0 497713 200009

49-77-13-20
(40.9)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Сафонова Романа Никитича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

13 14-15-20

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
—	+	—	+	±	+	+	—	[illegible]
0	12		12	~~7~~85	12	12		56

56 (пятьдесят шесть) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

49-77-13-20 (40.9)

Черновик

$$\begin{cases} ab \cdot |a-b-13| = (b-3)\cdot |ab| \\ \sqrt{a-b+5} = a-7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (xy-3+3x-y)|y-x-9| = (x-4)|xy-3+3x-y| \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 \end{cases}$$

$a-b+5 = a^2-14a+49$

$b = -a^2+15a-44$

$-(a^2-15a+44)$

$-(a-4)(a-11)$

$y \geq 4$

$y-x+9 \geq 13-x$

$-y^2+9y-77$

$-(y^2-9y+77)$

$D = 81-44 = 37$

$y-x+9 = y^2-8y+16$

$(y+3)(x-11)$

$x = -y^2+9y-7$

$(-y^3+9y^2-7y-3-3y^2+27y-21-y)\,|y+y^2-9y+7-9|$

$a_4 = 76+2 = 78$

$(-y^3+6y^2+19y-24)\,|y^2-8y-2|$

$|(y-4+3\sqrt{2})(y-4-3\sqrt{2})|$

$-(y-1)(y^2-5y-24)$

$-(y-1)(y-8)(y+3)|(y-4+3\sqrt{2})(y-4-3\sqrt{2})| =$

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$ $\quad f\left(\frac{-1+1}{-2}\right) = -\frac{1}{2}$ $\quad f\left(\frac{a+2}{a}\right) = \frac{1}{a}$

$\frac{1}{x-1} = \frac{\frac{x+1}{x-1}-1}{2}$

$f(0)$

$\frac{x+1}{x-1} = 1+\frac{2}{x-1}$

$\frac{x+1}{x-1} = -\frac{1}{2}$ $\quad x = -\frac{1}{3}$

$f(f(0)) = f\left(f\left(\frac{-1+1}{-1-1}\right)\right) =$

$\frac{2x+2+x-1}{2(x-1)} = \frac{3x+1}{2(x-1)} = 0$

$(f(g))' = f'(g)\cdot g'$

$f(f(0)) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{-\frac{1}{3}+1}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{3}{4}$

$(f(f(x)))' = f'(x)\cdot f'(f(x))$

$(f(f(f(x))))' = f'(f(f(x)))\cdot f'(f(x))\cdot f'(x)$

~~$f(f(f(0))) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}-1} = \frac{1}{\frac{1-f(x)+1}{f(x)-1}} = \frac{f(x)-1}{2-f(x)}$~~

$18+a-8x^2=0 \iff x=0$

$a = -18$

$y = -(8x^2+18)$

$y = -18-8x^2$

$f(f(f(f(x)))) =$

$99/9 = 11$

$99\cdot 3 = 297$

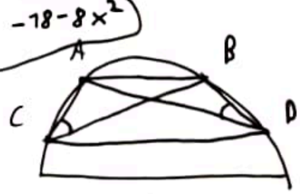
$99\cdot 9 = 891$

$99\cdot 10 = 990$

$99\cdot 11 = 1089$

$\underset{..}{9..9}$

$(10^{100}-1)k =$



$f(x) = \frac{x-1}{2}$ $\quad x \neq 1$

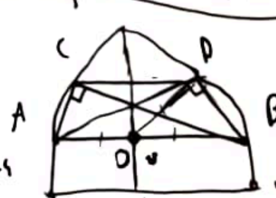
$g(x) = \frac{x-7023}{7024}$

$|x_1-x_2| = \sqrt{D}$

$\sqrt{72b} = 24$

$6\sqrt{2b} = 24$

2 4



72 | 2
36 | 2
18 | 2
9

$\sqrt{2b} = 4$

$2b = 16$

$b = 8$

$= k\underbrace{00\ldots0}_{100} - k$

$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2}-1}{2} = \frac{x-3}{4}$

$f(f(f(x))) = \frac{\frac{x-3}{4}-1}{2} = \frac{x-7}{8}$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик

