



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 4

Место проведения Москва  
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов  
наименование олимпиады

по математике  
профиль олимпиады

Русова Максима Владимировича  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

11 класс Колесников

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

[Подпись]

**Итоговая оценка:**

1	2	3	4	5	6	7	8	
80	12	4	8	12	8	0	4	<del>48</del>
							56	

(Кросс проверка)

№1

Истовик

1) Сущ. всего два варианта выбрать одного из двух вратарей

2) Всего 4 защитника, 7 нападающих и 3 универсала

3) Рас-м сколько вариантов выбрать, если из одного универсала и по два

$$S_1 = 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3$$

4) если 1 из универсала в защит

$$S_2 = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

5) если 1 из уни в атаке

$$S_3 = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$$

6) Если по одному в в защит и в атаке

$$S_4 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

↑ выбрать второго (один уни защит)  
↑ выбрать первого

$$S_{\Sigma} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 56 + 42 + 24 + 12 = 134$$

Ответ: 134

NS

$$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{2} \quad \left( f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{\frac{x+2}{x-2}-1}{2} = \frac{4}{2(x-2)} = \frac{2}{x-2} \right)$$

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2}-1}{2} = \frac{x-3}{4} = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{\frac{x-3}{4}-1}{2} = \frac{x-7}{8} = \frac{x}{8} - \frac{7}{8}$$

$$f(f(f(f(x)))) = \frac{\frac{x-7}{8}-1}{2} = \frac{x-15}{16} = \frac{x}{16} - \frac{15}{16}$$

геометр  
прогр

↓

$$\underbrace{f(f \dots f(x))}_n = \frac{x}{2^n} - \frac{2^n - 1}{2^n}$$

и т.д.

$$\underbrace{f(f(f \dots f(x)))}_{12} = \frac{x}{2^{12}} - \frac{2^{12} - 1}{2^{12}} = \frac{x}{4096} - \frac{4095}{4096}$$

$$2^{12} = \cancel{8192} \quad 4096$$

$$tg \underbrace{(f(f \dots f(x)))}_{12} = \left( \underbrace{f(f(f \dots f(x)))}_{12} \right)' = \frac{1}{4096}$$

$$\times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{x}{2^n}$$

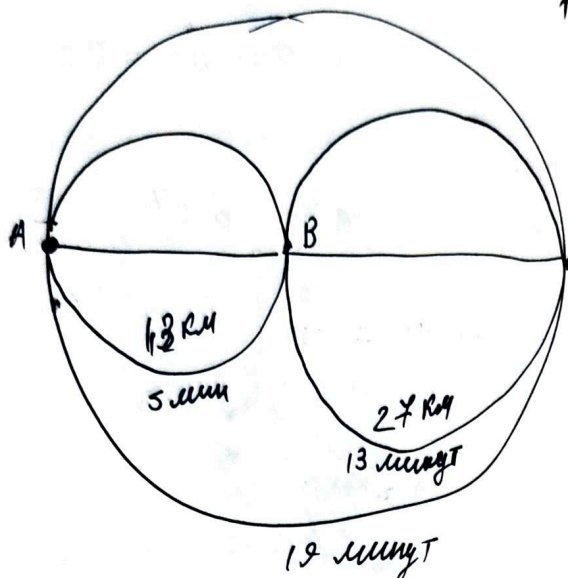
$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) &= \frac{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \\ &= \frac{1-2^n}{2^n} = -\frac{2^n-1}{2^n} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{4096}$$



N 4

Шетовик



$$1) AC = d(\text{окр} VAC)$$

$$AB = AB + BC$$

$$V_{AB} = \pi \cdot \frac{AB}{2}$$

$$V_{BC} = \pi \cdot \frac{BC}{2}$$

$\Downarrow$

$$AB = \frac{2 V_{AB}}{\pi}$$

$$BC = \frac{2 V_{BC}}{\pi}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{2}{\pi} \cdot (V_{AB} + V_{BC})$$

