+ 1 С/-

0790890340002

79-08-90-34
(39.12)

Дешифр

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Сахно Александра Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
79-08-90-34	56	0	0	12	12	12	8	12	0

79-08-90-34
(39.12)

56 (~~пятьдесят~~ шесть) 1 стр.

Чистовик.

(1) Посчитаем кол-во способов выбрать 6-ку, если бы не было универсалов.

Очевидно, что это $3\cdot C_5^2\cdot C_6^3 = 3\cdot\frac{5!}{2!\cdot3!}\cdot\frac{6!}{3!\cdot3!} = 30+20=$

$=50.$

Теперь рассмотрим универсалов:

образуются такие ситуации:

	ЗАЩИТНИКИ	НАПАДАЮЩИЕ
	УУУ	
(1)	УУ	У
(2)	У	УУ
(3)		УУУ

(Тут все универсалы разные, поэтому в дальнейших действиях нужно будет домножать на $3!=6$.)

Причём случай, когда у защитников 3 универсала нам не подходит, т.к. по условию нужно выбрать двух. (1): $3!\cdot C_6^2$, т.к. к одному универсалу нужно выбрать ещё 2 нападающих.

аналог. ~~аналог~~: (2) $3!\cdot5\cdot6$; (3) $3!\cdot C_5^2$.

И итого: $50+3!\cdot\frac{6!}{2!\cdot4!}+3!\cdot30+3!\cdot\frac{5!}{2!\cdot3!} = 50+90+180+60=380.$

Ответ: 380 способов.

2 стр.

③ $|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|+\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=0 \iff$

$\iff |x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|+\frac{|y|}{y}-\frac{|x|}{x}+2=0$

рассмотрим $\frac{|y|}{y}-\frac{|x|}{x}+2$.

$x>0, y>0: \ 1-1+2=2$

$x>0, y<0: \ -1-1+2=0$

$x<0, y>0: \ 1+1+2=4$

$x<0, y<0: \ -1+1+2=2$

теперь заметим следующее: в уравнении слева сумма двух модулей и выражения, которое принимает значения $\{0,2,4\}$, а справа ноль. В силу того, что ~~модули~~ значение модуля всегда неотриц., то единственный возможный вариант, ~~когда~~ когда $\frac{|y|}{y}-\frac{|x|}{x}+2=0$, тогда исходное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} |x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|=0 \\ x>0 \\ y<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3+y^3-19=0 \\ x^2y+xy^2+6=0 \\ x>0 \\ y<0 \end{cases} \iff$$

рассмотрим отдельно $\begin{cases} x^3+y^3-19=0 \\ x^2y+xy^2+6=0 \ |\cdot 3 \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x^3+y^3=19 \\ 3x^2y+3xy^2=-18 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+y)^3=1 \\ x^3+y^3=19 \end{cases} \iff$$

79-08-90-34
(39.12)

3 стр.

$$\iff \begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=19 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1-y \\ (1-y)^3+y^3=19 \ (*) \end{cases}$$

$(*)$: $(1-y)^3+y^3=19$

$(1-y+y)((1-y)^2-y(1-y)+y^2)=19$

$1-2y+y^2-y+y^2+y^2=19$

$3y^2-3y-18=0$

$y^2-y-6=0$

$\left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=3 \end{array}\right.$

тогда решения: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-2 \\ x=3 \end{cases} \\ \begin{cases} y=3 \\ x=-2 \end{cases} \end{array}\right.$

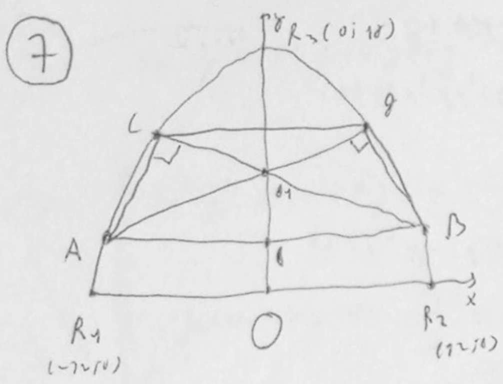
$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-2 \\ x=3 \end{cases} \\ \begin{cases} y=3 \\ x=-2 \end{cases} \end{array}\right. \\ x>0 \\ y<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$$

Ответ: $(3,-2)$.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

4 стр.

