	1	8
2)	−59	13
3)	$\cancel{\frac{\sqrt{217}-3}{8}}$	$\cancel{\frac{\sqrt{217}+17}{4}}$

1) ✓ $\begin{cases} 0\cdot|\ldots| = 0\cdot\ldots \\ \sqrt{8-1+9} = 4 = 8-4 \end{cases}$

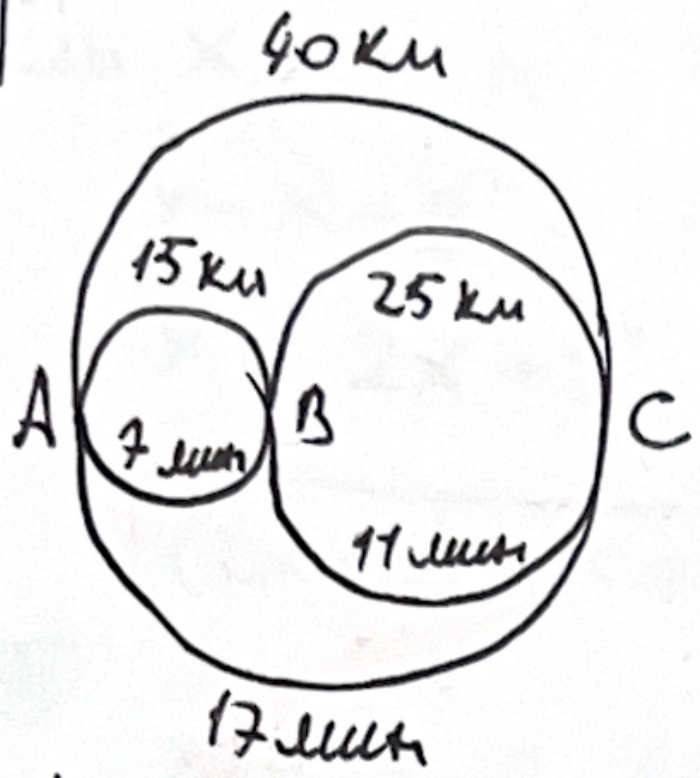
2) ✓ $\begin{cases} -60\cdot|13+\overset{63}{59}-9| \overset{\checkmark}{=} -63\cdot|-60| \\ \sqrt{13+59+9} = 9 = 13-4 \end{cases}$

3) ✗ $\overset{>0}{\frac{\sqrt{217}-11}{8}}\left|\frac{\sqrt{217}+37}{8}-9\right| \overset{?}{=} \overset{>0}{\left|\frac{\sqrt{217}-11}{8}\right|}\cdot\left(\frac{\sqrt{217}-3}{8}-4\right)$

$\left|\overset{<0}{\frac{\sqrt{217}-35}{8}}\right| \neq \overset{<0}{\frac{\sqrt{217}-35}{8}}$ нашел ошибку.

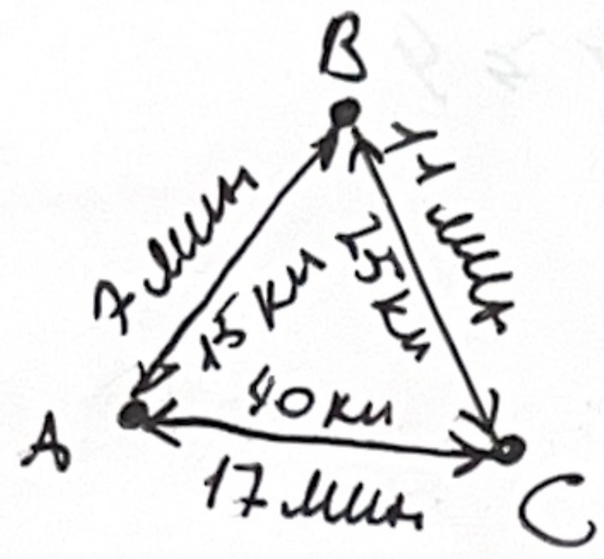
Ответ: $(1, 8)$; $(-59, 13)$

$\boxed{4}$ 4 лист



$l \sim v$

$v_{AC} = v_{AB} + v_{BC}$ $\Big\}$ $l_{AC} = l_{AB} + l_{AC}$



$\Rightarrow$ 85 минут, ? км

$a, b, c \geq 0,\ \in \mathbb{Z}.$

$7a + 11b + 17c = 85$

a, b, c – кол-во раз проехал по дуге AB, BC, CA соотв.

