0493157160008

49-31-57-16
(40.9)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Рябикина Алексея Антоновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
∓	∓	±	∸	±	∔	+	−	60
4	4	8	12	8	12	12	0	

60 (шестьдесят)

49-31-57-16 (40.9)

Чистовик

№1

	В	З	Н
Надо выбрать:	1	2	3
Есть:	3	4	7 ⊕ 3 универсала

защитник или/и нападающий

Вариантов выбрать вратаря — 3.

Вариантов выбрать защитников — это выбор ~~двух~~ из семи (так как теперь претендентов на защитника — 4+3):

$\frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ способ.

Вариантов выбрать нападающих — это выбор трёх из десяти (так как один и тот же универсал может быть избран и на лучшего нападающего, и на лучшего защитника): $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 80 \cdot 1{,}5 = 120$ способов.

Тогда, общее количество вариантов высчитывается с помощью правила умножения: $3 \cdot 21 \cdot 120 = \boxed{7560}$

№3

$$\begin{cases} (xy+3x-2y-6)\,|y-x-8| = (x-5)\,|xy+3x-2y-6| \\ \sqrt{y-x+10} = y-4. \end{cases}$$

$xy+3x-2y-6 = (x-2)(y+3)$.

Разберём случай, когда это выражение равно нулю:

1) $x=2$;

$\sqrt{y-2+10} = y-4 \Rightarrow \begin{cases} y+8 = y^2-8y+16 \\ y \geq 4 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2-9y+8=0 \\ y \geq 4 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=8 \end{array}\right. \\ y \geq 4 \end{cases} \Rightarrow$ подходит $y=8$. Реш.: $(2;8)$

2) $y=-3$;

$\sqrt{-x-7} = -7 \Rightarrow$ не подходит, т.к корень не может быть равен отр. числу.

см. продолж. на сл. листе.

№3 (продолжение 1) Чистовик

Теперь разберём случай:

$(x-2)(y+3)>0$, тогда:

$$\begin{cases} |y-x-8| = x-5 \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$$

Разберём „способы раскрытия" модуля:

а) $y-x-8 \geq 0$: $\begin{cases} y-x-8 = x-5 \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases} \Rightarrow y = 2x+3$

$y \geq x+8$

$2x+3 \geq x+8$

$\underline{x \geq 5}$ (1)

$\sqrt{2x+3-x+10} = 2x+3-4$

$\sqrt{x+13} = 2x-1$

$\begin{cases} x+13 = (2x-1)^2 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+13 = 4x^2-4x+1 \\ 2x \geq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x^2-5x-12=0 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

$4x^2-5x-12=0$

$D = 25+48\cdot 4 = 25+160+32 = 160+57 = 217$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{217}}{8}$

Понятно, что не один из корней не попадает под условие (1)

б) $y-x-8<0$: $\begin{cases} y-x-8 = 5-x \Rightarrow y = 13 \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$

$y < x+8$

$13 < x+8$

$x > 5$

$\sqrt{23-x} = 9$

$23-x = 81$

$x = 23-81 < 5$ — не подходит.

Случай $(x-2)(y+3)<0$, тогда:

$$\begin{cases} |y-x-8| = 5-x \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$$

Случаи „раскрытия" модуля:

См. продолжение на сл. стр.

49-31-57-16 (40.9)

№3 (продолжение 2) Чистовик

а) $y-x-8\geq 0$: $\begin{cases} y-x-8=5-x \Rightarrow y=13 \Rightarrow 13\geq x+8 \\ \sqrt{y-x+10}=y-4 \end{cases}$

$y\geq x+8$, $x\leq 5$

$\sqrt{23-x}=9$

$23-x=81$

$x=-58$ – подходит

$(-58;13)$ – реш.

б) $y-x-8<0$: $\begin{cases} y-x-8=x-5 \Rightarrow y=2x+3 \\ \sqrt{y-x+10}=y-4 \end{cases}$

$y<x+8$

$2x+3<x+8$

$x<5$

$\sqrt{x+13}=2x-1$

$\begin{cases} 4x^2-5x-12=0 \\ x\geq\frac{1}{2} \ (2) \end{cases}$

$x=\frac{5\pm\sqrt{217}}{8}$

$\frac{5-\sqrt{217}}{8} \vee \frac{1}{2} \quad |\cdot 8$

$5-\sqrt{217} \vee 4$

$-\sqrt{217} \vee -1$

$< \Rightarrow \frac{5-\sqrt{217}}{8}$ не подходит из-за условия (2)

$\frac{5+\sqrt{217}}{8} \vee \frac{1}{2} \quad |\cdot 8$

$5+\sqrt{217} \vee 4$

$> \Rightarrow$ подходит и также $5+\sqrt{217}<40$.