$$V_{AC} = \pi \cdot \frac{AC}{2} =$$

$$= V_{AB} + V_{BC} =$$

$$= 24 + 16 = 40 \text{ мм}$$

2) Всего автомобиль ехал

$$1 \text{ час } 35 \text{ мин} = 95 \text{ мин}$$

$\Downarrow$

$$5a + 13b + 19c = 95$$

$$(a, b, c \in \mathbb{Z})$$

3) Если  $b, c = 0$

$$a = \frac{95}{5} = 19 - \text{натуральное}$$

завершил бы поездку в т. В,

и по условию он вернулся в А

$\Downarrow$

$$b, c \neq 0$$

$$4) a, c = 0 \Rightarrow b = \frac{95}{13} \notin \mathbb{Z} \text{ противоречие}$$

$$5) a, b = 0 \Rightarrow c = \frac{95}{19} = 5, \text{ но аналогично}$$

по 3-ему пункту, тогда он бы закончил в т. С

$$\Rightarrow 13b/5 \Rightarrow b=5 \Rightarrow 13 \cdot 5 = 65 \downarrow$$

$$b \neq 0$$

$$\begin{array}{l|l} \text{если } c \neq 0 & 19c/5 \\ c \neq 5 & 5a/5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l|l} 13b/5 & \\ & b \neq 0 \end{array}$$



$$6) \quad b \neq 0$$

Условие

$$a \neq 0$$

$$13b : 5 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow 5a = 95 - 13 \cdot 5 = 95 - 65 = 30$$

$$a = 6$$

$b$  - нечетное  $\Rightarrow$  противоречие остается бы в  $c$

и

$$c \neq 0$$

и

$$b \neq 0$$

$$\Rightarrow \cancel{13b + 19c}$$

$$13b + 19c \leq 95$$

$$c :$$

$$b / 5$$

$$c / 5$$

\*) Рас - и разные варианты кол-ва друзей  
и найдем, когда  $13b + 19c : 5$

N	b	c
1	13	19
2	26	38
3	39	57
4	52	76
5	65	95
6	78	
7	91	

$$b \leq 7$$

$$c \leq 5$$

$$91 + 19c \geq 95$$

$$b \neq 0$$

$$95 + 13b > 95$$

$$1) 57 + 78 > 95 !!!$$

$$2) 39 + 76 > 95$$

$$3) 38 + 52 = 90$$

$$4) 19 + 26 = 45$$

$$5) 57 + 13 = 70$$

Все варианты

и

$$\cancel{b = 19c}$$

$$b, c = (1; 3), (2; 1); (4; 2)$$



8)  $b, c = 1, 3$

Числовик

$a = \frac{20}{5} = 4$

Такой вариант невозможен, так как если они пришли в С, то потратили или один а или один б

пусть  $AB \rightarrow BC \rightarrow CA \rightarrow AC \rightarrow CA +$

такой вариант невозможен, так как если  $b \neq 0 \Rightarrow$  он был в С

и потратил один а и б

в т. С пойдя по ВС он оказывается однажды

а после такого прохода через В будет иметь не сможет вернуться в а

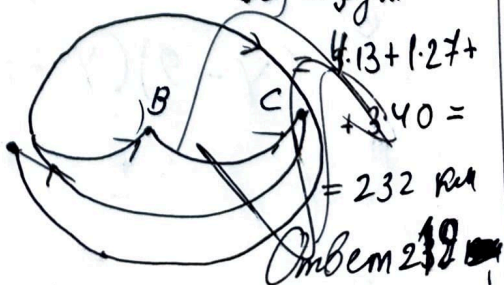
9)  $b = 2 \quad c = 1$

из / в т. С ~~каждый~~ 3 раза, но если пришли, то надо уйти  $\Rightarrow b + c =$  должно быть четно

10)  $b = 4 \quad c = 2$

$a = 4 \Rightarrow$  противоречит полав из А в В ~~однажды~~  
но по ВС ~~каждый~~ ~~четно~~ ~~и АЗ~~ ~~каждый~~ ~~четно~~ ~~и~~ ~~раз~~

11)  $a = 4, b = 1, c = 3$   
справка рисуну как вернутся а в А, подел этого марки  $b, c = 0$   
пути по АВ  $\in a = 4$



$\Rightarrow 2) S_{\text{пути}} = 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 232$  км