$7a + 11b + 17(c-5) = 0$

$7a + 11b = 17(5-c) \in [0, 85].$

$7a + 11b \ \vdots\ 17$

$7a + 11b \equiv 0 \pmod{17}$

$\underset{35}{7 \cdot 5} \equiv 1 \pmod{17}$

$a \equiv \underset{6}{(-11)} \cdot \underset{5}{7^{-1}} \cdot b \equiv 13b \pmod{17}$

$a = 0,\ b = 0$ – решение.0.

$7a + 11b = 17(5-c)$

$a = 13b \mod 17$ $\Leftarrow$ $a < 13$, т.к. $\underset{91}{7 \cdot 13} > 5 \cdot 17 = 85$

$b < 8$, т.к. $11 \cdot 8 > 85$

$c = 5 - \dfrac{7a + 11b}{17}$

Расстояние $= 15a + 25b + 40c$, (км)

b	a	c		
0	0	5	✓	$40 \cdot 5 = 200$
1	13	<0	×	
2	9	0	✓	$2 \cdot 25 + 9 \cdot 15 = 185$
3	5	1	✓	$3 \cdot 25 + 5 \cdot 15 + 1 \cdot 40 = 190$
4	1	2	✓	$4 \cdot 25 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 40 = 195$
5	14	<0	×	
6	10	−3	×	
7	6	−2	×	

Путь: ~~ACACACAC~~

~~Ответ:~~

4 лист

	AB	BC	CA
	a	b	c
1)	0	0	5
2)	1	4	2
3)	5	3	1
4)	9	2	0

Маршрут.

ACACAC ⊗

~~ACBCBCBABA~~ → 190 км

Выехал из A и приехал в A.

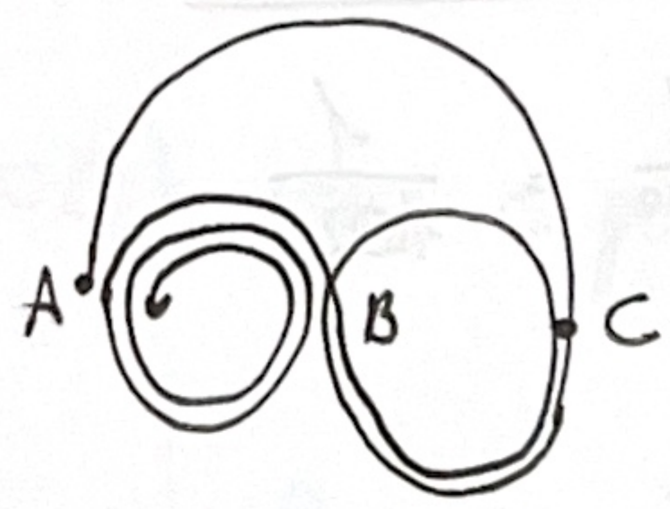
$a+c$ – чёт, так как в маршруте $A \xrightarrow{+1} \ldots \xrightarrow{+2} A \ldots \xrightarrow{+1} A$ должно быть чётное число переездов $A \leftrightarrow X$. ~~так как~~ ($A \leftrightarrow$ не A каждый раз сменяется, было $A \xrightarrow[\text{смен}]{\text{чёт}}$ стало A).

Тогда решения 1, 2, 4 не подходят, там $a+c$ – нечёт.

Ответ: 190 км,

~~ACBCBCBABA~~

25
11
ACBCBABABA → 85 мин
40 км
17 мин
15
7
190 км.