$\left(\frac{5+\sqrt{217}}{8}; \frac{17+\sqrt{217}}{4}\right)$ – реш.

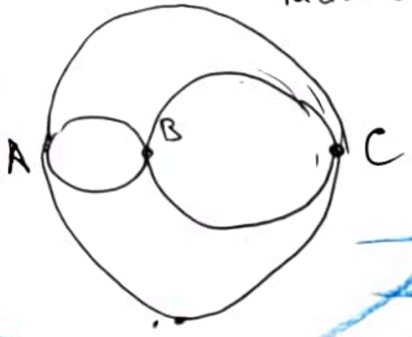
Ответ: $(-58;13)$; $\left(\frac{5+\sqrt{217}}{8}; \frac{17+\sqrt{217}}{4}\right)$; $(2;8)$

продолж. на сл. листе.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Выполнять задания на титульном листе запрещается!

№4 Чистовик



AB — длина 15 км: 5 мин
BC — длина 25 км: 13 мин
AC — 19 мин

1 час 35 мин = ~~[illegible]~~
= 95 мин

$13 \overset{19}{\equiv} -6$
$5 \overset{19}{\equiv} 5$ } чтобы получить
$95 \overset{19}{\equiv} 0$
$19 \overset{19}{\equiv} 0$

95 минут, необходимо или 5 раз прокатиться по дугам AC и CA (но тогда начальная и конечная точка не совпадает из-за нечётности, не подходит), или 6 раз прокатиться на дугах AB и 5 раз на дугах BC, причём получится ровно 95 минут, но данный вариант также не подходит, так как 5 — число нечётное, а значит никаким образом на ~~круге~~ окружности с дугой BC не получится вернуться в точку B. Также не подойдёт и вариант, когда автомобиль 19 раз едет по окружности с дугой AB, так как из-за нечётности он не сможет вернуться в ту же точку.

~~Значит, такой ситуации не могло быть, или же автомобиль стоял на одной точке, проехав 0 км.~~

25+13+57=95, верно

Разберём случай когда, по окружности с дугой AB он едет 5 раз, после 1 раз по окружности с дугой BC и 3 раза по окружности с дугой AC. Тогда, автомобиль действительно возвращается в точку A.

см. продолж на сл. листе

49-31-57-16 (40.9)

№4 (продолжение) чистовик

Тогда, он проезжает $5 \cdot 15 + 25 \cdot 1 + 3 \cdot L$ км, где L - длина дуги AC.

$$AB = \frac{15}{\Pi} \cdot 2 \text{ км} = \frac{30}{\Pi} \text{ км}$$
$$BC = \frac{25}{\Pi} \cdot 2 \text{ км} = \frac{50}{\Pi} \text{ км}$$
$$AC = \frac{80}{\Pi} \text{ км}$$

Тогда, $L = \Pi \cdot \frac{AC}{2} \cdot \ldots = 40$ км.

$$75 + 25 + 3 \cdot 40 = 100 + 120 = \boxed{220 \text{ км}}$$

Другого варианта нет, так как тогда не соблюдается чётность (кол-во дуг должно быть нечётным для каждой из окружностей)

Ответ: 220 км

№5

$$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$$

$$\frac{x-2}{x+2} = y \Rightarrow x - 2 = yx + 2y$$
$$x(1-y) = 2(y+1) \Rightarrow x = 2 \cdot \frac{y+1}{1-y}$$
$$x + 2 = 2\left(\frac{y+1}{1-y} + 1\right) = 2 \cdot \frac{y+1+1-y}{1-y} = \frac{4}{1-y}$$

тогда

$$F(y) = -2 \cdot \frac{1}{\frac{4}{1-y}} = \frac{y-1}{2}, \text{ то есть}$$

$$F(x) = \frac{x-1}{2}$$

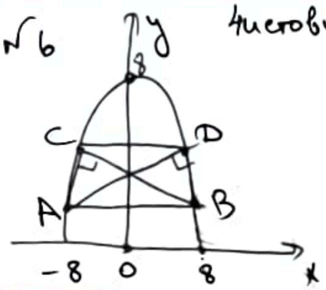
$$F(F(x)) = \frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x-1-2}{4} = \frac{x-3}{4}, \; 4 = 2^2$$

$$F(F(F(x))) = \frac{\frac{x-3}{4} - 1}{2} = \frac{x-3-4}{8} = \frac{x-7}{8}, \; 8 = 2^3, \text{ то есть}$$

с увеличением числа ф-й в ф-ях знаменатель возрастает в 2 раза.

$$g(x) = \frac{x - 2^{11} + 1}{2^{11}} \Rightarrow$$ тангенс угла наклона к касательной $-\frac{1}{2^{11}}$. Ответ: $\frac{1}{2048}$ см. сл. лист.