(7)



заметим, что т.к. $AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ − трапеция. в силу симметрии $AD \cap CB = O_1 \in OY$; $R_1O = OR_2 = \frac{24}{2} = 12$;

$OR_3 = 18$.

найдём уравн. $y = a - bx^2$ по точкам R_1, R_2, R_3:

R_3: $y = a - b \cdot 0 = a \Rightarrow a = 18$

R_2: $0 = 18 - b \cdot 144 \Rightarrow b = \frac{18}{144} = \frac{1}{8}$

$\Updownarrow$

$y = 18 - \frac{x^2}{8}$

введём коорд. точек $A(-x_1; y_1)$; $B(x_1; y_1)$; $C(-x_2; y_2)$; $D(x_2; y_2)$; $O(0; y_1)$ где, очев., $x_1, y_1, x_2, y_2 > 0$.

$\angle ADB = 90^\circ \Rightarrow DO = OB = AO$. $DO = OB \Rightarrow \sqrt{(x_2 - 0)^2 + (y_2 - y_1)^2} = x_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = (y_2 - y_1)^2$ (*)

~~$x_2^2 + (y_2-y_1)^2 = x_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = (y_2-y_1)^2$ (*)~~

т.к. A, B, C, D принадл. нашей параболе, то:

$\begin{cases} y_1 = 18 - \frac{x_1^2}{8} & (1) \\ y_2 = 18 - \frac{x_2^2}{8} & (2) \end{cases}$ вычтем (1) (2):

$-(y_1 - y_2) = 18 + \frac{x_1^2}{8} - 18 - \frac{x_2^2}{8}$

$y_1 - y_2 = \frac{x_2^2 - x_1^2}{8}$. ~~подставим (*)~~

~~$y_1 - y_2 = \frac{(y_2-y_1)^2}{8}$~~

79-08-90-34 (39.12)

5 стр.

$y_2 - y_1 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{8}$

подставим (*):

$y_2 - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)^2}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_2 - y_1 = 8 \\ y_2 = y_1 \end{array} \right.$ заметим, что $y_2 - y_1$ это искомое расст. между CD и AB. Ответ: 8.

(5) $\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ca - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c} \geq$

$\geq \frac{2bc - 2a^2 + 2a + 2ac - 2b^2 + 2b + 2ab - 2c^2 + 2c}{\frac{2}{3}(a+b+c)}$ (1) $=$

заметим: (1)

$= \frac{(a+b+c)^2 - 3(a^2+b^2+c^2) + 2(a+b+c)}{\frac{2}{3}(a+b+c)}$ (2) $\geq$

воспользуемся неравенством о сред. арифмет. и сред. квадратичным: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ $(a,b,c>0)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{9} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \Leftrightarrow$

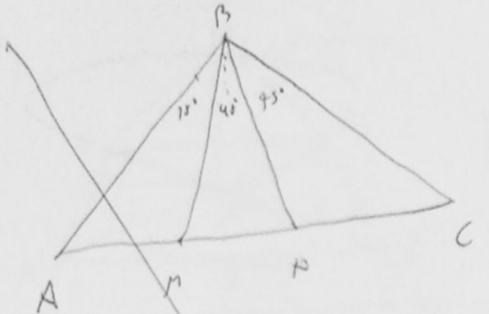
$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2)$

(2) $\frac{3(a^2+b^2+c^2) - 3(a^2+b^2+c^2) + 2(a+b+c)}{\frac{2}{3}(a+b+c)} = 3$

равенство достигается, например, при $a = b = c = 1$.

лемма проверили (~~...~~, что другого расположения 7,10 быть не может) 6 стр.

4



$S_{ABM} = \frac{AB \cdot BM \sin 15^\circ}{2}$; $S_{BKC} = \frac{BK \cdot BC \cdot \sin 75^\circ}{2}$

пусть $AB \cdot BM = a$, $BK \cdot BC = b$.