5) $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$

$t = \frac{x+1}{x-1}$

$xt - t = x+1$

$x = \frac{t+1}{t-1}$

$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{\frac{t+1}{t-1} - 1} = \frac{t-1}{2}$

$f(t) = \frac{t-1}{2}$

* f(1) не определено, так как там 1/0, но это не важно.

$f(\cancel{x})^{*} = \frac{1}{2}\cancel{x} - \frac{1}{2}$ $\boxed{f'(x) = \frac{1}{2}}$

$f(g)' = f'(g)\cdot g'$

Пусть $g_n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(x))\ldots)}_{n}$: $g_0(x) = x$, $g_1(x) = f(x)$, $g_n(x) = f(g_{n-1}(x))$

$g_n'(x) = f(g_{n-1}(x))' = f'(g_{n-1}(x))\cdot g_{n-1}'(x) = \frac{1}{2} g_{n-1}'(x) = \ldots =$

$= \frac{1}{2^{n-1}} g_1'(x) = \frac{1}{2^n}$

$g(x) = g_{10}(x) = \frac{1}{2^{10}}$

Ответ: $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$.

$\operatorname{tg}\alpha(x) = \frac{dg(x)}{dx} = g'(x)$.

7) Наибольшее 100-значное число подходит:

$S(10^N - 1) = S(\underbrace{99\ldots9}_{N}) = 9N$ $N = 100$:

При $1 \leq m \leq n = 10^N - 1$:

$S(m(10^N-1)) = S\left((m-1)\cdot 10^N + \overbrace{((10^N-1)-(m-1))}^{\geq 0}\right) =$

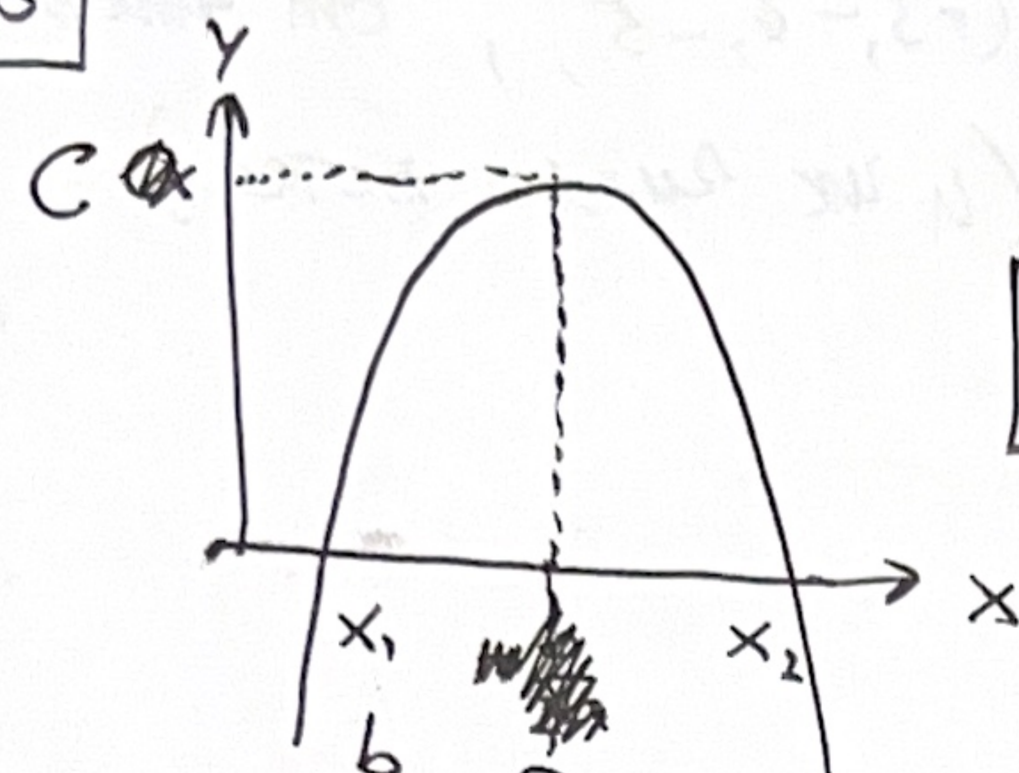
$= S(\underbrace{\overline{a_1a_2\ldots a_N}}_{N}\underbrace{\overline{b_1b_2\ldots b_N}}_{N}) = S(m-1) + (9N - S(m-1)) = \underline{\underline{9N}}$ $S(10^N-1)$