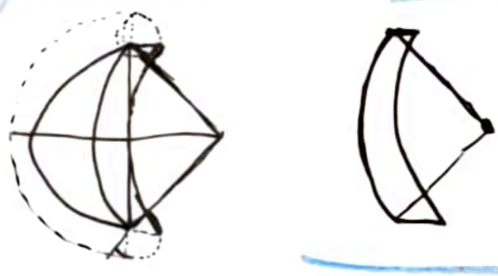
$$3\cdot\left(\frac{5\cdot4}{2} + 3\cdot5\cdot4 + 3\cdot\frac{6\cdot5}{2} + 3\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2} + \frac{5\cdot4}{2}\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2}\right)$$

3 у. в нап. у. в защ. 2 у. в нап. 2 у. в защ. 1 у в нап 2 у в защ. нет у в нап. без у

$(y+3)(x-1)$

у а в

$405 \times 3 = 1215$



9999

КО...0 – К

100

123000 00 – 123

9999

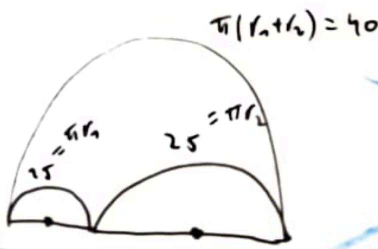
85

A +(14) +34

+22+7 36

A +7 +17 +17 35

50 34 56



Чистовик

№1

У. – универсал
З. – защитник
Н. – нападающий

Рассмотрим колл. способов выбрать 2 З. и 3 Н. Если:

1) 2 У. будут выбраны как З. и 1 У. как Н.

$3 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 45$

2) 3 У. будут выбраны как Н.

$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

3) 2 У. в Н. и 1 У. в З.

$3 \cdot 5 \cdot 6 = 90$

4) 2 У. в З. и нет У. в Н.

$3 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 60$

5) Выбор состоялся без У.

$\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 200$

Способов выбрать лучшего хоккеиста:

$3 \cdot (45 + 10 + 90 + 60 + 200) = 1215$

↑
выбрать вратаря

Ответ: 1215

№5

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1} = \frac{\frac{x+1}{x-1} - 1}{2}$

Заметим, что $f(x) = \frac{x-1}{2}$

$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x-3}{4}$

$\underbrace{f(f(\ldots f(x))\ldots)}_{n \text{ раз}} = \frac{x - (2^n - 1)}{2^n}$, тогда $g(x) = \frac{x - 1023}{1024}$

↓

Чистовик

по опр. тангенс угла наклона кас. к графику $g(x)$ в т. $x=0$ равен $g'(0)$

$$g'(x)=\frac{1}{1024} \Rightarrow g'(0)=\frac{1}{1024}$$

Ответ: $\frac{1}{1024}$

№7

Наиб. 100-значное число $= \underbrace{99\ldots9}_{100} = 10^{100}-1 \Rightarrow$ ответ больше этого не может быть.

$$S(10^{100}-1)=900$$

Рассмотрим $m(10^{100}-1) = \overline{m\underbrace{0\ldots0}_{100}} - m$

Пусть m – k-значное число, $m=\overline{a_1a_2\ldots a_k}$, без ограничения общности $a_k \neq 0$

$$\overline{a_1a_2\ldots a_k\underbrace{00\ldots0}_{100}} - \overline{a_1a_2\ldots a_k} = \overline{a_1a_2\ldots a_{k-1}b_{k+1}\underbrace{99\ldots9}_{100-k}b_1b_2\ldots b_k},$$

причём $b_i = 9-a_i$, $1\le i\le k-1$

$b_{k+1}=a_k-1$

$b_k = 10-a_k$

Тогда несложно заметить что $S(\overline{a_1\ldots a_{k-1}b_{k+1}\underbrace{9\ldots9}_{100-k}b_1\ldots b_k})=$

$$=(100-k)\cdot 9+\underbrace{(a_1+b_1)}_{9}+\underbrace{(a_2+b_2)}_{9}+\ldots+\underbrace{(a_{k-1}+b_{k-1})}_{9}+(b_k+b_{k+1})=$$

$$=9\cdot(100-k)+(k-1)\cdot 9+\underbrace{(10-a_k+a_k-1)}_{9}=9(100-k)+9\cdot k=900=$$

$=S(10^{100}-1) \Rightarrow 10^{100}-1$ удовлетворяет условию

Ответ: $10^{100}-1$.