по усл.: $\begin{cases} \frac{a \cdot \sin 15^\circ}{2} + \frac{b \sin 75^\circ}{2} = 5 \\ \frac{ab \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ}{4} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \sin 15^\circ + b \cos 15^\circ = 10 \\ \frac{ab \cdot \sin 30^\circ}{2} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a \sin 15^\circ + b \cos 15^\circ)^2 = 100 \\ ab = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \sin^2 15^\circ + b^2 \cos^2 15^\circ + 2ab \sin 15^\circ \cos 15^\circ = 100 \\ ab = 48 \end{cases} \Leftrightarrow$

$ab \cdot \sin 30^\circ$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \sin^2 15 + b^2 \cos^2 15^\circ + \frac{ab}{2} = 10 \\ ab = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \sin^2 15^\circ + b^2 \cos^2 15^\circ = 240 \\ ab = 48 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \sin^2 15^\circ + b^2 - b^2 \sin^2 15^\circ = 240 \\ ab = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 15^\circ (a^2 - b^2) + b^2 = 240 \\ ab = 48 \end{cases}$ (1c)

т. к. ~~...~~ $\cos 30^\circ = 1 - 2 \cdot \sin^2 15^\circ \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

79-08-90-34 (39.12)

7 стр.

6 1 час 25 мин = 85 мин

Несложно заметить, что ~~единственное~~ разложение 85 по 7, 11 и 17 такое:

$85 = 2 \cdot 17 + 4 \cdot 11 + 1 \cdot 7$, (1) ~~тогда AC~~ ~~или $85 = 1 \cdot 17 + 4 \cdot 11 +$~~ или $85 = 1 \cdot 17 + 3 \cdot 11 + 5 \cdot 7$ (2) или $85 = 17 \cdot 5$ (3)

найдем длину AC.

по усл. $\frac{\pi \cdot AB}{2} = 15$; $\frac{\pi \cdot BC}{2} = 25$

$\Downarrow$

$\frac{\pi (AB + BC)}{2} = 40$

$\frac{\pi \cdot AC}{2} = 40$, тогда дуга AC 40.

если 17 по 4, то 17 нельзя пол. из 11 и 7. осталось 34. при 17 по 2 (1), при 17 по 1 (2), при 17 по 0 (3). больше нет.

(Д-ВО, ПОЧЕМУ ДРУГИХ СЛУЧ. НЕТ)

$\Downarrow$

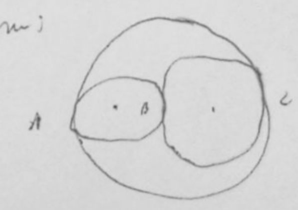
~~тогда он проехал: $2 \cdot 40 + 4 \cdot 25 + 1 \cdot 15 = 80 + 100 + 15 = 195$~~

(1) не подх., т.к. он не может проехать 1 по AB и 4 по BC.

$\downarrow$

(2) подх.; тогда он проехал: $1 \cdot 40 + 3 \cdot 25 + 5 \cdot 15 = 190$ км

Маршрут:



AB−AB−AB−BC−BC−BC−AC−BC−AC.

~~Далее, т.к. поскольку разл. только такие;~~

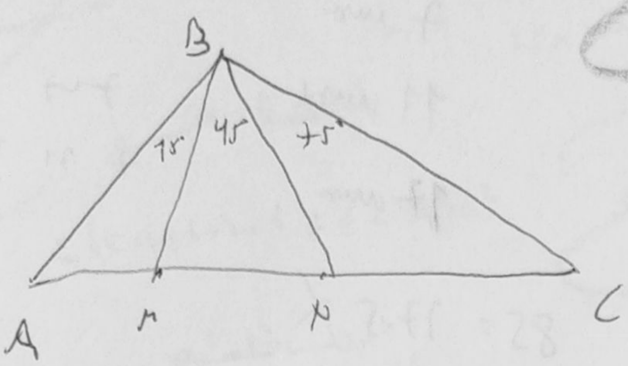
~~сумма он проехал~~ (3) ~~он проехал $40 \cdot 5 = 200$ км~~ не подх., т.к. он вернется в C, а не A.

Ответ: 190 км

11 стр.

(с) $\cancel{\begin{cases}(a^2-b^2)b\cdot\frac{2-\sqrt3}{4}+b^2=240\\ ab=48\end{cases}}$

(4)



(нетрудно понять, что это единственно возм. расположение M и N по усл.)