$\overline{a_1a_2\ldots a_N}$ — запись $m-1$ $\sum a_i = S(m-1)$

$b_i = 9 - a_i \Rightarrow \overline{b_1b_2\ldots b_N} = \underbrace{99\ldots9}_{N} - \overline{a_1a_2\ldots a_N}$ $\sum b_i = 9N - \sum a_i$

Ответ: $10^{100} - 1$.

6



$-\frac{b}{2A} = 0$

~~$y = a - bx^2$~~

$\boxed{Y = C - Ax^2}$

ну кто так обозначает правильно $c - ax^2$, ~~тьфу~~

ширина

$x_2 - x_1 = 24$ $\qquad$ $x_1 x_2$ – корни.

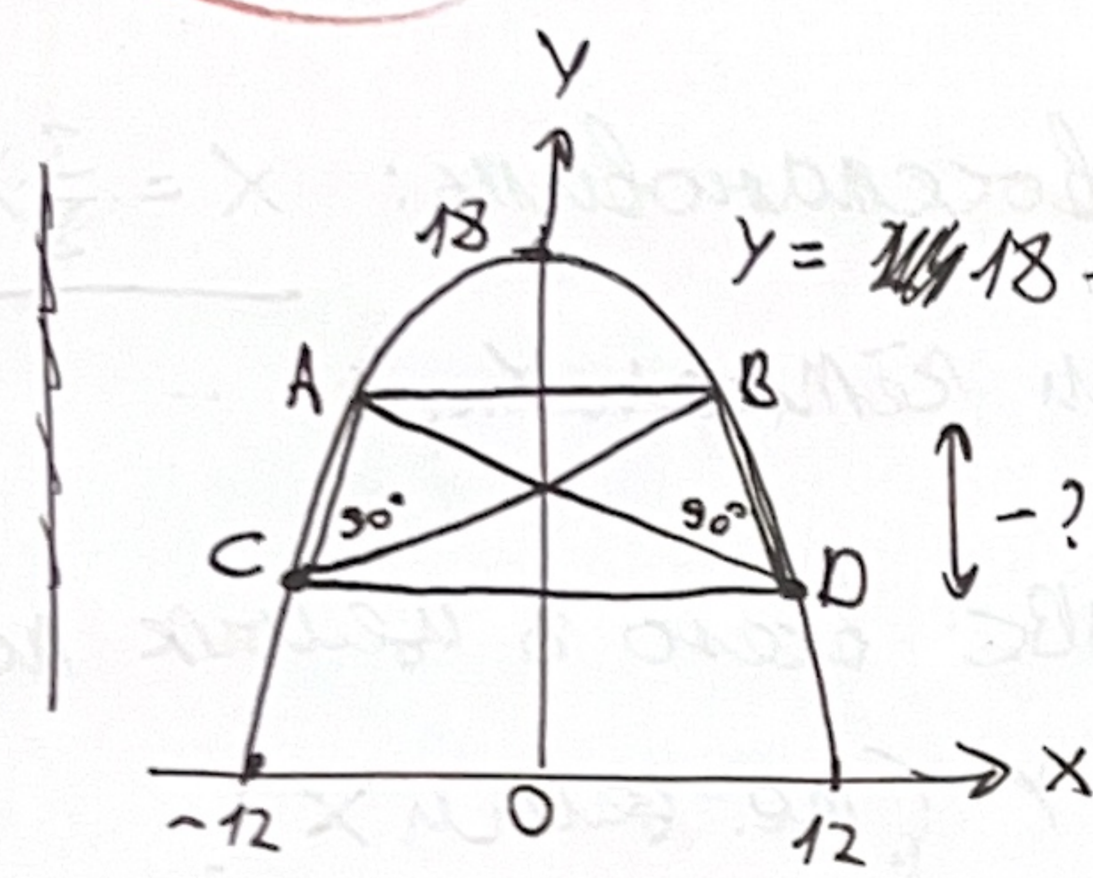
высота

$C = 18$

$$C - Ax^2 = 0$$

$$x_{12} = \pm\sqrt{\frac{C}{A}} \Rightarrow x_2 - x_1 = 2\sqrt{\frac{C}{A}} = 24$$

$$\sqrt{\frac{18}{A}} = 12$$



$$A = \frac{18}{12^2} = \frac{1}{8}$$

144

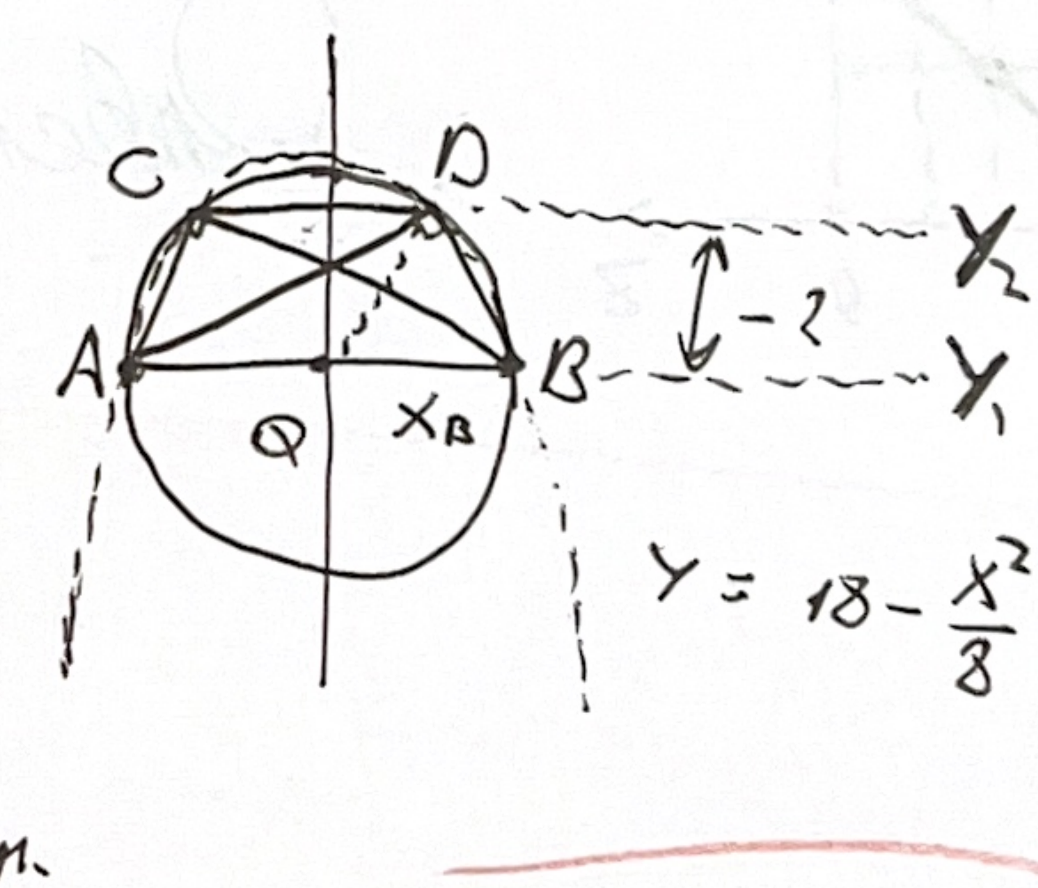
$$x_{12} = \pm\sqrt{18\cdot 8} = \pm 12$$

$\angle ACB = \angle ADB = 90° \Rightarrow (ABCD)$ – окр. с диаметром AB.