Ответ 232



№ 3

$$\sqrt{xy+2x-y-2} \cdot |y-x-10| = (x-4) \cdot |xy+2x-y-2|$$

$$\sqrt{y-x+8} = y-5$$

$$y \geq 5 \quad y-x \geq -8$$

$$x \leq y+8$$

$$1) \quad xy+2x-y-2=0 \quad x = \frac{2+y}{x+y} = 1$$

$$\sqrt{y-1+8} = y-5$$

$$y+7 = y^2+25-10y$$

$$y^2-11y+18=0 \quad D=121-4 \cdot 18=49=7^2$$

$$y = \frac{11 \pm 7}{2} \Rightarrow y=9 \rightarrow x; y=(1;9) - \text{в ответ}$$

$$y=2!!! (y \geq 5)$$

$$2) \quad x \neq 1 \quad y \neq 2$$

$$(x-1)(y+2) \cdot |y-x-10| = (x-4) \cdot |(x-1)(y+2)|$$

$$y+2 > 0$$

$$x \geq 1$$

$$|y-x-10| = (x-4)$$

$$x \geq 4$$

$$(y-x-10)^2 - (x-4)^2 = 0$$

$$y-x+8 = y^2+25-10y$$

$$x = -(y-9)(y-2)$$

$$x < 1$$

$$|y-x-10| = 4-x$$

$$x < 4$$

$$(y-x-10)^2 - (4-x)^2 = 0$$

$$y-x+8 = y^2+25-10y$$

$$x = -(y-9)(y-2)$$



*чисто выр*

$$(y + y^2 + 17 - 11y - 10)^2 - (y + y^2 + 17 - 11y)^2 = 0$$

$$(y^2 - 10y + 7)^2 - (y^2 - 11y + 21)^2 = 0$$

$$y^4 + 100y^2 + 49 - 20y^3 + 14y^2 - 140y - y^4 - 121y^2 - 442 +$$

$$+ 22y^3 - 42y^2 + 462y = 0$$

$$2y^3 - 49y^2 + 322y - 393 = 0$$

$$y = (x - 4) + 4 = y^2 + 25 - 10y$$

~~$$x - 4 = x - 10 \quad y = x - 10$$~~

$$y - x - 10 = x - 4$$

N1

Тестовик

1) Если никто из универ. не попал в топ

$$S_1 = 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 7!$$

2) Если 1 в зачете

$$S_2 = 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 7!$$

↑ из универ  
↑ выбрать из зач

3) Если 2 в зач

$$S_3 = 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = \frac{7!}{2}$$

4) Если 1 в ~~зач~~ кап

$$S_4 = 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 = \frac{7! \cdot 3}{5}$$

5) 2 в кап

$$S_5 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 = \frac{7!}{5}$$

6) 4 в зач 1 в кап

$$S_6 = 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6 = \frac{2 \cdot 7!}{5}$$

7) 2 в зач. и 1 в кап

$$S_7 = 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{7! \cdot 2}{5 \cdot 4} = \frac{7!}{2 \cdot 5}$$