($\angle ABC = 135°$ исх. сумма внутр. углов)

по усл. $S_{ABM}\cdot S_{NBC}=3 \Rightarrow \frac{AB\cdot BM\cdot\sin15°}{2}\cdot\frac{BN\cdot BC\cdot\sin75°}{2}=3$

$$\frac{AB\cdot BM\cdot BN\cdot BC\cdot\sin15°\cdot\sin75°}{2\cdot2}=3$$

$\Downarrow$ (перегруппировали мн-лей)

$\frac12\cdot\sin30°=\frac14$

$$\frac{\frac{AB\cdot BC}{2}\cdot\sin135°\cdot\frac{BM\cdot BN}{2}\cdot\sin45°\cdot\sin15°\cdot\sin75°}{\sin^2 45°=\frac12}=3$$

(делим на $\sin^2 45°$, т.к. $\sin135°=\sin45°$)

$\cancel{S_{ABC}\cdot 2S_{BMN}\cdot\sin45°\cdot\cos15°=3}$

$\cancel{S_{ABC}(S_{ABC}-S_{ABM}-S_{NBC})\cdot\frac12\cdot\sin30°=3}$

$\cancel{S_{ABC}(S_{ABC}-5)=12}$

$\cancel{S_{ABC}^2-5S_{ABC}-12=0}$

$\cancel{\left[\begin{array}{l}S_{ABC}=\frac{5+\sqrt{73}}{2}\\ S_{ABC}=\frac{5-\sqrt{73}}{2}\end{array}\right.}$

~~ответ:~~ $\cancel{S_{ABC}=\frac{5+\sqrt{73}}{2}}$

$\cancel{S_{ABC}\cdot S_{ABN}}$

$S_{ABC}\cdot S_{MBN}\cdot\frac14=3\cdot\frac12\;\frac32\;2$

$S_{ABC}(\underbrace{S_{ABC}-S_{ABM}-S_{NBC}}_{5})=6$

$S_{ABC}^2-5S_{ABC}=6 \Rightarrow S_{ABC}=6$ ответ: 6

12 стр.

Черновик

7;25 = 85 мин

~~17 мин~~

7 мин

11 мин

17 мин

7+7

7 14 21

$85 = 17\cdot 5$ ✗

$17+4$ ~~85 − 68 = 17~~

2×17

4×11

1×7

$17\cdot 3 : 17\cdot 2 = 34$

$17\cdot 2$; $17\cdot 3 = 51$

85 mod

$11\cdot 4 + 7$

$85 \equiv 1 \mod 7$

$85 \equiv 8 \mod 11$

$85 \equiv 0 \mod 17$

$7+11 = 18$

$3\cdot 7 + 2\cdot 4 + 4 = 78$

$17\cdot 4 = 68$

44 24

37 35

13 стр.

Черновик

$c=1$ $b=\frac{1}{2}$ $a=1$

$$\frac{2bc-2a^2+2a+2ac-2b^2+2b+2ab-2c^2+2c}{2(a+b+c)}$$

$\frac{1-\frac{1}{2}+x}{1}$

$\frac{2}{3}(a+b+c)^2$

$2bc + 2ab + 2ab \geq a^2+b^2+c^2$

$a+b=c$

$a+c=a$

$c+a=a$

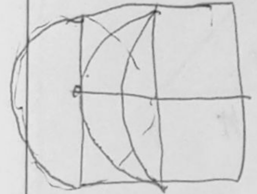
$a^2+b^2+c^2 - 2a^2$

$$\frac{2a-a^2+2b-b^2+2c-c^2}{2(a+b+c)}$$

$\frac{x=x+2}{2}$

$2a = a+b+c$

$b = a+c+1$



$1;25 = 60+25 = 85$ мин

$-(a-1)^2$

$2a = \frac{2(a+a+a)}{3}$

$\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+$

$-a^2-b^2-c^2$

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$

$a=1$ $b=\frac{1}{2}$

$a^2+b^2+c^2$

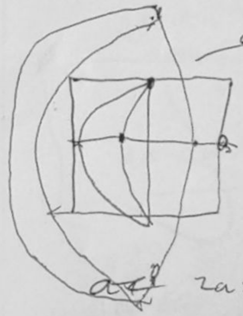
$1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2(a+b+c)}$

$a+b+c$

$(a+b+c)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2)$

$\frac{\frac{1}{2}-x+x}{2} + \frac{1-\frac{1}{2}+1}{1} + \frac{1-\frac{1}{2}+1}{1}$

