0 221469 280004

22-14-69-28
(40,10)

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 4

Место проведения Москва
город

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов" ~~по~~
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Розмадзе Никиты Ираклиевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 лист

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

**Итоговая оценка:**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Σ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ∓ | ± | ± | + | + | − | + | − | 56 | |
| 4 | 8 | 8 | 12 | 12 | 0 | 12 | 0 | | |

56 (пятьдесят шесть)

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

22-14-69-28
(40.10)

Черновик

в командах

1 вратарь — всего 2 вратаря

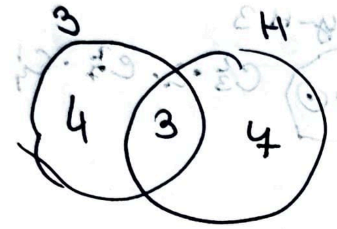
2 защ — 4 защ — $S(mn) = S(n)$

и 3 нап — 7 нап — ~~$S(mn)$~~

3 универсала — $S(mn+n)$

защ — нап

Выбрать вр: 2 способа — $C_2^1 = 2$

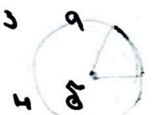


Пусть защитник — защитник

$C_4^2 \cdot C_{10}^5$ — З и любых

$C_7^3 \cdot C_7^2$ — Н и любых

1з 1н — 2з 9 — 2н 8 — 1у е



з н

а б

а е

с д

Все универсалы

Пусть выбрано 0 универс.

$C_4^2 \cdot C_7^3$

1 универс. у → З $C_4^1 \cdot C_7^3$

у → Н $C_7^2 \cdot C_4^2$.

2 универсал у → ЗЗ

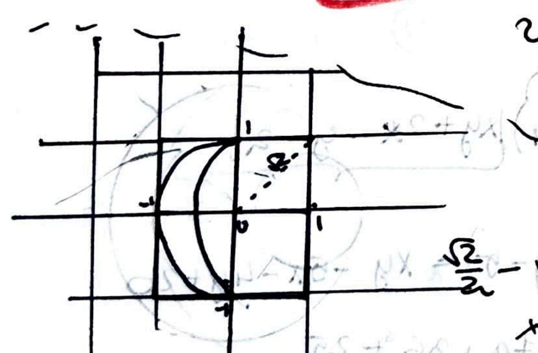
у → НН

у → ЗН

103

206

$\times 99$, $11$: $99$, $99$, $1089$



$\frac{\sqrt{2}}{2}$ — половина диагонали

$\times 99$, $11$ — $\times 9$, $9 = \frac{9}{8} = 72$

$S(n)$ — сумма цифр $n \in \mathbb{Z}$ — 80 знаков

$m = 2$ — $S(9\ldots9) \cdot k$

$1 \le m \le n$

$S(mn) = S(n)$

$n$ — $a_1 \ldots a_{80}$

$S(n) = a_1 + \ldots a_{80}$

$\times 9$, $2$ — $182$ — $\times 9$, $3 = 18$

$mn =$ $\times 999$, $2 = 1998$

$99\ldots9 \cdot k$ — $k+1$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

① Черновик

выбрать вратаря $C_2^1$ – 2 способа

Пусть среди выбранных 0 универсалов:

$C_4^2 \cdot C_7^3$

1 универсал:

• универсал защ

$\frac{C_7^3}{4} \cdot \frac{C_3^1 \cdot C_4^2}{3}$

• универс нап

$\frac{C_3^1 \cdot C_7^2}{4} \cdot C_4^2$

у — 3: $\frac{C_4^1}{3} \cdot \frac{C_7^3}{4}$ $C_3^1$

у — 4: $\frac{C_4^2}{3} \cdot \frac{C_7^2}{4}$ $C_3^1$

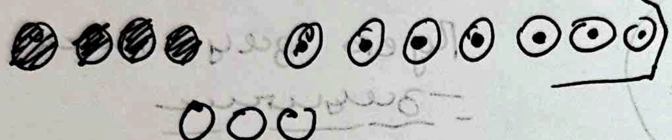
2 универсала:

у — 33: $\frac{C_3^2}{3} \cdot \frac{C_7^3}{4}$

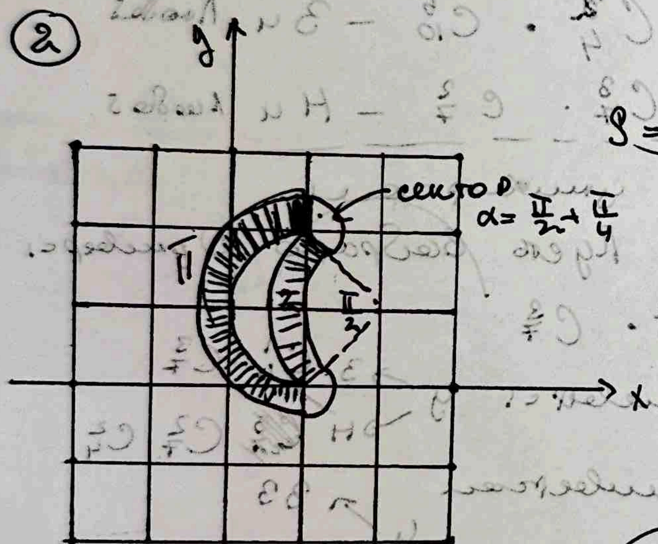
у — 44: $\frac{C_4^2}{3} \cdot \frac{C_3^2 \cdot C_7^1}{4}$

у — 43

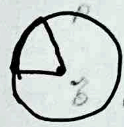
$C_3^2 \cdot 2 \cdot C_7^2 \cdot C_4^1$



②




$S = \pi r^2$



~~(3) $(xy+2x-y-2)$~~

③ $\begin{cases} \underbrace{(xy+2x-y-2)}|y-x-10| = \overset{a}{(x-4)}\underbrace{(xy+2x-y-2)} \\ \sqrt{y-x+8} = \overset{b}{y-5} \end{cases}$

$(x-4)(y-5) = xy - 5x - 4y + 20$

$y-5-x+4 = y-x-1$

$ab : 4+a+3b+25$

$20-28-15 = -23+25$

$x(y+2)-(y+2)$

$(x-1)(y+2) = ab|b-a+7$

a b

$y+2-x+1$ $y+x+3-13$

22-14-69-28 (40.10)

Черновик

$$\begin{cases} ab|b-a-18| = (a-3)|ab| \\ \sqrt{b-a+5} = b-7 \end{cases}$$

$\overbrace{99 \ldots 99}^{90}$

для $n=1 \ldots 20$

$2 \cdot 10$

$a = x-1$

$b = y+2$

$$\begin{cases} b > 7 \\ b > a-5 \\ a < b+5 \end{cases}$$

$b - a + 5 = b^2 - 14b + 49$

$$\begin{cases} (x-1)(y+2)|y-x-10| = (x-4)|(x-1)(y+2)| \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

$|ab|$ при $b \geq 0$

$= |a| \cdot b$

$y \geq 5$

$y \geq x-8 \rightarrow x \leq y+8$

$y - x + 8 = y^2 - 10y + 25$

$x = -y^2 + 11y - 17$

$(y+2)\left((x-1)|y-y-10| - (x-4)|x-1|\right) = 0$

при $x \geq 1$ $(y+2)(x-1)\left(|y-x-10| - x-4\right)$

$y = -2$

$x = 1$

1) $y = -2$: $\sqrt{-x+6} = -7$ — не корень

$x = 1$ : $\sqrt{y+7} = y-5$

$y \geq 5$ $\quad y + 7 = y^2 - 10y + 25$

$y^2 - 11y + 18 = 0$

$(y-2)(y-9) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = 9 \end{array}\right.$$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик

$(x-4)|(x-1)(y+2)|$

$$\begin{cases} (x-1)(y+2)|y-x-10| = (x-4)|(x-1)(y+2)| \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

$\frac{a}{2} - \frac{1}{2}$

$(y+2)((x-1)|y-x-10| - (x-4)|x-1|)$

$\dfrac{\frac{a}{2}-\frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2}$

при $x \geq 1$

$(x-1)(|y-x-10| - x+4)$

при $y \geq x+10$

$(y-x-10-x+4)$

$\frac{a-1}{2}$

$y = 2x+6$

и т.д.