8) 2 в кап 1 в зачете

$$S_8 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 = 7 \cdot (12)^2$$

9) 3 в кап

$$S_9 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 = 12^2$$

10) Всего вариантов

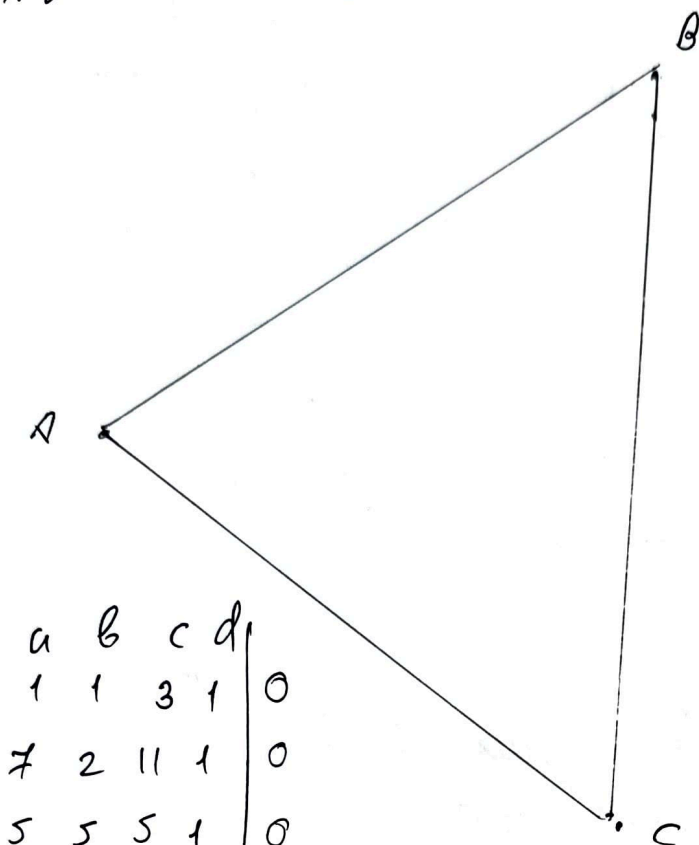
$$S_{\Sigma} = \sum_{i=1}^9 S_i = 7! \left( 2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \right) + \underbrace{12^2 \cdot 8}_{1152}$$

$\frac{38}{10}$

$7! = 5040$

№8

Условие



$$A \in \alpha$$

$$B \in \alpha$$

$$C \in \alpha$$

У

$$a + b + 3c + d = 0$$

$$7a + 2b + 11c + d = 0$$

$$5a + 5b + 5c + d = 0$$

$$\begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 1 & 0 \end{array}$$

У

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & -10 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -4 & 0 & 0 \end{array}$$

$$10c + 4d = 0$$

$$c = -\frac{2}{5}d$$

У

$$5a + 10c + 6d = 0$$

$$5b + 2d = 0$$

$$b = -\frac{2}{5}d$$

У

$$9x - 2y - 2z + 5d = 0$$

$$x \in [1; 7]$$

$$y \in [1; 5]$$

$$z \in [3; 11]$$

$$x \in \text{неч}$$

$$2y \in \text{чет}$$

$$2z \in \text{чет}$$

$$5 - \text{нечет}$$

$$d + \frac{2}{5}d - \frac{2}{5}d - d = 0$$

$$a = \frac{9}{5}d$$

У

$$d(9; -2; -2)$$

$$\begin{cases} x \leq 7 \\ y \leq 5 \\ z \leq 11 \\ x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ z \geq 3 \end{cases}$$



исходник  
так как  $a, b, c \neq 0 \Rightarrow$  если есть  
точка с координатах  $x, y, z$ , то нет ни  
одной точки в этой плоскости,  
$$\begin{cases} x_i = x \\ y_i = y, \forall i \in \alpha \\ z_i = z \end{cases}$$

тут точек с  $x = 1,5; 7$

ост. только  $x = 3$

$$-2y - 2z = -5 - 9 \cdot 3 = -32$$

$$y + z = 16$$

$y = 5$  !!! Т. В имеет  $z = 11$   
 $z = 11$  Т. С имеет

$$3a + 5b + 11c + d = 0$$

$$7a + 2b + 11c + d = 0$$

$$5a + 5b + 5c + d = 0$$

$$b = \frac{4}{3}a$$

$$c = \frac{1}{3}a$$

$$d = -\frac{40}{3}a$$

Ответ: 3

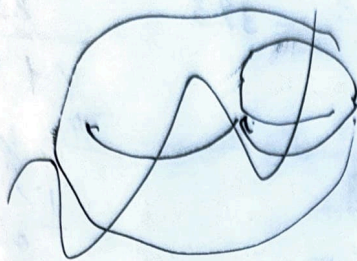
~~Умножить N 4 (продолжить)~~

1)  ~~$b = 4$   $c = 2$   $a =$~~

1)  ~~$b =$~~



щрпвик



$$2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{49}{4} + \frac{322}{2} - 393$$

$$2 \cdot \frac{24}{8} - 49 \cdot \frac{9}{4} + \frac{322 \cdot 3}{2} - 393$$

$$\frac{24}{4} - \frac{441}{4}$$

$$\frac{3}{4} \quad \frac{24}{64}$$

$$2 - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \cdot \frac{3}{2} \sqrt{2}$$

$$4 \cdot 3 \sqrt{2}$$

$$16 \cdot 9 \cdot 2$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

$$-\frac{\frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^n - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - 2^n}{2^n}$$

$$9 - 2 - 2 \cdot 5 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{1-2}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

