0 300865 980005

30-08-65-98
(39.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

ДЕШИФР

Вариант ______

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников «Ломоносов»
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Редько Кирилла Валерьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
30-08-65-98	56	4	0	12	12	12	12	0	4

56 (пятьдесят шесть)

30-08-65-98 (39.3)

Черновик:

№1

Вратарь: 3

Без: $3 \cdot C_5^2 + C_6^3$

$$\begin{array}{r} 187 \\ \times\ 45 \\ \hline 935 \\ 748\ \ \\ \hline 8415 \end{array}$$

по 1 3

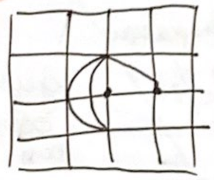
$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a} + \frac{2ca-2b^2+2b}{2b} + \frac{2ab-2c^2+2c}{2c}$$

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c + 3$$

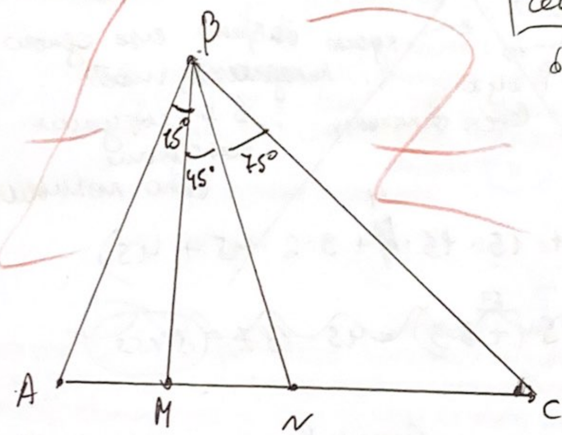
$$a+b+c \overset{?}{\geq} \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$$

abc

№2



392 | 8



$60 + 75 = 135°$

$S_{ABM} \cdot S_{NBC} = 3$

$S_{ABM} + S_{NBC} = 5$

$x^2 - 5x + 3 = 0$

$D = 25 - 12 = 13$

$S_{ABM} = \frac{AB \cdot BM}{2} \sin 15°$

$S_{NBC} = \frac{BC \cdot BN}{2} \sin 75° = \cos 15°$

$X = 5 + \frac{BM \cdot BN}{2} \cdot \sin 45°$

$x + y = A$

$xy = B$

$A(A^2 - B) = 19$

$\frac{AB \cdot BM \cdot BC \cdot BN}{8} \sin 30° = 3$

$AB = -6$

$A^3 =$

$AB \cdot BM \cdot BC \cdot BN = 48$

$\frac{AB \cdot BC}{2} \sin 45°$

$(1000-1)(1000-1)$

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times\ 33 \\ \hline 297 \\ 297\ \ \\ \hline 3267 \end{array}$$

$1000000 + 1 = \ldots - 2000$

чистовик:

Задача №3

У 4 студентов в команде 0 универсантов, 1, 2, 3 соответственно

0: $3 \cdot C_5^2 \cdot C_6^3$

вратарь, защитники, нападающие.

1: $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot C_6^2 \cdot 8 / 21 \cdot C_9^2$