$\frac{a}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

$\dfrac{\frac{a}{2}-\frac{1}{2}}{4}$

⑤

$y = f(x)$

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$

$f(5) = 2$

$f(-3) = -2$

$f(-1) = -1$

$f(0)$

$\frac{x+2}{x-2} = \frac{x-2+4}{x-2}$

$= 1 + \frac{4}{x-2}$

$f\left(\frac{f(x)+2}{f(x)-2}\right) = \frac{2}{f(x)-2}$

$a = \frac{2}{x-2}$

$x \neq 2$

$a \neq 1$

$a \neq 0$

$y = kx+b$

$f(f(x)) = k(kx+b)+b = k^2x + b(k+1)$

при $a_0 \geq a_1$

$f(1+2a) = a$

$a=2$

$a=3$

$a+4$

$f(2a+1) = a$

$f(5) = 2$

$f(7) = 3$

$f(9) = 4$

$f(f(2a+1)) = f(a)$

$f(a) = f(f(2a+1))$

$a = 2a+1$

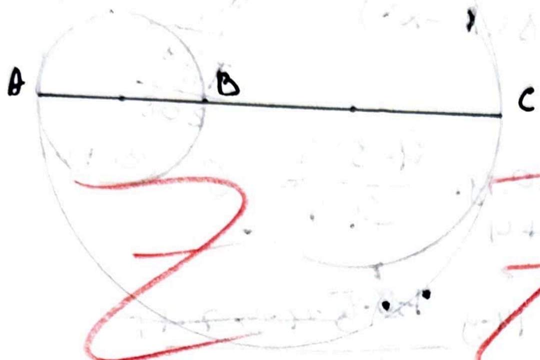
$y = a+1$

22-14-69-28 (40.10)

Черновик

(4) $S_1(n)$

$AB = 13$ км $-5$ мин
$BC - 27$ км $-13$ мин
$AC - 19$ мин нош




~~сеч~~
$AB = \pi r_1$
$BC = \pi r_2$

$AB + BC - \pi(r_1 + r_2)$
$= R\pi = AC = 40$ км

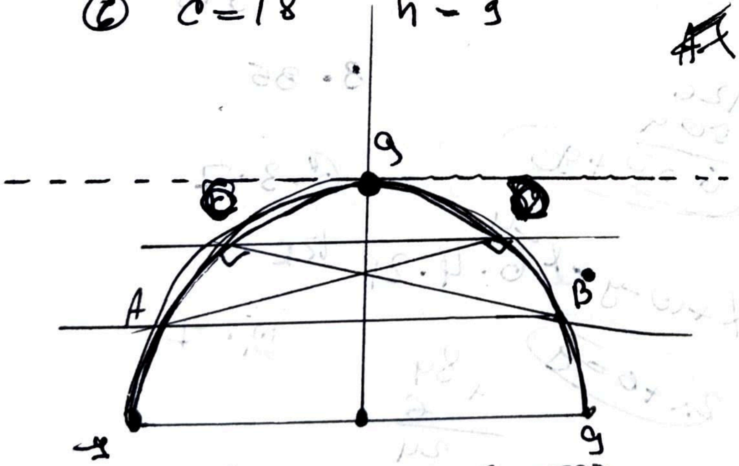
95 минут
Пусть он проехал $a$ раз м/з $AB$
$b$ м/з $BC$

$\Rightarrow a \cdot 5 + b \cdot 13 + c \cdot 19 = 95$ $\quad c$ м/з $AC$ $\quad a, b \in \mathbb{Z}_+$

$5a + 13b \,\vdots\, 19$

1) $5a + 13b = 19$ — нет реш
2) $= 38$ $\quad a = 5$, $b = 13$
3) $= 57 =$
4) $76$
5) $95$

(6) $d = 18$ $\quad h = 9$



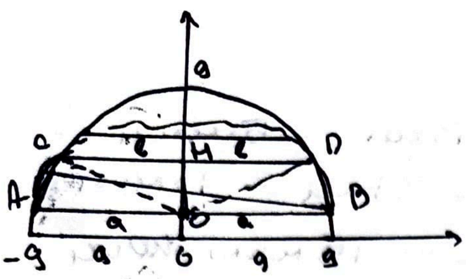

~~$A$~~ $F(0) = a$
$\Rightarrow a = 9$
$F(9) = 0$

т.е.
$0 = 9 - 81b$
$81b = 9$
$b = 9$
$y = 9 - 9x^2$
$= \frac{1 - x^2}{9}$

~~$A(a; \frac{1-a^2}{9})$~~ ~~$B(b; \frac{1-b^2}{9})$~~
~~$C(c; \frac{1-c^2}{9})$~~ ~~$D(C$~~

