0 844580 600003

84-45-80-60
(40.48)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

14.04 – вышел из аудитории
14.05 – вернулся

Вариант № 2

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Сафронова Алексея Юрьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» феврале 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	8	0	12	12	12	0	0	56

84-45-80-60 (40.48)

ЕВ

Чистовик

№1

Рассмотрим все возможные непересекающиеся случаи:

1) не выбрали ни 1 универсала: $C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^3 = 3 \cdot 6 \cdot 35$

2) выбрали 1 в защиту: $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_7^3 = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 35$

3) выбрали 1 в атаку: $C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_7^2 = 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 21$

4) выбрали 1 в защиту и 1 в атаку: $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_2^1 \cdot C_7^2 = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 21$

5) выбрали 2 в защиту: $C_3^1 \cdot C_3^2 \cdot C_7^3 = 3 \cdot 3 \cdot 35$

6) выбрали 2 в атаку: $C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot C_7^1 = 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 7$

7) выбрали 2 в защиту и 1 в атаку: $C_3^1 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 \cdot C_7^2 = 3 \cdot 3 \cdot 21$

8) выбрали 2 в атаку и 1 в защиту: $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_2^2 \cdot C_7 = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7$

9) выбрали 3 в атаку: $C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^3 = 3 \cdot 6$.

$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

$C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$

$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$

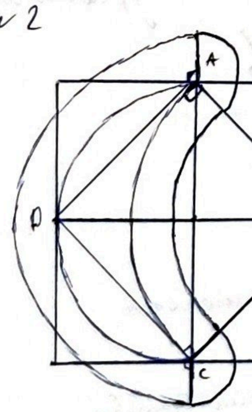
просуммировав получим:

$35(18+36+9) + 21(54+72+9) + 7(54+36) + 18 = 35 \cdot 63 + 21 \cdot 135 + 7 \cdot 90 + 18 =$

$= 2205 + 2835 + 630 + 18 = 5688$

Ответ: 5688

№2



1) поймём, что новая фигура - это старая, но от каждой точки границы отступили 0,25 перпендикулярно касательной в этой точке.

2) всю фигуру можно разделить на 4 части:

а) изначальная фигура

б) полоска дуги окружности с центром O

в) полоска дуги окр. с центром в (1;0)

г) 2 сектора

Найдём площадь каждой из них отдельно:

а) $S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 - \frac{1}{4}\pi \cdot (\sqrt{2})^2 + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1$ (сектор 90° - сектор 45° + треугольник ABC)

б) $S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (1,25)^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{9}{16} = \frac{9\pi}{32}$

в) $S = \frac{1}{4}\pi \cdot (\sqrt{2})^2 - \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2} - 0,25)^2 = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{64} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

г) Т.к. $BA \perp AO$ и $BC \perp DC \Rightarrow$ дуги равны по 135° $\Rightarrow$

$\Rightarrow S = \frac{135 \cdot 2}{360°} \cdot \pi \cdot (0,25)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{64}$

Ответ: $\frac{32 + 11\pi + 4\sqrt{2}\pi}{32}$

Чистовик

№4

1) Докажем, что по всем дугам одной длины автомобиль должен проехать нечётное количество раз:

а) если по всем чётное, то время поездки будет чётным, но $95 \not\vdots\, 2$

б) если по 2 видам дуг чётное, то поймём, что если проехать дугу одного вида (AB или BC или AC) чётное количество раз, то передвижение по ней не внесёт вклада в итоговое перемещение, но тогда вклад внесёт лишь 1 дуга, причём он будет ненулевой $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ итоговое перемещение не будет равно 0, а значит мы не вернулись в A

в) если 1 вид дуги чётное, а 2 - нет, но тогда применив аналог. рассуждение (из пб) для пв получим, что вклад вносят всего 2 дуги, однако все дуги имеют разную длину, а значит сумма их вкладов не может быть равна 0, а значит мы снова не вернулись в A: значит по каждой дуге (каждого типа) машина проедет нечётное количество раз, тогда можно записать такое уравнение:

$95 = 5 + 10a + 13 + 26b + 19 + 38c$, где a, b, c - ~~[illegible]~~ $\in \mathbb{N}_0$

$56 = 10a + 26b + 38c$

$28 = 5a + 13b + 19c$

$c \geq 1$ - очевидно не подходит $\Rightarrow c = 0$

$b \geq 2$ - не подходит $\Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 3$ $\Rightarrow$ единственное решение такого уравнения возможно только при $a = 3$, $b = 1$, $c = 0$, т.е.:

$95 = 5 \cdot 7 + 13 \cdot 3 + 19$ и видно, что так можно проехать не нарушив условие;

найдём длину $\overset{\frown}{AC}$: $\overset{\frown}{AC} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{AB}{2} + \frac{BC}{2}\right) = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = 40$ км, значит

расстояние равно: $15 \cdot 7 + 25 \cdot 3 + 40 = 105 + 75 + 40 = 220$ км

Ответ: 220 км

№5

$y=f(x)$, $f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$

$f\left(1-\frac{4}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$ (т.к $D(f)=R$, $E(f)=R$)

Пусть $g(x)$ - обратная к f, тогда заметим, что $g(x) = 1+2x \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x$,

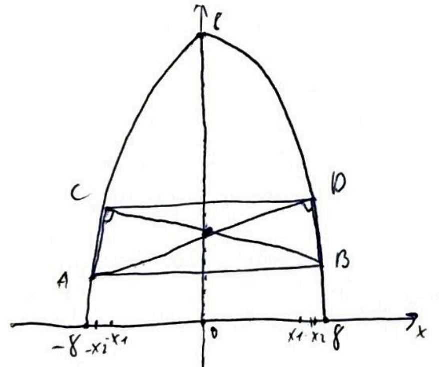
тогда $f(f(x)) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$, тогда заметим, что

$\underbrace{f(f\dots f(x))}_{n} = \frac{1}{2^n}x + \frac{1}{2^n} - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2^{11}}x + \frac{1}{2^{11}} - 1$, тогда

$g'(x) = \frac{1}{2^{11}} \Rightarrow$ тангенс угла наклона кас-к $g(x)$ в т. $x=0$ равен $\frac{1}{2^{11}}$

Ответ: $\frac{1}{2048}$

№6



$f(0)=8 \Rightarrow a=8$
$f(8)=0 \Rightarrow b=\frac{1}{8}$ $\Big| \Rightarrow y=f(x) = 8-\frac{1}{8}x^2$

иное расположение AB и CD - невозможно т.к иначе углы не могут быть равны 90°

Пусть $A(-x_2;\ 8-\frac{1}{8}x_2^2)$
$B(x_2;\ 8-\frac{1}{8}x_2^2)$
$C(-x_1;\ 8-\frac{1}{8}x_1^2)$
$D(x_1;\ 8-\frac{1}{8}x_1^2)$

$\Leftrightarrow$ Запишем уравнение прямой AC:

$y = (x+x_1)\left(\frac{8-\frac{1}{8}x_1^2-8+\frac{1}{8}x_2^2}{x_2-x_1}\right) + 8 - \frac{1}{8}x_1^2 =$

$= (x+x_1)\frac{1}{8}(x_1+x_2) + 8 - \frac{1}{8}x_1^2 =$

$= \frac{1}{8}(x_1+x_2)x + 8 + \frac{1}{8}x_1x_2$

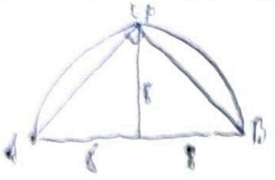
Запишем уравнение CB:

$y = (x+x_1)\left(\frac{8-\frac{1}{8}x_2^2-8+\frac{1}{8}x_1^2}{x_1+x_2}\right) + 8 - \frac{1}{8}x_1^2 = (x+x_1)\frac{1}{8}(x_1-x_2) + 8 - \frac{1}{8}x_1^2 =$

$= \frac{1}{8}(x_1-x_2)\cdot x + 8 - \frac{1}{8}x_1x_2$, чтобы AC было перп. CB должно выполняться равенство: $\frac{(x_1-x_2)(x_2+x_1)}{64} = -1 \Rightarrow x_2^2 - x_1^2 = 64$

т.к $\triangle ACB$ - прямоуг.: $\rho(C, AB) = \sqrt{x_2^2-x_1^2}$ $\left(\frac{h}{x_2-x_1} = \frac{x_1+x_2}{h}\right) =$

$= 8$, значит расстояние между AB и CD равно 8, но это соответствует тому, что т. C ≡ т. D и совпадают в наивысшей точкой тела:



Цилитовик

что, конечно, странно.