вратарь, универсал, 1-го ? из всех остальных

нужно взять обязательно одного защ. и двух нап, чтобы состав был полным

2: $3 \cdot C_3^2 \cdot 6 \cdot C_{10}^2$

вратарь, универсал

нужно выбрать еще одного нападающего, чтобы в ∀ случае нападение было полным

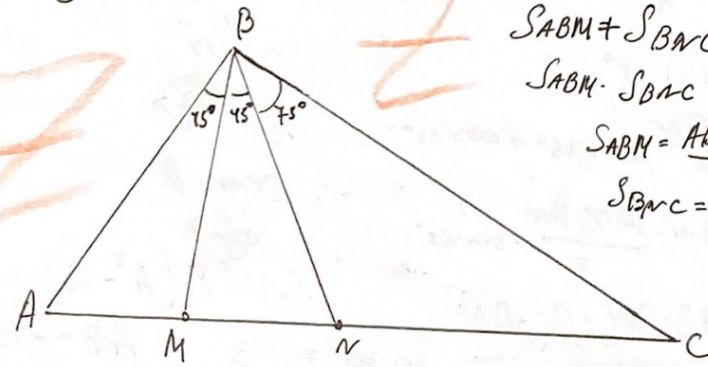
3: $3 \cdot 1 \cdot C_{11}^2$

2ух из всех остальных

Итого: $3(10 \cdot \overset{20}{\cancel{15}} + 15 \cdot 15 \cdot \overset{4}{\cancel{4}} + 3 \cdot 6 \cdot 45 + 45)$

$45(\cancel{40} + \overset{130}{\cancel{120}} + \overset{57}{\cancel{54}} + \cancel{3}\,3) = 45 \cdot 187 = 8455$

Задача №4



$S_{ABM} + S_{BNC} = 5$

$S_{ABM} \cdot S_{BNC} = 3$

$S_{ABM} = \underline{AB \cdot BM \cdot \sin 15^\circ}$

$S_{BNC} = \frac{BN^2 \cdot BC \cdot \sin 75^\circ}{2}$

$X = S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} \sin 135^\circ$

$= \underbrace{S_{ABM} + S_{BNC}}_{\cancel{3},\,5} + S_{BNM} = 5 + S_{BNM}$

$S_{BNM} = \frac{BM \cdot BN}{2} \sin 45^\circ \Rightarrow \frac{AB \cdot BC}{2\sqrt{2}} = 5 + \frac{BM \cdot BN}{2\sqrt{2}}$

$S_{ABM} \cdot S_{BNC} = \frac{AB \cdot BC \cdot BM \cdot BN}{4} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{2} \Rightarrow$

$\cancel{A}\ BM \cdot BN = \frac{48}{AB \cdot BC}$

30-08-65-98
(39.3)

$y = AB \cdot BC \Rightarrow \frac{y}{2\sqrt{2}} = 5 + \frac{48}{2\sqrt{2} \cdot y}$ $y \neq 0$

$\Rightarrow y^2 - 5 \cdot 2\sqrt{2}\, y - 48 = 0$

$D = 200 + 4 \cdot 48 = 392$

$y_{1,2} = \frac{10\sqrt{2} \pm \sqrt{392}}{2} = \frac{10\sqrt{2} \pm 14\sqrt{2}}{2}$

$= 12\sqrt{2}$; $\cancel{-2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{12\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 135° = \frac{12\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6$

Задача №5

$A = \frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ca - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c}$

Выделим целые части:

$A = 3 + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c$

Докажем, что:

$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$ при $a, b, c > 0$

домножим на abc

$*$ $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab$.

Не умоляя общности $a \geq b \geq c$

Тогда $\begin{cases} ab \geq ac \geq bc \\ ab \geq ac \geq bc \end{cases}$ ← применим транс-нерво

для данных наборов мест получаем что $*$ верна $\Rightarrow A \geq 3$ Пример: $a = b = c = 1$

(решение продолжается)

~~Черновик~~

Задача №3

$$|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|+\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=0$$

Занумеруем слагаемые слева-направо как 1, 2, 3.

Р. 3 слагаемое:

$$\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=\frac{|y|}{y}-\frac{|x|}{x}+2$$

Заметим, что оно ≥ 0 т.к $\frac{|a|}{a}=1$ или -1

Слагаемые 1 и 2 тоже ≥ 0

=> чтобы они в сумме давали 0, все они равны 0 =>

$$\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ x^2y+xy^2+6=0 \\ y<0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (x+y)(x^2-xy+y^2)=19 \\ xy(x+y)=-6 \\ x+y=-\frac{6}{xy} \end{array}$$

$$\cancel{x^2-xy+y^2=\frac{19}{-6}xy}$$

$$\cancel{x^2+\frac{25}{6}xy+y^2=0 \quad |:y^2}$$

$$\cancel{\frac{x}{y}=t,\ t<0 \Rightarrow t^2+\frac{25}{6}t+1=0 \Rightarrow 6t^2+25t+6=0}$$