$A(-x; \frac{1-x^2}{9})$ $\quad B(x;$ $\quad \frac{1-x^2}{9}$

черновик




$f(x) = a - bx^2$

$f(0) = 9 = a$

$f(9) = 0 = 9 - bx^2 = 9 - 81b$

$b = 9$

$9(1 - x^2)$

$A(-a; 9(1-a^2))$

$B(a; 9(1-a^2))$

$C(-b; 9(1-b^2))$

$D(b; 9(1-b^2))$

$\times 16$, 13, 48, $+16$, 208

$\frac{3\pi 4^2}{8}$ $\quad x + 10 - y.$ $\quad \frac{4 \cdot 3^{24}}{2!\, Y} = 6$ $\quad$ 207

$-x + 4$

$\frac{2\pi - 3\pi}{4}$ $\quad$ 14-y $\quad \frac{\cancel{7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}}{4 \cdot 731}$

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

$= \frac{4\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$ $\quad = 7.5$

$OA = OB = 9$

$CH = DH = b$

$HO = 9(1-b^2) - 9(1-a^2)$

$9 - 9b^2 - 9 + 9a^2$

$= 9a^2 - 9b^2 = 9(a-b)(a+b)$

$\times 35$, 6, 30, $+18$, 210 $\quad 3 \cdot 4 \cdot 35$

$6 \cdot 3 \cdot 21$

$CO^2 = 81(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + b^2 = a^2$

$\times 63$, 6, 18, $+36$, 378

$1 + \frac{1}{2}$ $\quad a^2 + b^2 = 81(a^2 - b^2)^2$

$+ \sqrt{2}$

1035

$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ 21 $\quad$ 720 $\quad$ 126, $+504$

$=$ $\quad$ 630 + 90 $\quad$ 630 + 90

$+315$

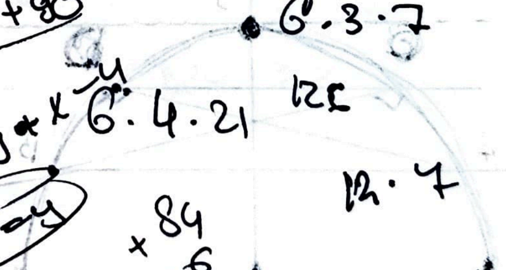
$\frac{4+2+4\sqrt{2}}{24}$

$\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ $\quad + 498$, 878, 1176

$1,5 + \sqrt{2}$

8 · 85

6 · 3 · 7



126

$x + 10 - y + x$ $\quad 6 \cdot 4 \cdot 21$

$2x + 0 = y$

12 · 7

$+84$, 6, 24, $+48$, 504

13 $\quad$ 65 + 27 + 40

26 $\quad + 1046$, 1176, 2222

39 $\quad$ 65 + 67

52 $\quad$ 132

65 $\quad$ 27, $+120$, 147, $+65$, 200, 12

48

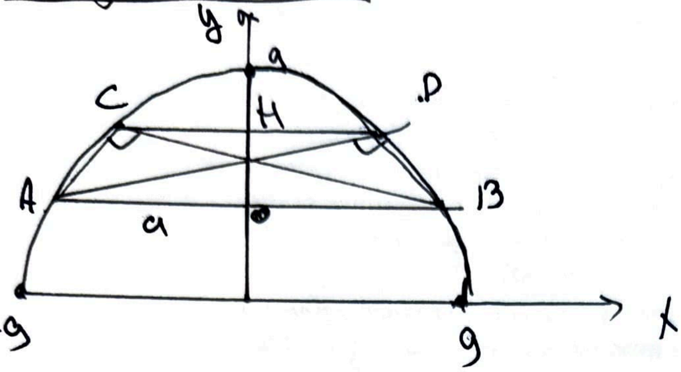
91

$4x^2 + 3x - 13 = 0$

$y^2 + 3y - 4 \cdot 13$

Чистовик

Задача 6




$f(x)$ - парабола

$f(x) = a - bx^2$

$f(0) = 9 = a$

$f(9) = 0 = 9 - b81$

$\Rightarrow b = 9$

$f(x) = 9 - 9x^2$

Заметим, что

ABDC вписанный

четырехугольник ($\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$)