$AB \parallel CD \parallel OX$.

$\Downarrow$

$A \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow D$ – симметричны отн. OY, так как парабола симметрична OY. и $AB \perp OY$.



$y_1 = 18 - \frac{x_B^2}{8}$ $\qquad$ $Q = (0, y_1)$

центр окружн.

$y_2 = 18 - \frac{x_D^2}{8}$

$DQ^2 = BQ^2$: окружность, её радиусы? $\Rightarrow x_D^2 + (y_1 - y_2)^2 = x_B^2$

$$\frac{(x_D^2 - x_B^2)^2}{64} = x_B^2 - x_D^2$$

$$x_B^2 - x_D^2 = 64$$

$y_2 - y_1 = \frac{x_B^2 - x_D^2}{8} = 8$ $\qquad$ Ответ: 8.

8 Для удобства сместим всё на $(-3,-4,-5)$, от этого „целостность" точек не нарушится: (и их число тоже)

$(3\ 4\ 5)\ (11\ 10\ 6)\ (5\ 8\ 9)$

$A(0\ 0\ 0)\ B(8\ 6\ 1)\ C(2\ 4\ 4)$

ABC – плоскость с нормалью $\vec{n} = \{2,-3,2\}$

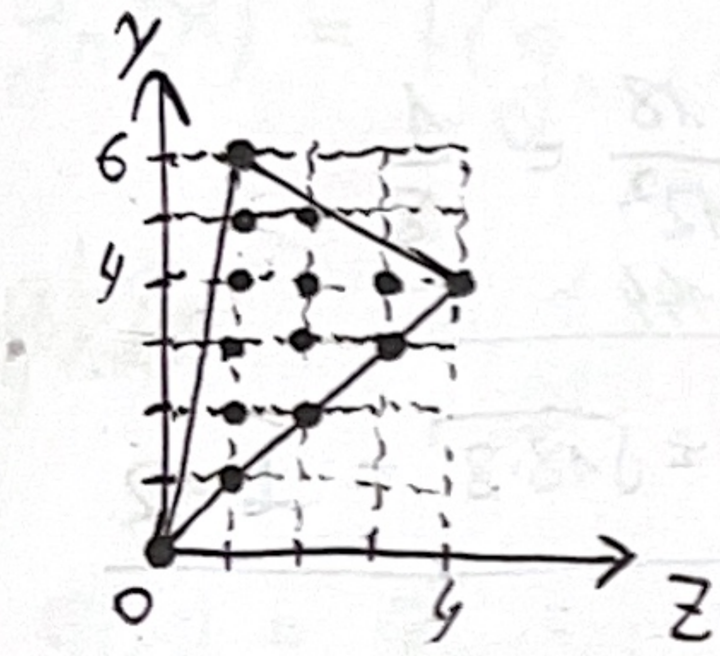
$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$

$2X - 3Y + 2Z = 0$

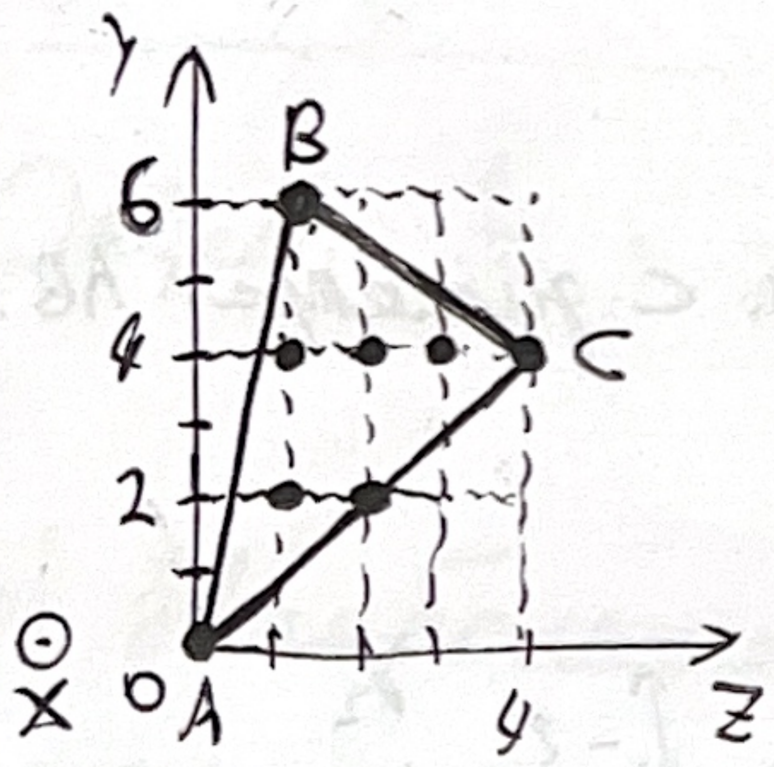
Спроецируем это на плоскость YZ. При такой проекции разные целые точки → разные целые точки. нецелые некоторые ↗