$$\cancel{D=25^2-12^2=13\cdot 37}$$

$$\cancel{\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-25\pm\sqrt{13\cdot 37}}{12} \quad t<0 \Rightarrow}$$

$$\cancel{t=\frac{-25\pm\sqrt{13\cdot 37}}{12}}$$

$$\begin{array}{l} x+y=A \\ xy=B \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A(A^2-3B)=19 \\ AB=-6 \end{cases} \Rightarrow A^3=1 \Rightarrow x+y=1$$

=> $xy=-6$ => x и y по обратной ~~теореме~~

Виета корни $f(t)=t^2-t-6=0$

30-08-65-98
(39.3)

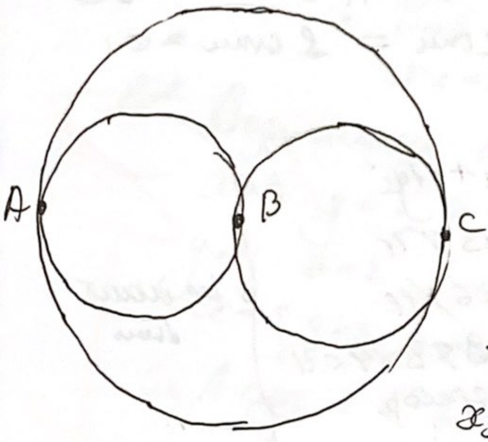
$f(t) = t^2 - t - 6 = 0$

$D = 1 + 24 = 25$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} = 3; -2$ т.к $x > 0$ то

$\boxed{x = 3 \quad y = -2}$

Задача №6



$t_0 = 85$ мин
$t_{AB} = 7$ мин
$t_{BC} = 11$ мин
$t_{AC} = 17$ мин

Пусть по дуге AB он проехал x раз по BC y по AC z

Тогда $x \cdot t_{AB} + y \cdot t_{BC} + z \cdot t_{AC} = 85$
$x, y, z \in \mathbb{Z}_+$

$\Rightarrow 7x + 11y + 17z = 85$

Допустим одна из переменных $= 0$:

$x = 0$: $11y + 17z = 85$ ⚡ по mod 17: $11y \equiv_{17} 0$
$y \geq 17$ ⚡ $y = 0$ $z = 5$ не может быть т.к. вее верного в A

$y = 0$: $7x + 17z = 85$ ⚡ по mod 17: $7x \equiv_{17} 0$
$x \geq 17$ ⚡ либо $x = 0$ $z = 5$ — не может быть т.к. не верного в A

$z = 0$: $7x + 11y = 85$ ⚡ по mod 7:
$11y \equiv_7 1 \Leftrightarrow 4y \equiv_7 1$ Переберем остатки y по mod 7:

$y \equiv_7 0$ — нет
$y \equiv_7 1$ — нет
$y \equiv_7 2$ — подходит
$y \equiv_7 3$ — нет
$y \equiv_7 4$ — нет
$y \equiv_7 5$ — нет
$y \equiv_7 6$ — нет

надо ⚡
$\Rightarrow y \equiv_7 2$
либо $y = 2$
либо $y \geq 9$ и ⚡

$y=2$: $7x+22=85 = 7x=63$ $x=9$

$\Rightarrow$ пара $\underline{x=9\ y=2}$ – подходит.

Теперь $x\geq 1, z\geq 1$

Тогда $x_1=x-1$ $y_1=y-1$ $z_1=z-1$

$7x_1+11y_1+17z_1=50$

Заметим, что одновременно x_1, y_1 и $z_1\geq 2$ быть не могут т.к. $7\cdot 2+11\cdot 2+17\cdot 2>50$

$\Rightarrow$ среди x_1, y_1, z_1 есть $=1$ или $=0$.