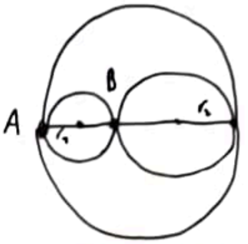
Чистовик

№4

1 час 25 минут = 85 минут

Чтобы через 85 минут снова оказаться в т. A надо проехать по дуге AB 5 раз, дуге BC 3 раза и 1 раз по дуге AC.

Такой маршрут возможно ~~в этом~~ проехать, например в этом порядке. Тогда автомобиль проедет $15\cdot5 + 25\cdot3 + |\overset{\frown}{AC}|$



Пусть r_1, r_2 и r_3 – радиусы окружностей, $r_1 < r_2 < r_3$

Тогда $|\overset{\frown}{AB}| = \pi r_1 = 15$

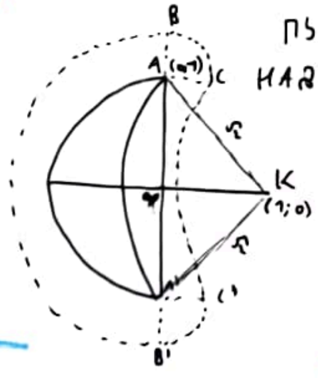
$|\overset{\frown}{BC}| = \pi r_2 = 25$

$|\overset{\frown}{AC}| = \pi(r_1 + r_2) = \pi r_1 + \pi r_2 = 40$

$15\cdot5 + 25\cdot3 + |\overset{\frown}{AC}| = 15\cdot5 + 5\cdot15 + 40 = 190$ (км)

Ответ: 190 км.

№2



Пунктиром нарисована фигура, площадь которой надо найти.

Окр. с центром B $(0,0)$ – ω_1, радиус $R_1 = 1$

Окр. с центром в $(1;0)$ – ω_2, радиус $R_2 = \sqrt{2}$

1) $ABC = A'B'C'$ – четверть окр. радиусом 0,5 $\Rightarrow$ $S_{(ABC)} + S_{(A'B'C')} = 2\,S_{(ABC)} = 2\cdot\frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{8}$

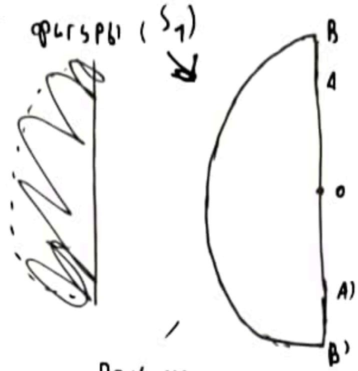
2) $\angle AKA' = 90^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AA'} = \frac{1}{4}c$, где c – длина ω_2

$|\overset{\frown}{AA'}| = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\sqrt{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

$S_{AA'CC'} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\cdot AC = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

Чистовик

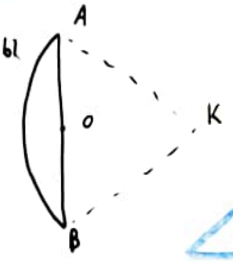
3) Найдем площадь этой фигуры (S_1)



полуокр. радиусом OB = 1,5

$S_1 = \frac{1}{2}\pi(1,5)^2 = \frac{9\pi}{8}$

4) Найдем площадь этой фигуры (S_2)



$S_2 = S_{(\text{сектора } AKB)} - S_{\triangle ABK} = \frac{1}{4} S_{\omega} - S_{\triangle ABK} = \frac{1}{4}\pi\cdot\sqrt{2}^2 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$

5) $S_{\text{исходной фигуры}} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{9\pi}{8} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{10\pi + 2\pi\sqrt{2} - 4\pi + 8}{8} =$

$= \frac{\pi(6+2\sqrt{2})}{8} + 1$

Ответ: $\frac{(6+2\sqrt{2})\pi}{8} + 1$.

№6

Высота тунеля равна 18м => если поднять пол (Ox) на 18м вверх, то $y = a - bx^2$ пересечёться с Ox только в т. O =>

=> $a + 18 - bx^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow a = -18$

Ширина тунеля = 24м. $= |x_1 - x_2| = \sqrt{D}$

x_1, x_2 – корни $y = -18 - bx^2$

$\sqrt{D} = 24$

↓

чистовик

$6\sqrt{2b} = 24$

$\sqrt{2b} = 4$

$b = 8$

потолок имеет вид графика $y = -18 - 8x^2$