№6 Чистовик



так как ширина туннеля — 16, то координаты этих точек: 8 и (−8), и

~~???~~ $a=8$: $y=8-bx^2$

$y=0$ при $x=8$:

$0=8-b\cdot 64 \Rightarrow b=\frac{1}{8}$

то есть ур-е параболы:

$y=8-\frac{1}{8}x^2$

Пусть координата точки B по оси x: x_1, а координата D по оси x — x_2. Тогда:

$x_A=-x_1$ $x_B=x_1$ $x_D=x_2$ $y_C=-x_2$

$y_A=8-\frac{1}{8}x_1^2$ $y_B=y_A$ $y_D=8-\frac{1}{8}x_2^2$ $y_C=y_D$.

По теореме Пифагора: $AC^2+BC^2=AB^2$.

$AC^2=(x_1-x_2)^2+\frac{1}{64}(x_1^2-x_2^2)^2$

$BC^2=(x_1+x_2)^2+\frac{1}{64}(x_1^2-x_2^2)$

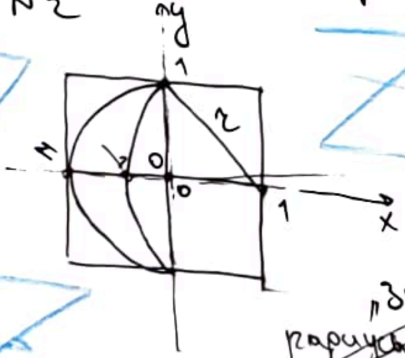
$AB^2=(2x_1)^2=4x_1^2$

$x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+\frac{1}{32}(x_1^2-x_2^2)^2 + x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=$
$=4x_1^2$

$\frac{1}{32}(x_1^2-x_2^2)^2=2(x_1^2-x_2^2) \Rightarrow x_1^2-x_2^2=64$

$h=|y_C-y_A|=\frac{1}{8}(x_1^2-x_2^2)=\frac{1}{8}\cdot 64=8$ — расстояние между прямыми AB и CD. (D и C в этом случае совпадают)

№2



$r=\sqrt{2}$ (из т. Пифагора)

~~При "расплывании" краски появляется внешняя и внутренняя окружности с "закраской" между ними, причем радиусы этих окружностей различаются на 0,25·2=0,5:~~

~~схематичный рисунок~~

см. сл. лист.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Выполнять задания на титульном листе запрещается!

Черновик

№2 (продолжение)

~~Но при этом на краях останется половина кругов радиуса 0,25. Сумма их площадей: $\frac{\pi}{16}$~~

~~Площадь запрещенной части для линии окружности радиусом $\sqrt{2}$ равна:~~

~~$$\frac{\pi}{4}\left(\left(\sqrt{2}+0,5\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)=\frac{\pi}{4}\cdot\left(\sqrt{2}+\frac{1}{4}\right)$$~~

~~$OL=\sqrt{2}-1$~~

$ML=2-\sqrt{2}$

$2-\sqrt{2} \vee \frac{1}{4}$ $\quad 2-\sqrt{2} \vee \frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$2-\sqrt{2}>\frac{1}{4}$ $\quad 4-2\sqrt{2} \vee 1$

$3 \vee 2\sqrt{2}$

$> \Rightarrow 2-\sqrt{2}>\frac{1}{2}$

Необходимо найти такую точку, что с неё и далее начинается пересечение пятен, а значит расстояние между ними равно $\frac{1}{2}$.

Ур-я окружностей:

$$x^2+y^2=1$$

$$(x-1)^2+y^2=2$$

Пусть координата одной из этих точек, а именно той, которая лежит на дуге окружности радиуса $\sqrt{2}$ — x_1. Тогда

$$(x_1-1)^2+y_1^2=2 \Rightarrow y_1=\pm\sqrt{2-(x_1-1)^2}.$$

Выберем y_1 с плюсом, так как ситуация симметрична.

Координата второй точки по оси x — x_2.

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$y_2=\sqrt{1-x_2^2}$$

$(x_1-x_2)^2+2-$ [illegible]

см. сл. лист.