4 случаев:

$x_1=1$: $43=17z_1+11y_1$

$z_1=0$ – $43\not\vdots 11$

$z_1=1$: $26\not\vdots 11$

$z_1=2$: $\cancel{9}$ $43-34<11$

$z_1>2$ – перебор

$x_1=0$: $11y_1+17z_1=50$

$z_1=0$: $50\not\vdots 11$

$z_1=1$: $33\vdots 11 \longrightarrow y=4$ $z=2$ $x=1$

$z_1=2$: $16\not\vdots 11$

$z_1>2$ – перебор

$y_1=1$: $7x_1+17z_1=\cancel{43}\ 39$

$z_1=0$ $\cancel{43}\ 39\not\vdots 7$

$z_1=1$: $\cancel{26}\ 22\not\vdots 7$

$z_1=2$: $39-34<0$

$z_1>2$ – перебор

не может быть

$y_1=0$: $7x_1+17z_1=50$

$z_1=0$: $50\not\vdots 7$

$z_1=1$: $33\not\vdots 7$

$z_1=2$: $16\not\vdots 7$

$z_1>2$ – перебор

не может быть.

$z_1 = 0$: $7x_1 + 11y_1 = 50$

$y_1 = 0$: $50 \not\vdots 7$

$y_1 = 1$: $39 \not\vdots 7$

$y_1 = 2$: $50 - 22 = 28 \Rightarrow x = 5\ y = 3\ z = 1$

$y_1 = 3$: $17 \not\vdots 7$

$y_1 = 4$: $6 < 7$

$z_1 = 1$: $7x_1 + 11y_1 = 33$

4 mod 11:

$x_1 = 0\ y_1 = 3$ – уже получено.

Возможные пары:

$x = 9\ y = 2\ z = 0$ – не вернется в A

$y = 4\ z = 2\ x = 1$ – не вернется в A

$x = 5\ y = 3\ z = 1$ – все работает:

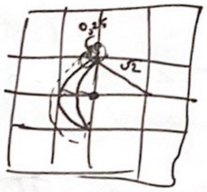
Из A едет в C потом 3 раза по окр BC и 5 раз по окр AC

$\Rightarrow$ проедет: $5 \cdot 15 + 25 \cdot 3 + \overset{\frown}{AC} = X$

$\overset{\frown}{AC} = \pi(AB + BC)$ $AB = \frac{15}{\pi}$ $BC = \frac{25}{\pi} \Rightarrow$

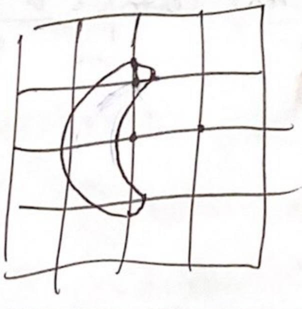
$\overset{\frown}{AC} = 40 \Rightarrow X = 150 + 40 = 190$ км

Задача №2 (черновик)

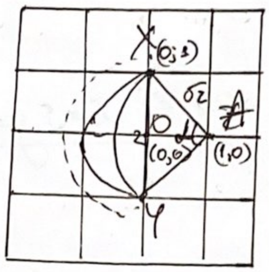


рас две новые окр $r + r = 0,25$

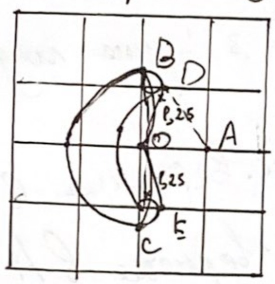
$2 - \sqrt{2}$



Задача №2 (чистовик)



Посмотрим, что произошло с утра. 1 Для этого & контур шмеля. Каждая его точка, лежащая на окр с ц. (0,0) удалилась на $r/2 = 0{,}25$ от центра. А каждая точка на внутренней дуге окр приблизилась к центру на 0,25



~~$x = 0{,}25$~~

~~$2 S_{пол.окр} = 2 \frac{\pi \cdot 0{,}25^2}{4}$~~

~~$S_{BC\ сектор} = \frac{\pi \cdot 1{,}25^2}{2}$~~

Теперь посмотрим, что изменилось по сравнению с предыдущим рисунком у нас прибавилось две маленькие четверти окр $r = 0{,}25 \Rightarrow 2 S_{четв.окр} = \frac{\pi \cdot 0{,}25^2}{2}$