причем AB - диаметр

$\Rightarrow$ O - центр окр-ти

точки A, B, D, C в окр-ти и параболе

$\Rightarrow OC = OA = OD = OB$

$A(-a; 9 - 9a^2)$ $B(a; 9 - 9a^2)$

$C(-b; 9 - b^2)$ $D(b; 9 - 9b^2)$

$OA = OB = a$

$CH = HD = b$

$HO = 9 - 9b^2 - 9 + 9a^2 = 9(a^2 - b^2)$

$\Rightarrow CO = OD = b^2 + 81(a^2 - b^2) = a^2$

$\Rightarrow \underbrace{a^2 - b^2}_{0} = \underbrace{81(a^2 - b^2)}_{0} = a = b$

$\Rightarrow AB \equiv CD \Rightarrow \rho(AB; CD) = 0$

(из единственности таких в параболе)

Ответ: расстояние м/у базами

$= 0$

Чистовик

Задача 1

Выбрать вариантов $C_n^k$ = число ~~объ~~ба.

Пусть по итогу выбрано 0 универсалов:

тогда вар := $C_4^2 \cdot C_7^3 = 6 \cdot 35 = 210$

если 1 универсал:

$у-3: \frac{C_3^1 \cdot C_4^1}{3} \cdot \frac{C_7^3}{Н} = 420$

$у-Н: \frac{C_4^2}{3} \cdot \frac{C_3^1 \cdot C_7^2}{Н} = 378$ $+ = 798$

если 2 универсала:

$у-33: \frac{C_3^2 \cdot C_4^0}{3} \cdot \frac{C_7^3}{Н} = 105$

$у-НН: \frac{C_4^2}{3} \cdot \frac{C_3^2 \cdot C_7^1}{Н} = 126$

$у-Н3: \frac{2 \cdot}{Н3} \frac{C_3^2}{у} \cdot C_4^1 \cdot C_7^2 = 504$

$3^{4}_{Н}$

если 3 универсала:

$у-ННН: \frac{C_3^3 \cdot C_7^0}{Н} \cdot \frac{C_4^2}{3} = 6$

$у-НН3: \frac{C_3^3 \cdot C_4^1}{3} \cdot \frac{C_7^1}{Н} = 84$

$у-Н-33: \frac{C_3^2 \cdot C_4^0}{3} \cdot C_7^2 = 21$

Тогда всего вариантов:

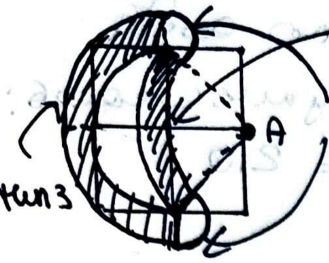
$2(210+798+378+105+126+504+6+84+21)$

$= 2 \cdot 2222 = 4444$

Ответ: 4444 способа

Чистовик

Задача 2




Всего: 2Т1 + Т2 + Т3

Тип 1) часть окружности радиусом $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$S = \frac{3\pi r^2}{8} = \frac{3\pi \frac{1}{2}}{8}$

$\Rightarrow 2T_1 = 2S = \frac{3\pi}{8}$

Тип 2) 1 кольцо (часть) созданное из двух концентрич окр-ей в точке A радиусом $\sqrt{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$S = \frac{\pi(\sqrt{2})^2 - \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4} = \frac{2\pi - \frac{1}{2}\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$

Тип 3) кольцо (часть) из двух концентрич окр радиусами 1 и $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S = \frac{\pi\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \pi(1)^2}{2} = \frac{1{,}5\pi + \sqrt{2}\pi - \pi}{2}$

$= \frac{\pi + 2\sqrt{2}\pi}{4}$

$S_{общее} = \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi + 2\sqrt{2}\pi}{4}$

$= \pi\left(\frac{6}{8} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Ответ: $S_{общее} = \pi\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Черновик

Задача 3

$$\begin{cases} (x-1)(y+2)\,|y-x-10| = (x-4)\,|(x-1)(y+2)| \\ \sqrt{y-x+8} = y-5 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} y \geq 5 \\ y \geq x-8 \end{cases}$

2) из п.1 следует, что $(y+2) > 0$
т.е. можно сократить (положит. число).