11

$$\frac{x}{4}$$

$$3a + \frac{20}{3}a + \frac{11}{3}a + d = 0$$

$$\frac{40}{3}a + 3d = 0$$

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\times \frac{19}{3}$$

$$\begin{array}{r} 95 \\ -45 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1024 \\ \times 4 \\ \hline 4096 \end{array}$$

$$25 + 13 + 3 \cdot 19$$

$$\begin{cases} 3a + 5b + 11c + d = 0 \\ 7a + 2b + 11c + d = 0 \\ 5a + 5b + 5c + d = 0 \end{cases}$$

$$4a - 3b = 0$$

$$2a - 6c = 0$$

$$b = \frac{4}{3}a$$

$$c = \frac{1}{3}a$$

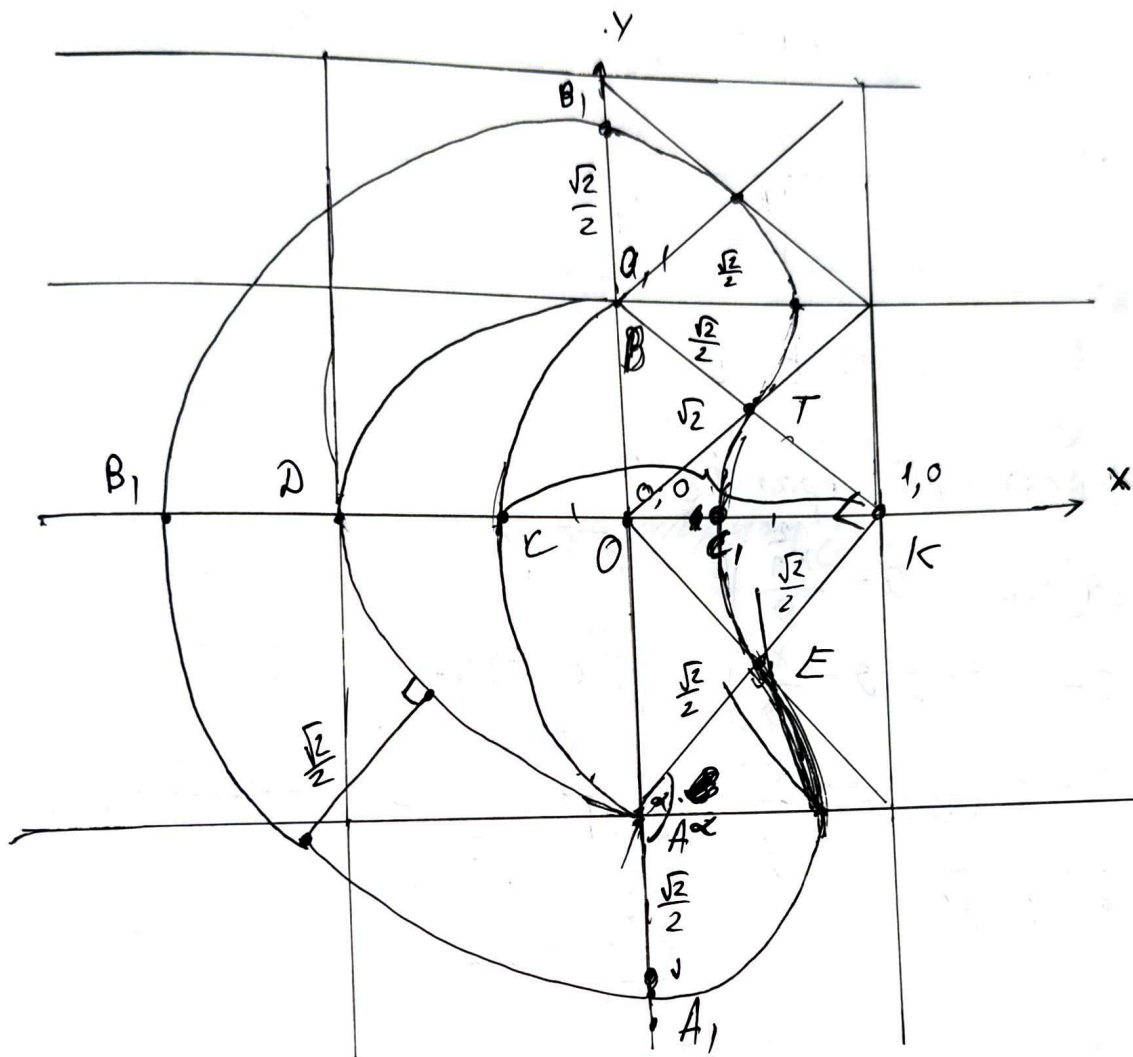
$$d = -\frac{40}{3}a$$

Шстовик  

$$S_{\Sigma} = 5040 \cdot \frac{38}{10} + 1152 = 19152 + 152 = 19304$$

Ответ: 19304

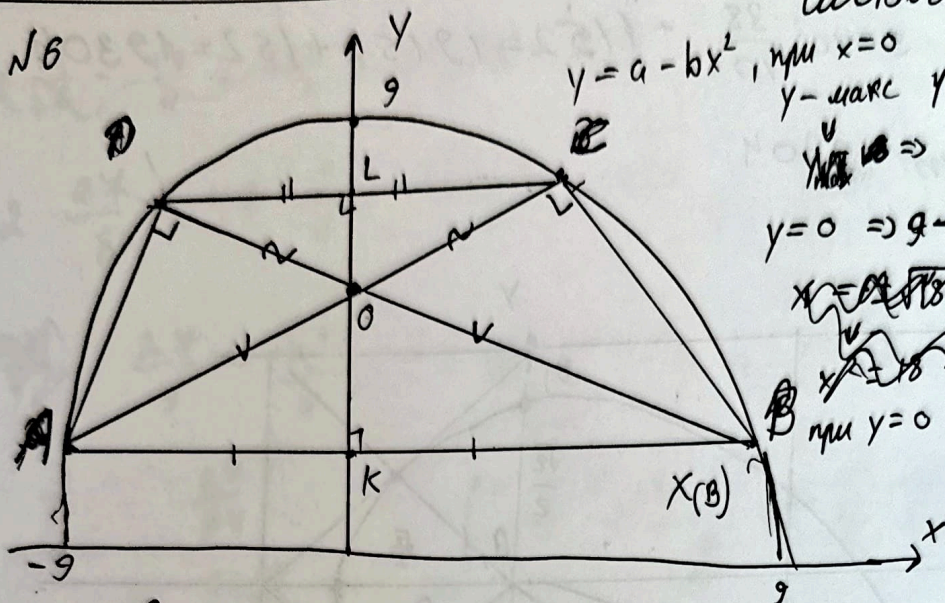
N 2



- 1) от каждой точки обр. круг радиусом  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  
 круги падают и в итоге Однозначный  
 контур задается как перпендикуляр к поверх  
 отход на раст.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  от точки осев. перпенд.  
 часть окружности перейдет в часть окружности