и два сектора, отличающиеся от предыдущих окружностей радиусом на 0,25

Прибавка по $BC = \frac{\pi \cdot 0{,}25^2}{2}$

~~прибавка по DE~~ =

S_{DE} Посчитаем α: $4 = 2 + 2 - 2\cos\alpha \cdot 2$

$\Rightarrow \alpha = 90^\circ$

$\Rightarrow S_{\triangle AXY} = 1$ $\quad S_{AXY-сектор} = \frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{4} - 1$

Прибавка по $DE = S$

Задача №8

$n = \underbrace{99..9}_{100}$ – это так 100зн число

Д-ем индукцией по числу разрядов (k) что число ~~99~~ $S(\underbrace{9 9..9}_{k}) = S(m \cdot \underbrace{99..9}_{k})$ для $\forall m \in [1; \underbrace{99..9}_{k}]$ и $S = 9k$

База: $k=1$; $n = 9$ $n \cdot 1 = 9$, $n \cdot 2 = 18$, $n \cdot 3 = 27$, ⋮, $n \cdot 9 = 81$ } верно

Переход: Пусть для k верно

T $k+1$: ~~Т~~ произвольное m:

$A = \underbrace{99..9}_{k+1} \cdot m = (\underbrace{900..0}_{k} + \underbrace{99..9}_{k}) m.$

~~SS~~ Если $m \leq \underbrace{9..9}_{k}$ то $S(A) = 9k + 9_k$ см базу для 1 => $S(A) = 9(k+1)$

Теперь ~~Т~~ $m \geq \underbrace{9...9}_{k}$ $m = \underbrace{9..9}_{k} + B$

где $B \leq \underbrace{90 \quad 0}_{k}$

~~Тогда $(\underbrace{9.0 \quad 0}_{k} + \underbrace{9..9}_{k}) \cdot (\underbrace{9...9}_{k} + B)$~~

~~По другому исходу индукции для k~~

$(\underbrace{10...0}_{k+1} - 1)(\underbrace{100..0}_{k+1} - c)$ где c

Раскрываем скобки и применяем мы индукции получаем, что $S(mn) = 9(k+1)$

=> доказано => $n = \underbrace{9...9}_{100}$

Задача №1

4 ситуации в команде 0, 1, 2, 3 универсала.

0: $3 \cdot C_5^2 \cdot C_6^3$

вратари защита нападение

1: он в защите: $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot C_6^3$

в атаке: $3 \cdot 3 \cdot C_5^2 \cdot C_6^2$

2: оба в атаке: $3 \cdot C_3^2 \cdot C_5^2 \cdot 6$

один в защ. другой в атаке: $3 \cdot C_3^2 \cdot 5 \cdot C_6^2$

оба в защите: $3 \cdot C_3^2 \cdot C_6^3$

3: три в атаке: $3 \cdot 1 \cdot C_5^2$

один в защ. два в атаке: $3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6$

один в атаке два в защ: $3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot C_6^2$

Итого: $3(10 \cdot 20 + 15 \cdot 20 + 3 \cdot 10 \cdot 15$

$+ 3 \cdot 10 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 15 + 3 \cdot 20 + 10 + 30 + 15)$

$= 3(200 + 300 + 450 + 180 + 225 + 60 + 55)$

$= 3(950 + \underbrace{180 + 280 + 60}_{520}) = 3 \cdot 1470 = 4410$ сп.

$3 \cdot 1470 = 4410$

Повысить оценку на 4 балла (старая оценка – 56б, новая оценка – 60б)

Председателю апелляционной комиссии олимпиады «Ломоносов»
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова
академику В.А. Садовничему
от участника заключительного этапа по профилю «Математика»
Резько Кирилла Валерьевича

Апелляция

Прошу пересмотреть мой индивидуальный предварительный результат заключительного этапа, а именно 56 баллов, поскольку считаю, что баллы за задачу 8 занижены быть 8. За задачу 8 – 8б.