$(x-1)|y-x-10| - (x-4)|x-1| = 0$

при $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq x+10 \end{cases}$: $(x-1)(y-x-10-x+4) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \quad (а) \\ y = 2x+6 \quad (б) \end{array}\right.$

а) $\sqrt{y+7} = y-5$

$y+7 = y^2 - 10y + 25$

$y^2 - 11y + 18 = 0$

$\left[\begin{array}{l} y=9 \\ y=2 \end{array}\right.$ > не подходит усл $y \geq x+10$

$\boxed{y \geq 5}$

б) $\sqrt{x+14} = 2x+1$

$x \geq -14$; $x \geq -\frac{1}{2}$

$x+14 = 4x^2 + 4x + 1$

$4x^2 + 3x - 13 = 0$

$D = 9 + 16 \cdot 13 = 217$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8}$

подходит $x = \frac{-3+\sqrt{217}}{8}$

при $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \leq x+10 \end{cases}$: $\left[\begin{array}{l} x=1 \quad (а) \\ y=14 \quad (б) \end{array}\right.$

а) $\left[\begin{array}{l} y=9 \text{ — подходит} \\ y=2 \text{ — не подходит} \end{array}\right.$ $y \geq 5$

$-3+\sqrt{217} > -3+14 = 11$

$\frac{y}{8} > 1$

$y = \frac{-3+\sqrt{217}}{4} + 6$

$= \frac{21+\sqrt{217}}{4}$ $\cancel{\geq}$

б) $\sqrt{22-x} = 9$

$22 - x = 81$

$x = -59$ — не подходит $x \geq 1$

$\frac{-3+\sqrt{217}}{8} + 10 = \frac{77+\sqrt{217}}{8}$

при $\begin{cases} x \leq 1 \\ y \geq x+10 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x=1 \text{ — были рассмотрен случаи с } x=1 \\ y-x-10+x-4=0 \Rightarrow y=14 \; (б) \end{array}\right.$ => не подходит

при $\begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq x+10 \end{cases}$; осталось рассмотреть один случай

а) $\sqrt{22-x} = 9$

$22 - x = 81$

$x = -59 \leq 1 \Rightarrow$ подходит

$14 \geq -59+10$

$y = 2x+6$

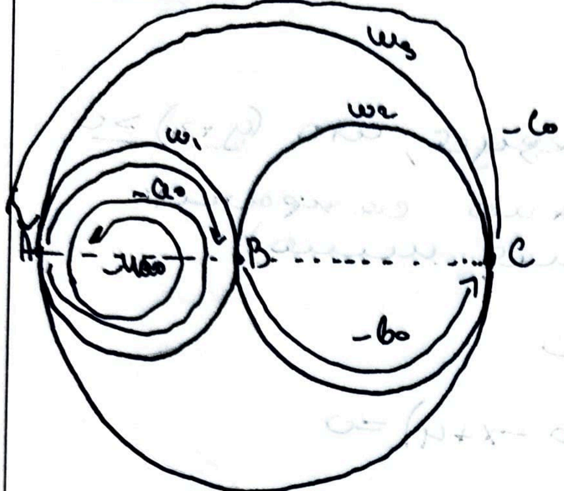
$\sqrt{x+14} = 2x+1$

в этом случае при данных усл подходит $(x;y) = \left(\frac{-3+\sqrt{217}}{8}; \frac{21+\sqrt{217}}{4}\right)$

Ответ: $(x;y) = (1;9); (-59;14);$
$\left(\frac{-3+\sqrt{217}}{8}; \frac{21+\sqrt{217}}{4}\right)$

Чистовик

Задача 4




$\cup AB = 13$км $-$ 5 мин

$\cup BC = 27$км $-$ 13 мин

$\cup AC - ?$км 19 мин

Заметим что $\frac{AB}{2} = r_1$

$\frac{BC}{2} = r_2$

$r_1 + r_2 = r_3$

$\cup AB = \pi r_1$, $\cup BC = \pi r_2$ $\Rightarrow \cup AB + \cup BC = \pi(r_1+r_2) = \pi r_3 = \cup AC$

т.е $\cup AC = 40$км $= 40$

Пусть автомобиль проехал $a$ раз дугу $AB$, $b$ раз $BC$ и $c$ раз $AC$: $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$

$\underbrace{5a + 13b}_{\vdots 19} + \underbrace{19c}_{\vdots 19} = \underbrace{95}_{\vdots 19}$

$\Rightarrow$ 1) $5a + 13b = 0$ $\Rightarrow 19c = 5$ $\Rightarrow$ автомобиль не окажется в т.A