- 2)  $\cup BDA \rightarrow$  сдвин. влево на  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $DO = 1$   $CO = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow CD = 2 - \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$  внутри  
 не будет  
 пустого проств.



№6



шестовик

$$y = a - bx^2, \text{ при } x=0 \quad y - \text{макс } y_{\text{max}} = a$$

$$y_{\text{max}} = 9 \Rightarrow a = 9$$

$$y = 0 \Rightarrow 9 - bx^2 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{9}{b}}$$

$$x = \pm \sqrt{9b}$$

$$\text{при } y=0 \quad x = \pm \frac{18}{2}$$

$$b \cdot 9^2 = 9 \Rightarrow b = \frac{1}{9}$$

↓

ABCD - р/б трапеция

$$B = (x_B; 9 - \frac{x_B^2}{9})$$

$$\vec{AC} = (x_C + x_B; \frac{x_B^2 - x_C^2}{9})$$

$$C = (x_C; 9 - \frac{x_C^2}{9})$$

$$\vec{BC} = (x_C - x_B; \frac{x_B^2 - x_C^2}{9})$$

$$A = (-x_B; 9 - \frac{x_B^2}{9})$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = (x_C + x_B)^2 + \frac{(x_C^2 - x_B^2)^2}{9} = 0$$

$$\vec{AC} \perp \vec{BC}$$

$$\frac{x_C^2 - x_B^2}{9} = -1 \Rightarrow x_C^2 = x_B^2 - 9$$

$$H = y_C - y_B = \frac{x_B^2 - x_C^2}{9} = 1$$

Ответ: 1



№2 (продолжение)