В задаче 8 мною допущена арифметическая ошибка в процессе подсчета, когда рассматривается случай, когда часть университетов находится в запасе, а часть в абаке, что не учтено в итоговом подсчете.

В задаче 8 не завершено доказательство по индукции, а именно не дописана концовка решения, в остальном доказательство верно, что попадает под критерий на 8б (есть пробелы в доказательстве)

Подтверждаю, что я ознакомлен с положением об апелляциях на результаты олимпиады школьников «Ломоносов» и осознаю, что мой индивидуальный результат может быть изменен, в том числе в сторону уменьшения количества баллов.

23.03.2024

Резько (Резько К.В.)

~~56 (пятьдесят шесть)~~

30-08-65-98 (39.3)

ИСПРАВЛЕНО ПО АПЕЛЛЯЦИИ 60 (ШЕСТЬДЕСЯТ)

Черновик:

№1

Вратарь: 3

Без: $3 \cdot C_5^2 + C_6^3$

$$\begin{array}{r} 187 \\ \times\ 45 \\ \hline 935 \\ 748 \\ \hline 8415 \end{array}$$

по 1 ③

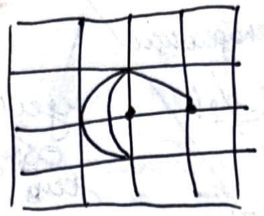
$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a} + \frac{2ca-2b^2+2b}{2b} + \frac{2ab-2c^2+2c}{2c}$$

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c + 3$$

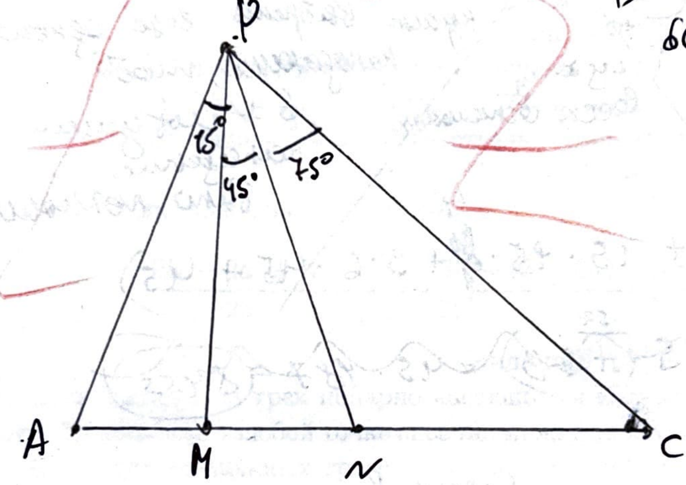
$$a+b+c \overset{?}{\geq} \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$$

abc

№2



392 | 8



$60 + 75^\circ = 135^\circ$

$S_{ABM} \cdot S_{NBC} = 3$

$S_{ABM} + S_{NBC} = 5$

$x^2 - 5x + 3 = 0$

$D = 25 - 12 = 13$

$S_{ABM} = \frac{AB \cdot BM}{2} \sin 15^\circ$

$S_{NBC} = \frac{BC \cdot BN}{2} \sin 75^\circ = \cos 15^\circ$

$X = 5 + \frac{BM \cdot BN}{2} \cdot \sin 45^\circ$

$\frac{AB \cdot BM \cdot BC \cdot BN}{8} \sin 30^\circ = 3$

$AB \cdot BM \cdot BC \cdot BN = 48$

$\frac{AB \cdot BC}{2} \sin 45^\circ$

$x + y = A$

$xy = B$

$A(A^2 - B) = 19$

$AB = -6$

$A^3 =$

$(1000-1)(1000-1)$

$1000000 + 1 = \ldots - 2000$

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times\ 33 \\ \hline 297 \\ 297 \\ \hline 3267 \end{array}$$