2) $5a + 13b = 19$ нет реш в $\mathbb{Z}_+$

3) $5a + 13b = 38$
$b_0 = 1$ $a_0 = 5$
− единств реш
$\Rightarrow c_0 = 3$

4) $5a + 13b = 57$
$b_0 = 4$ $a_0 = 1$ $\Rightarrow c_0 = 2$
− единств реш

5) $5a + 13b = 76$
$b_0 = 2$ $a_0 = 10 \Rightarrow c_0 = 1$
− единств реш

8) $5a + 13b = 95$
$b_0 = 5$ $a_0 = 6 \Rightarrow c_0 = 0$

~~Случай 8 не подходит ... единств реш~~
~~т.к. ... $c_0 = 0$~~
~~... ... C~~
~~... $a_0$ и $b_0$ ... $c_0$ ...~~

Инвариант: четность $a_0 + b_0$ одинаковы т.к. без циклов можно вернуться в т.A через $c_0 + b_0 + a_0$ или $b_0 + a_0$ или, $a_0 + b_0 + b_0 + a_0$ или $a_0 + b_0 + c_0$
т.е четность сохраняется
$\Rightarrow$ варианты 8 и 4 не подходят
Случай 5 не подходит т.к. $a_0$ и $b_0$ четны $\Rightarrow$ вернутся в т.A, но $c = 1$ уведет из т.A
$\Rightarrow$ единств случай $a_0 = 5$, $b_0 = 1$, $c_0 = 3$ $S = 65 + 27 + 120 = 212$км
Пример сверху

Ответ: 212 км

чистовик

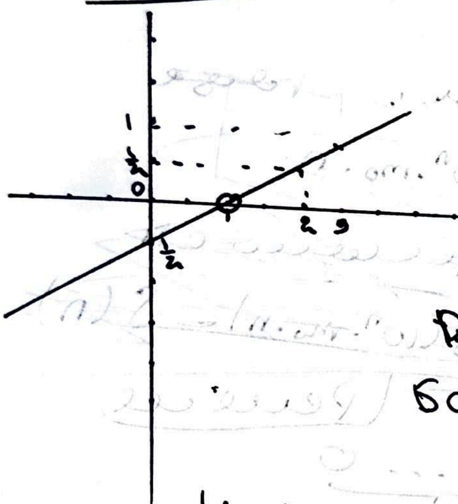
## Задача 5

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$ Пусть $a = 1 + \frac{4}{x-2}$

$F\left(1 + \frac{4}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$

$F(a) = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}$ Тогда: $F(a) = \frac{a-1}{2}$

— линейная функция с выколотой точкой $(1;0)$ $\underline{a \neq 1}$ т.е. $F(a) \neq 0$




$g(x) = \underbrace{F(F\ldots F(x)))}_{12}$

$= \frac{a}{2^{12}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2^{12}}$

Док-во по инд-ции:

база $F(F(x)) = \frac{\frac{a}{2} - \frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{4}$

$= \frac{a}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

Инд: для $k$:

$\frac{a}{2^k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2^k}$

для $k+1$: $\frac{\frac{a}{2} - \frac{1}{2}}{2^k} - \ldots = \frac{a}{2^{k+1}} - \frac{1}{2} - \ldots \frac{1}{2^{k+1}}$ ч.т.д.

$g'(x) = \frac{1}{2^{12}}$ — тангенс угла наклона касательной (производная — коэффициент наклона.)

**Ответ:** $\frac{1}{2^{12}}$

Чистовик

Задача 7

Ответ: $\overline{\overbrace{99 9\ldots\ldots 99 9}^{90}} = n$

Решение

$n = \underbrace{9\ldots9}_{90} \Rightarrow m(n+1) = m\cdot\underbrace{10\ldots0}_{91}$

$\Rightarrow mn = m\cdot\underbrace{10\ldots0}_{91} - m$

$= \overline{a_0 a_1\ldots a_n}\,\underbrace{10\ldots0}_{91} - \overline{a_0 a_1\ldots a_n}$

$\boxed{\Sigma=9}$ $(100\ldots0 - m = 99 9\ldots(9-m_i)\ldots$

$= \overline{a_0 a_1\ldots a_n 99\ldots(9-a_i)(9-a_{i+1})\ldots} \Rightarrow$ $S(n)$ — сокращ

$= 9+9+\ldots 9+9$

причем: $a_0 + 9 - a_0 = 9$ $\Sigma = 9$

а также $m < n \Rightarrow$ разрядов

хватит для каждой цифры числа $m$

и при этом сумма цифр $S(mn) = S(n)$

т.к. для каждого $a_i$: $a_i + 9 - a_i = 9$,

Ответ: $\underbrace{99\ldots99}_{90} = n$