$2bc - a^2$



$a^2+b^2+c^2$

$2bc - a^2 - a^2 + 2a - 1 + 1$

$2a = a+b+c$

$b+c = a$

$a+b = c$

$2bc - a^2 - (a-1)^2 + 1$

$a^2 \geq 2a$

$2bc - a^2 + 1 - (a-1)^2$

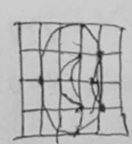
$-a^2 \leq -2a$

$b+a = b$

$2a = \frac{3}{2}(a+b+c)$

$\frac{3}{2}(a+b+c) = 2a$

$2a = a^2$



$$\frac{2bc-2a^2+2a+2ac-2b^2+2b+2ab-2c^2+2c}{2(a+b+c)}$$

$$\frac{-a^2+2a-b^2+2b-c^2+2c}{2(a+b+c)}$$

$$\frac{(a+b+c)^2-3(a^2+b^2+c^2)+2(a+b+c)}{2(a+b+c)}$$

14 стр.

Черновик.

1) 1 фронтальная 2 закрытых 3 начальные

ПЛЕТ.: 3 фронт., 5 закр., 6 нач., 3 угл.

фронт.: 3 сп. $3 \cdot C_5^2 \cdot C_6^2$ — без угл.

закр.: $\cancel{C_5^2 \cdot C_3}$

1 сп.: ~~одну угловую~~

C_6^2 закр.

Х З Н

Х ууу

уу у

у уу

ууу

$3 \cdot 3! \cdot C_6^2$

$3 \cdot 3! \cdot 5 \cdot 6$

$3 \cdot C_5^2 \cdot \cancel{C_6} \cdot 3!$

$3 \cdot \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{6!}{3!3!} + 3 \cdot 3! \cdot \frac{6!}{2!4!} + 3 \cdot 3! \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot \frac{5!}{2!3!} \cdot 2!$

2) $x^3+y^3=19$: $x \ge 0$, $y \ge 0$: $x^2(x+y)+y^2(x+y) = (x^2+y^2)(x+y)$

$\frac{|y|}{y} - \frac{|x|}{x} + 2$

~~$x^3+y^3+x^2y+xy^2=(x+y)^3$~~ x^2+xy+1

$\cancel{x^3+y^3}$

$\frac{|y|}{y} - \frac{|x|}{x} + 2 = 0$

~~$=(x+y)(x^2+xy+y^2)$~~

$(x^2+y^2)(x+y) - 19 = 0$

$(x+y)^3 = (x^2+2xy+y^2)(x+y) = x^3+2x^2y+\cancel{xy^2}+y^2x+yx^2+2xy^2+y^3 =$

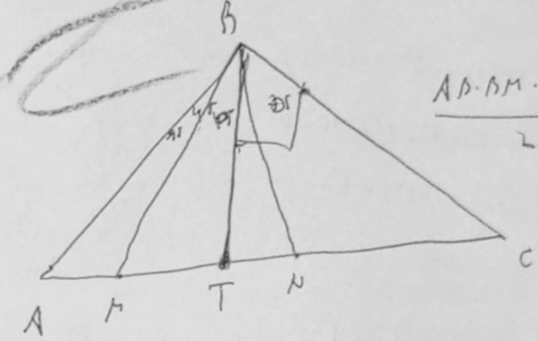
$= x^3+y^3+3x^2y+3xy^2$

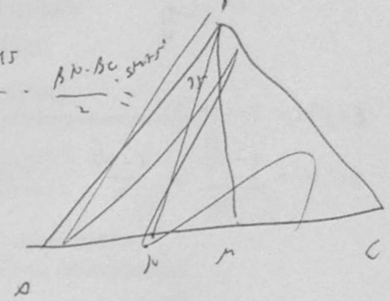
15 стр.

$(a+b)(a^2-ab+b^2) =$

$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$

2 стр.: !!!





$\frac{AB \cdot BM \cdot \sin 75}{2} \cdot \frac{BN \cdot BC \cdot \sin 75}{2} =$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h \cdot AM}{2} + \frac{h \cdot NC}{2} = 5 \\ \frac{h \cdot AM}{2} \cdot \frac{h \cdot NC}{2} = 3 \end{array} \right.$ $= \frac{AB \cdot BC \cdot \sin 75}{2} \cdot \frac{BM \cdot BN \cdot \sin 75}{2}$

$AB \cdot BM = x$

$BN \cdot AC = y$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AB \cdot BM \cdot \sin 75}{2} + \frac{BN \cdot BC \cdot \sin 75}{2} = 5 \\ \frac{AB \cdot BM \cdot BN \cdot BC \cdot \sin 75 \cdot \sin 75}{4} = 3 \end{array} \right.$ $\rightarrow AB \cdot BC - !$