№7 чистовик

Докажем, что это число $\underbrace{99\ldots9}_{75} = 10^{75} - 1$

$(10^{75}-1)\cdot m = m\cdot 10^{75} - m$

$$\begin{array}{r} - \ m\overbrace{00\ldots0}^{75} \\ m \\ \hline (m-1)\underbrace{9\ldots999}_{75-k}(10^k - m) \end{array}$$, где k – ~~к~~ кол-во цифр числа m.

$k=1: S(mn) = 9\cdot 74 + m + 10^1 - m - 1 = 9\cdot 75$

$k=2: S(mn) = 9\cdot 73 + \cancel{m} + \cancel{100} - \cancel{m} \; S(m-1) + S(10^2 - m)$, $9\cdot 75$

То есть необходимо доказать, что

$S(m-1) + S(10^k - m) = 9k$, где k - кол-во цифр m.

$m-1 \overset{9}{\equiv} m-1$
$10^k - m \overset{9}{\equiv} 10^k - m$ $\Big\}\oplus$ $10^k - 1 \overset{9}{\equiv} 0$, т.к тогда число состоит полностью из 9.

Пусть это правда для какого-то l, у которого k цифр.

$S(l-1) + S(10^k - l) = 9k$

Тогда это верно и для l+1 (если нет перехода, что у числа l+1 (k+1) цифра):

$S(l) + S(10^k - l - 1) = 9k$, т.к

$S(l-1) = S(l) - 1$ (если нет перехода разряда)

$S(10^k - l - 1) = S(10^k - l) - 1$

Если же есть переход разряда, то это всё также верно, так как важен лишь остаток числа при делении на 9.

Тогда, это число $\underbrace{9\ldots9}_{75}$

ответ. см. сл. лист.

Чистовик

№ 2 (продолжение)

При „расплывании" краски площадь уже закрашенного полумесяца не меняется, увеличивается только „со внешней части" контура, и образуются" как бы две окружности (для одной из дуг), где закрашено всё, что между ними. Для дуги окружности радиуса $\sqrt{2}$ увеличение площади $S_1 = \frac{\pi}{4}\left((\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2} - \frac{1}{4})^2\right) +$

$$+ \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{4}\left(+\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{16}\right) + \frac{\pi}{16} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{\pi}{64} + \frac{4\pi}{64} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{3\pi}{64}$$

т.к. на концах дуги образуются полуокружности, которые никем не перекрываются

Аналогично, и для другой дуги, но там уже добавления $\frac{\pi}{16}$ не будет, ведь обе полуокружности радиуса $\frac{1}{4}$ перекрываются другими уже расплывшимися от другой дуги!

$$S_2 = \frac{\pi}{2}\left((1+\frac{1}{4})^2 - 1^2\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{9}{16} = \frac{9\pi}{32}$$

А площадь уже закрашеного месяца

$$S_0 = \frac{\pi}{2} \cdot 1^2 - \left(\frac{\pi}{4} \cdot 2 - \frac{1 \cdot 1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Тогда, $S_{общ} = S_0 + S_1 + S_2 = \frac{1}{2} + \frac{9\pi}{32} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{3\pi}{64} =$

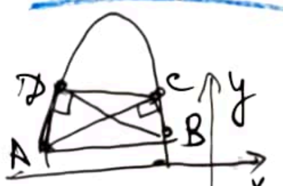
$$= \frac{1}{2} + \pi\left(\frac{9}{32} + \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{3}{64}\right) = \boxed{\frac{1}{2} + \pi\left(\frac{15}{64} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)}$$

ответ

Черновик

$3000-3=2997$

9999



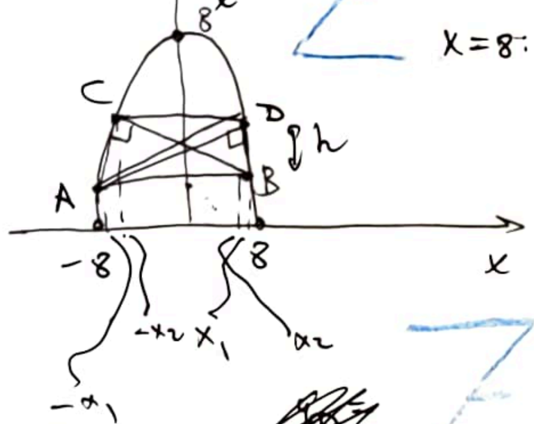
$y=8-bx^2$

20000-2

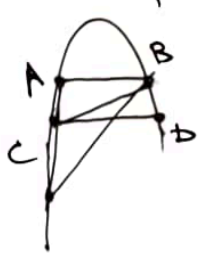
$x=8:\ y=0=8-b\cdot 64$

$b=\frac{1}{8}$

$y=8-\frac{1}{8}x^2$



$h=|y_D-y_B|=\frac{1}{8}|(x_1^2-x_2^2)|$



$x_A=-x_1$ $\quad x_B=x_1$

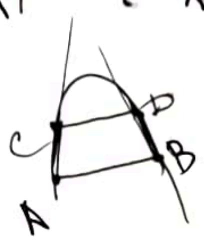
$y_A=8-\frac{1}{8}x_1^2$ $\quad y_B=y_A=8-\frac{1}{8}x_1^2$