Ответ: 8

84-45-80-60
(40.48)

Черновик

$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$

$f\left(\frac{-x-2}{-x+2}\right) = f\left(-\frac{x+2}{x-2}\right) = -\frac{2}{2-x} = \frac{2}{x-2}$

$f\left(-\frac{2}{2}\right) = f(-1) = -1$

$\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \frac{x+2-4}{x+2} = \left(1 - \frac{4}{x+2}\right)$

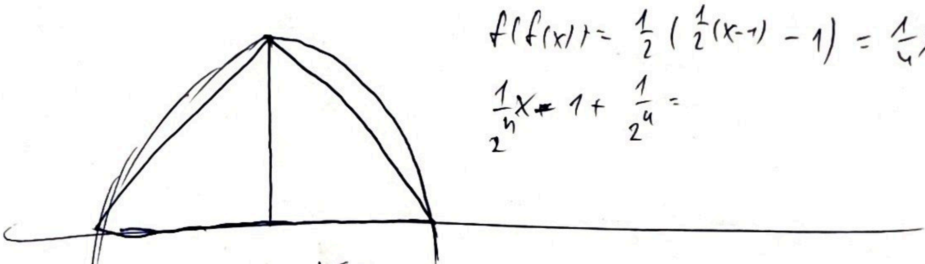
$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{x+2} = \frac{-x+2+2}{2(x+1)} = \frac{4-x}{2(x+2)}$

$9 \quad 1+2x$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

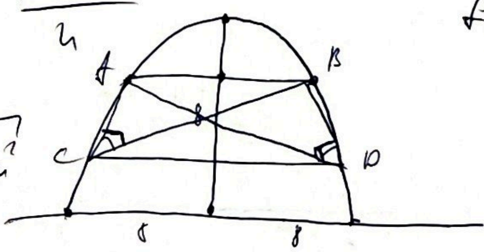
$f(f(x)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x-1) - 1\right) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} =$

$\frac{1}{2^4}x - 1 + \frac{1}{2^4} =$



$\frac{h}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + x_1}{4}$

$f(x) = 8 - \frac{1}{8}x^2$



$h = \sqrt{x^2 - x_1^2}$

8

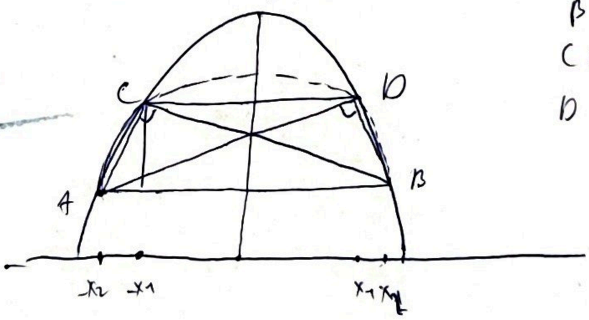
$8 - \frac{1}{8}x_2^2$

$A(-x_2; x_2^2)$

$B(x_2; x_2^2)$

$C(-x_1; x_1^2)$

$D(x_1; x_1^2)$



$f(x_1) - f(x_2) =$

$8 - \frac{1}{8}x_1^2 - 8 + \frac{1}{8}x_2^2 =$

$\frac{1}{8}(x_2^2 - x_1^2)$

$AC: \cancel{(x+x_2)} + x_2^2 \quad (x+x_2) \cdot \frac{8 - \frac{1}{8}x_1^2 - 8 + \frac{1}{8}x_2^2}{x_2 - x_1} + x_2^2 =$