X можно восстановить: $X = \frac{3}{2}Y - Z$

X был целый при чётном Y.



на YZ в △ABC всего 8 целых точек с чётным Y (т.е. целым X).



Ответ: 8.

Черновик

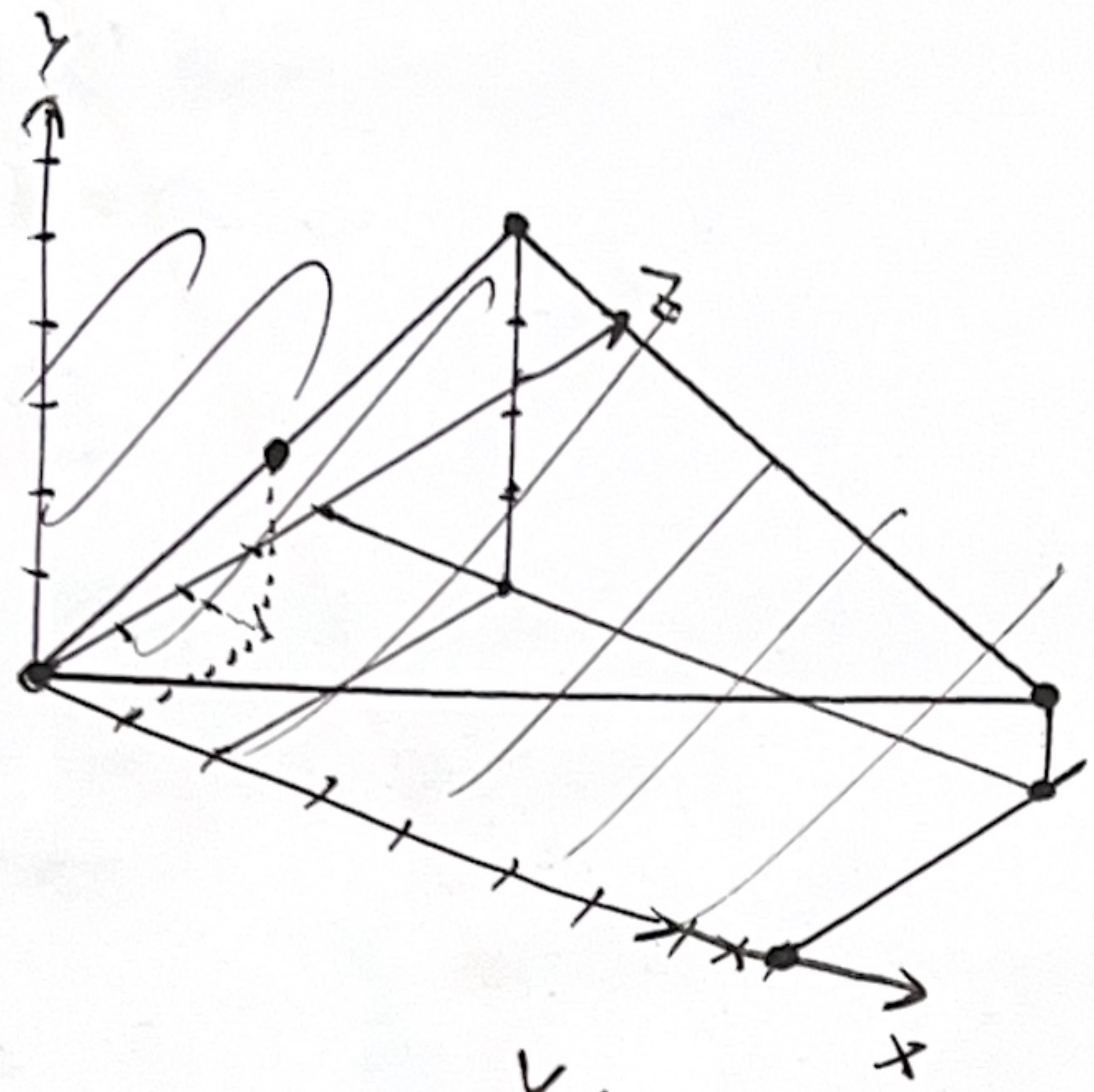
$S(10^n - 1) = 9n$

$S(k(10^n - 1)) = \cancel{S(k\cdot 10^n - k)}$

$= S\big((k-1)\cdot 10^n + (10^n - 1) - (k-1)\big) = S(k-1) + 9n - S(k-1) = 9n$

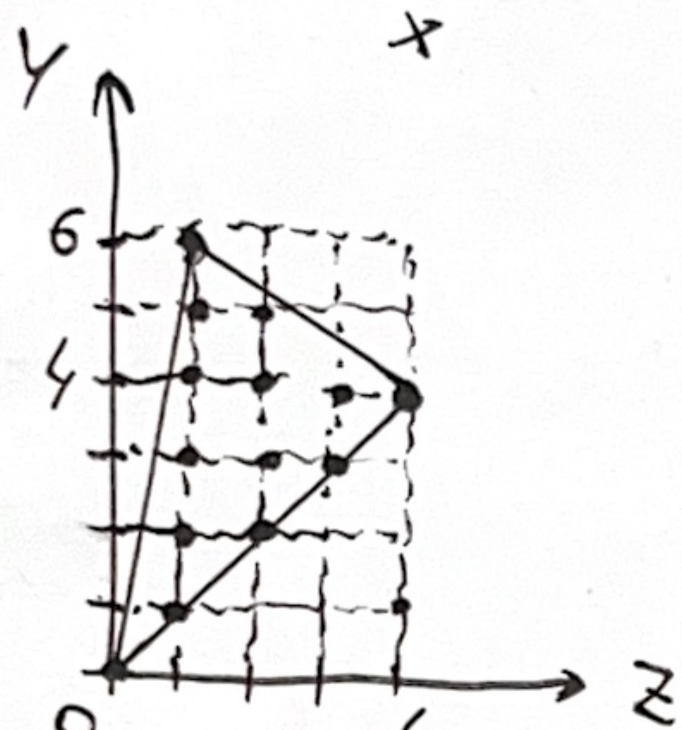
(0, 0, 0)
(8 6 1)
(2 4 4)
(1, 2, 2)

$\boxed{\vec{n} = \{1, -\frac{3}{2}, 1\}}$



$\vec{n} = \{2, -3, 2\}$ $d = 0$

Проекция на YZ:



	$C_6^3 = 20$	$C_6^2 = 15$	$C_6^1 = 6$	$C_6^0 = 1$
$C_5^2 = 10$	$\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = 1$ 200	$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = 3$ 450	$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = 3$ 180	$\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} = 1$ 10
$C_5^1 = 5$	$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 3$ 300	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 6$ 450	$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = 3$ 90	$\cancel{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}}$
$C_5^0 = 1$	$\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = 3$ 60	$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = 3$ 45	$\cancel{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}}$	$\cancel{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}$

200	200
450	650
180	830
10	840
300	1140
450	1590
90	1680
60	1740
45	1785
	what