$x_C=-x_2$ $\quad x_D=x_2$

$y_C=8-\frac{1}{8}x_2^2$ $\quad y_D=y_C=8-\frac{1}{8}x_2^2$

$BD^2=(x_1-x_2)^2+\left(8-\frac{1}{8}x_1^2-8+\frac{1}{8}x_2^2\right)^2=$

$=(x_1-x_2)^2+\frac{1}{64}\cdot(x_1^2-x_2^2)^2$



$AD^2=(x_1+x_2)^2+\frac{1}{64}(x_1^2-x_2^2)^2$

$AB=2x_1$; $AB^2=4x_1^2$

9

$99\times 80=7920$

$AD^2+BD^2=AB^2$:

$(x_1+x_2)^2+\frac{1}{32}(x_1^2-x_2^2)^2+(x_1-x_2)^2=4x_1^2$

$x_1^2-\cancel{2x_1x_2}+x_2^2+\frac{1}{32}(x_1-x_2)^2(x_1+x_2)^2+x_1^2+x_2^2+\cancel{2x_1x_2}=4x_1^2$

$2(x_1^2+x_2^2)+\frac{1}{32}(x_1-x_2)^2(x_1+x_2)^2=4x_1^2$

$\frac{1}{32}(x_1-x_2)^2(x_1+x_2)^2=2(x_1^2-x_2^2)=2(x_1-x_2)(x_1+x_2)$

$(x_1-x_2)(x_1+x_2)=64$

$x_1^2-x_2^2=64 \Rightarrow \boxed{h=8}$

Черновик

	В	3	4	
Должны:	1	2	3	3 или Н. 1
Всего:	3	4	7	+ 3 уни.

85 минут.

$85-13=72$

Выбрать вратаря — 3 варианта

Выбрать защитника — $C_7^2=\frac{7!}{5!2!}=\frac{7\cdot 6}{2}=21$

Выбрать нападающего — $C_{10}^3=\frac{10!}{7!3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{6}=$

$=15\cdot 8=120$

$x-2=xy+2y$

$x(1-y)=2(y+1)$

$\frac{x-2}{2+x}=y$

$3\cdot 21\cdot 120$?

$50+26=\boxed{76}$

$3\cdot 28=60+24=74$

$x=2\cdot\frac{y+1}{1-y}$

$f(y)=$

$2\left(\frac{y+1}{1-y}+1\right)=$

$=2\left(\frac{y+1+1-y}{1-y}\right)=$

$=2\cdot\frac{2}{1-y}=\frac{4}{1-y}$

$x+2-2-4x=0$

$x+13=4x$

$4x^2-5x-12=0$

$D=25+192=217$

$\frac{5+\sqrt{217}}{8}$

$=\frac{7+\sqrt{217}}{4}$

$(x-2)(y+3)$

$f(y)=\frac{y-1}{2}$

$100^2-200+1=10000-199=9801$

$$\begin{cases}(xy+3x-2y-6)\,|y-x-8|=(x-5)\,|xy+3x-2y-6| \\ \sqrt{y-x+10}=y-4\end{cases}$$

Если равно:

1) $x=2$; y — любое

$\sqrt{y-2+10}=(y-4)^2$, $y\geq 4$

$y-8=y^2-8y+16$

$y^2-9y+24=0$

нет реш.

2) $y=-3$; x — любое

$\sqrt{-3-x+10}=-7$, не подх.

$(x-2)(y+3)\neq 0$:

$$\begin{cases}|y-x-8|=x-5 \\ \sqrt{y-x+10}=y-4\end{cases}$$

$y-x+10\geq 0$

$y-x\geq -10$

$y-x-8\geq -18$

16

$f(x)=\frac{x-1}{2}$

$f(f(x))=f\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{\frac{x-1}{2}-1}{2}=\frac{x-1-2}{4}=\frac{x-3}{4}$

$\frac{\frac{x-2}{x+2}-1}{2}=\frac{x-2-x-2}{2(x+2)}=\frac{-2}{x+2}$