$= \boxed{(x+x_2)\frac{(x_2+x_1)}{8} + x_2^2}$

$\frac{1}{8}x_1^2 - \frac{1}{8}x_2^2 - x_1^2$

$\frac{\frac{1}{8}x_1^2 - \frac{1}{8}x_2^2}{x_1 + x_2} = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)$

$BC = (x - x_2)\left(\frac{8 - \frac{1}{8}x_1^2 - 8 + \frac{1}{8}x_2^2}{x_1 + x_2}\right) + x_2^2 = (x - x_2)\frac{1}{8}(x_1 - x_2) + x_2^2$

$\frac{1}{8}(x_1 - x_2) \cdot \frac{1}{8}(x_2 + x_1) = -1$

$x_1^2 - x_2^2 = -64$

Черновик

№1

$C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^3$ · без универсалов $= 3 \cdot 6 \cdot C_7^3$

$C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_7^3$ – 1 универсал на защите $= 36 \cdot C_7^3$

$C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^2 \cdot C_3^1$ – 1 универсал в нападении $= 54 \cdot C_7^2$

$C_3^1 \cdot C_3^2 \cdot C_7^3$ – 2 универсала в защите $= 9 \cdot C_7^3$

$C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^1 \cdot C_3^2$ – 2 универсала в атаке $= 54 \cdot 7$

$C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^3$ – 3 универсала в атаке $= 18$

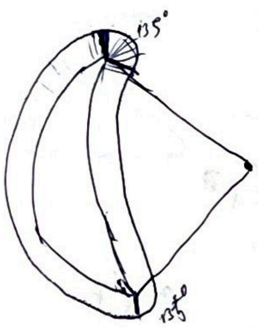
$C_7^3 =$

35 · 63 = 105 + 2100 = 2205

135 · 21 = 135 + 2700 = 2835; 2835 + 2205 = 5040

5040 + 630 = 5670 + 18 = 5688

№2



$\frac{270^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 0{,}25^2$ + не учитываем из-за поворота

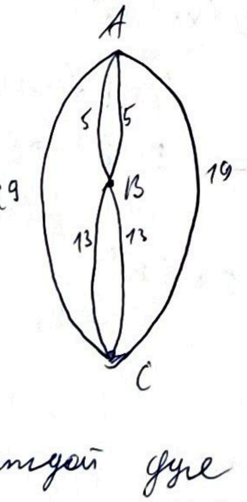
$L = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \rightarrow S_k = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \cdot 0{,}25 = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}$

$S_m = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\pi \cdot 2 + 1 = 1$

получаем $1 + \frac{\pi}{64} + \frac{\sqrt{2}\pi}{16} = \frac{64 + 4\sqrt{2}\pi + \pi}{64}$

$1 + \frac{18\pi}{64} + \frac{3\pi}{64} + \frac{\pi}{64} + \frac{8\sqrt{2}\pi}{64} = \frac{64 + 22\pi + 8\sqrt{2}\pi}{64} = \frac{32 + 11\pi + 4\sqrt{2}\pi}{32}$

№3



$95 \,|\, 19 \;\; 5 \Rightarrow 5 + 10a + 13 + 26b + 19 + 38c = 95$

38k

10k

10 + 26k

$56 = 10a + 26b + 38c$

$28 = 5a + 13b + 19c$

$a = 3, b = 1, c = 0$

$95 = 7(5) + 13 \cdot 3 + 19$

$95 = 38 \cdot a + 10b + (10 + 26k) \cdot c, \; a, b, c \in \mathbb{Z}^+$

$a + 2$ очев $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 0 \end{array}\right.$

по каждой дуге надо проехать нечётное кол-во раз.

по всем чётное очев нельзя (95 $\not⋮$ 2)

Если чётное кол-во раз проехали по 1 дуге, значит её изменение расстояния на ней равно 0, тогда значит если 2 нечётные, то её вклад не 0, а у остальных 0 => не могли вернуться; если у 1 нёч, а 2 нет, то вклад в расстояние у каждой равен диаметру дуги, а т.к. они задаются, значит одно 2 не...