Исходник

$$\triangle VBD \rightarrow V, B, D, A, - \text{ч.о.кр} = 0 \quad R = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$u) \triangle VACB \rightarrow E, C, T - \text{ч.о.кр} = K \quad R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (CK = \sqrt{2})$$

5) около точек A и B прав. части окруж  
у углом  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$ , радиус  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$6) S_E = \underbrace{S_{\text{окр}(B, D, A, I)}}_{\substack{\uparrow \\ \text{пол. круга}}} + 2 \cdot \underbrace{\frac{3\pi}{8} \cdot r^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{пол. частей} \\ \text{окруж. у т. A и B}}} + S_{\triangle AKB} - S_{V E K T}$$

$$S_{\text{окр}(B, D, A, I)} = \frac{\pi}{2} \cdot R^2$$

$$S_{\triangle AKB} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right)^2$$

$$S_{V E K T} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2}$$

$$S_E = \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{3\pi}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) + \frac{3\pi}{8} + 1 - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 1 =$$

$$= \pi \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 = \pi \frac{(2 + \sqrt{2})}{2} + 1$$

$$\text{Ответ: } \pi \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1$$

сервис

$$\frac{x+2}{x-2} - 1 = \frac{x+2-x+2}{(x-2)} = \frac{4}{x-2}$$

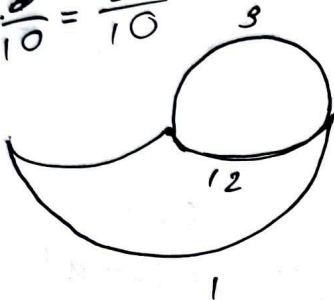
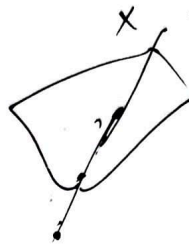
$$2^{10} = 1024$$

$$2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} =$$

$$= 3 + \frac{8}{10} = \frac{38}{10}$$

$$\begin{array}{r} \times 1024 \\ 8 \\ \hline 8192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \times 13 \\ 238 \times 26 \\ 354 \times 39 \\ 476 \times 52 \\ 595 \times 65 \\ \hline 786 \end{array}$$



$$y^2 - 10y + 7 = 0$$

$$D = 25 - 7 = 18$$

$$y = \frac{5 \pm 3\sqrt{2}}{1}$$

$$\begin{array}{r} \times 13 \\ 5 \\ \hline 85 \\ + 24 \\ \hline 112 \\ + 120 \\ \hline 232 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 4 \\ \hline 72 \\ - 121 \\ \hline 84 \\ 37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ - 72 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$y^2 - 11y + 21 = 0$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 21 \\ \hline 21 \\ 42 \\ \hline 441 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 504 \\ 38 \\ \hline 4032 \\ 1512 \\ \hline 429152 \end{array}$$

$$D = 121 - 84 = 37$$

$$y = \frac{11 \pm \sqrt{37}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 11 \\ \hline 21 \\ 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 462 \\ - 140 \\ \hline 322 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 442 \\ - 49 \\ \hline 393 \end{array}$$

$$1152$$

$$\begin{array}{r} 231 \\ \times 322 \\ \hline 462 \\ 462 \\ 462 \\ \hline 9668 \end{array}$$

$$2 \cdot 24 - 49 \cdot 9 + 322 \cdot 3 - 393 = 0$$

$$54 + 966 - 490 + 49 - 393$$

$$7! = 5040$$

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 120 \\ \hline 84 \\ 42 \\ \hline 5040 \end{array}$$

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 6 \\ \hline 252 \\ \times 5 \\ \hline 1260 \\ \times 4 \\ \hline 5040 \end{array}$$