$25 + 22 \cdot 1 = 225 + 48$

$= 73$

$\left\{ \begin{array}{l} AB \cdot BM \cdot \sin 75° + BN \cdot BC \cdot \cos 75° = 10 \\ AB \cdot BM \cdot BN \cdot BC \cdot \sin 30° = \cancel{24}\ 48 \end{array} \right.$

$\sin 75°$:

$a \cdot \sin 75 + b \cos 75 = 10$

$ab = 48$

$\cos 30° = 1 - 2\sin^2$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2x^2$

$x = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$AB \cdot BM = a$ 16 стр.

$BD \cdot BC = b$

$$\begin{cases} \frac{a \cdot \sin 75^\circ}{2} + \frac{b \sin 75^\circ}{2} = 5 \\ \frac{ab \cdot \sin 75^\circ \cdot \sin 75^\circ}{4} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{a+b} \; a \sin 75^\circ + b \cos 15^\circ = 10 \\ ab = \cancel{12} \cancel{24} \; 48 \end{cases}$$

$$a^2 \sin^2 75^\circ + b^2 \cos^2 15^\circ + \cancel{96}^{24} \cdot \frac{1}{1} = 100$$

$$a^2 \sin^2 15 + b^2 (1 - \sin^2 15) = 100$$

$\cos 30 = 1 - 2\sin^2 15^\circ$

$$a^2 \sin^2 15 + b^2 - b^2 \sin^2 15 = 100$$

$\sin^2 15^\circ = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

$$\sin^2 15 (a^2 - b^2) + b^2 = 100$$

$$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ca - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c} =$$

$$= \frac{\cancel{2}bc2}{abc} \quad 2bc2 \le$$

$$y_1 = 8 - \frac{x_1^2}{8}$$

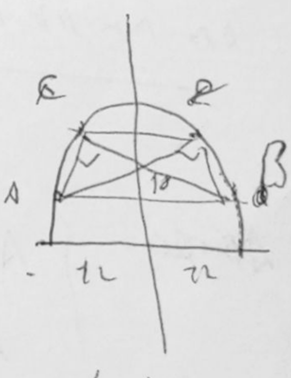
$$y_2 = 8 - \frac{x_2^2}{8}$$

$$2bc + 2a^2 + 2a + 2ca - 2b^2 + 2b + 2ab - 2c^2 + 2c >$$

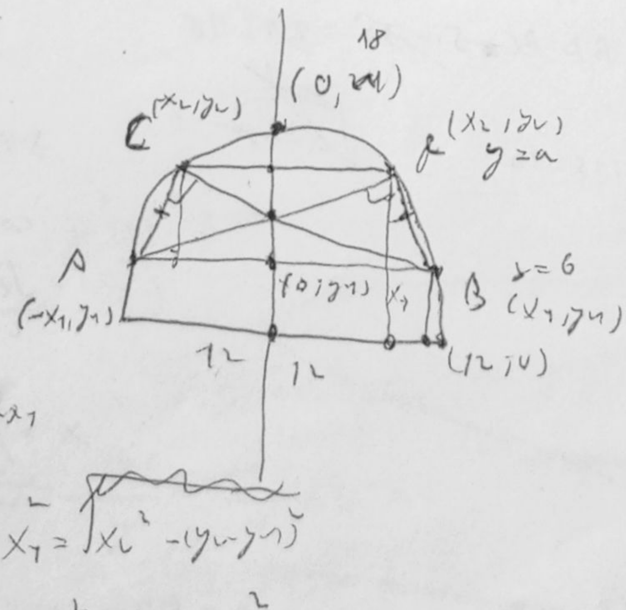
$$= -(a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ac - 2ab) - \cancel{c^2}$$

$x_1 - x_2 - 1$

$$\cancel{(a-b+c)^2}$$



$$\frac{2x_1 - 2x_2}{2}$$



$y = a - bx^2$

$18 = a$

$0 = 18 - 144A$

$b = \frac{18}{144} = \frac{1}{8}$

$y_2 - y_1 = x_2 - x_1$

$$x_1^2 = x_2^2 - (y_2 - y_1)^2$$

$$(y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2$$

$$y = 8 - \frac{x^2}{8}$$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!