

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 1

Место проведения Москва  
город

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

Олимпиада школьников Ломоносов  
наименование олимпиады

ПО математике  
профиль олимпиады

Сергеева Максима Дмитриевича  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата  
«25» февраля 2024 года

Подпись участника  
Сергеев

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\Sigma$
4	8	4	12	12	12	8	0	60



64-21-26-46  
(40.11)

Черновик

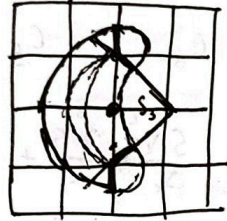
$$\begin{array}{r}
 3 \cdot 5 \cdot 6 \\
 + \\
 3 \cdot 3 \cdot 6 \\
 + \\
 3 \cdot 3 \cdot 2 \\
 + \\
 3 \cdot 5 \cdot 3
 \end{array}$$

$$3(5 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5) = 3(30 + 24 + 15) = 3 \cdot 69 = 207$$

$$\begin{array}{r}
 72 \overline{) 9} \\
 8
 \end{array}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{y-x+9} &= y-4 \\
 y-x+9 &= y^2-8y+16 \\
 y^2-8y+16-18 &= \\
 &= y^2-8y-2
 \end{aligned}$$



$$S_1 = S_1$$

$$S_2 = S_1 - S_3$$

$$S_2 = S_4 - S_6$$

$$\begin{aligned}
 S_1 + S_{12} + S_{02} &= \frac{8 \pm \sqrt{72}}{2} \\
 &= \frac{8 - 6\sqrt{2} + 8 - 6\sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{16 - 12\sqrt{2}}{2} = 8 - 6\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$64 + 8 = 72$$

$$r^2 \quad y^2 - 8y + 16 - 9 =$$

$$\begin{aligned}
 &= y^2 - 8y + 7 \\
 &= (y-7)(y-1)
 \end{aligned}$$

$$135 \cdot 0,5^2 \cdot 27 = \frac{135}{360} \cdot 0,5^2 \cdot 27$$

$$\begin{array}{r}
 135 \overline{) 5} \\
 27 \overline{) 3}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 2 \cdot \frac{135}{360} \cdot 0,25 \cdot 27 &= \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{135}{360} = \frac{135}{720} = \frac{3}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5 \cdot 3^3}{144} = \\
 &= \frac{3}{16}
 \end{aligned}$$

$$y - x \geq -9$$

$$x \leq y + 9$$

$$y \geq 4$$

$$-x \geq -9 - y$$

$$\begin{aligned}
 y - 3 + 3x &= (x-1)(y+3) \\
 (x-1)(y+3)(y-4)^2 &= (x-4)(x-1)(y+3)
 \end{aligned}$$

$$(x-1)(y+3) | y-x-9 | = (x-4) | x-1 | | y+3 |$$

x-1    x-4 - одного знака

$$x \in [4; \infty) \quad x \in (-\infty; 1]$$

$$\frac{(x-1)(y+3)}{|x-1||y+3|}$$

$$|y-x-9| = (x-4)$$

$$\sqrt{t+(x-13)} = t \quad x > 4$$

$$x < 1$$

$$-|y-x-9| = x-4$$

$$|y-x-9| = 4-x$$

$$28$$

$$81 - 4 \cdot 7 - 4x \geq 0$$

$$53 - 4x \geq 0$$

$$x = 1 \quad x$$

$$\sqrt{y-8} = y-4$$

$$y-8 = y^2-8y+16$$

$$0 = y^2-9y+24$$

$$D = 81 - 96$$

$$\begin{aligned}
 y-x+9 &= y^2-8y+16 \\
 y^2-9y+(7+x) &
 \end{aligned}$$

№1 выбрано 0 универсалов ~~3~~  $3 \cdot C_5^2 \cdot C_6^3$

выбрано 1 универсал: защитник  $3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot C_6^3$  нападающий  $3 \cdot C_5^2 \cdot C_6^2$

выбрано 2 универсала: 2 защ.  $3 \cdot C_6^3$  2 нап.  $3 \cdot C_5^2 \cdot C_6^1$  2 защ + 1 нап.  $3 \cdot C_5^1 \cdot C_6^2$

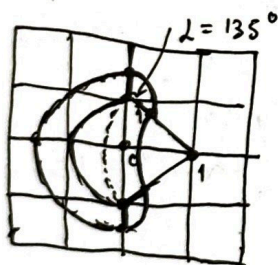
выбрано 3 универсала: 2 защ + 1 нап  $3 \cdot C_6^2$  1 защ + 2 нап  $3 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1$  3 нап.  $3 \cdot C_5^2$

Итого:  $3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} + 3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} + 3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} +$   
 $+ 3 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} + \cancel{3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6} + 3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} +$   
 $+ 3 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} + 3 \cdot 5 \cdot 6 + 3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 3(10 \cdot 20 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 15 + 20 +$   
 $+ 10 \cdot 6 + 5 \cdot 15 + 15 + 30 + 5) = 3(200 + 100 + 150 + 20 + 60 + 75 + 50) =$

$= 3 \cdot 655 = 1965$

Ответ: 1965

№2



$S_H = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} - \frac{\pi \cdot \sqrt{2}^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 =$   
 $= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 = 1$

$S_{\text{добавилось}} = \frac{\pi \cdot \sqrt{2}^2}{4} - \frac{\pi \cdot (\sqrt{2} - \frac{1}{2})^2}{4} +$   
 $+ \frac{\pi \cdot (\frac{3}{2})^2}{2} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} + 2 \cdot \frac{135}{360} \cdot \frac{0,5^2}{\cancel{\pi}} \cdot \pi =$   
 2 линии окружности

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot (2 + \frac{1}{4} - \sqrt{2})}{4} + \frac{\pi \cdot 9}{8} - \frac{\pi}{2} + \frac{270}{4360} \cdot \frac{1}{4} \pi =$

$= \pi (\frac{1}{2} - \frac{9}{16} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{9}{8} - \frac{1}{2} + \frac{3}{16}) = \pi (\frac{1}{16} + \frac{4\sqrt{2}}{16} + \frac{18}{16}) =$

$= \pi (\frac{9}{16} + \frac{3}{16} + \frac{4\sqrt{2}}{16}) = \pi (\frac{12 + 4\sqrt{2}}{16}) = \pi (\frac{3}{4} + \sqrt{2})$

итоговая площадь  $\rightarrow S_K = 1 + \pi (\frac{3}{4} + \sqrt{2})$

Ответ:  $1 + \pi (\frac{3}{4} + \sqrt{2})$



64-21-26-46  
(40.11)

$$\sqrt{xy-3+3x-y} |y-x-9| = (x-4) |xy-3+3x-y|$$

Ограничение:

$$y \geq 4$$

$y+3$  всегда положительна

$$\sqrt{y-x+9} = y-4$$

$$(x-1) |y-4|^2 - 18 = (x-4) |x-1|$$

$$(y-4)^2 - 18 = y^2 - 8y - 2$$

$$D = 64 + 8 = 72$$

$$y_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{72}}{2} = 4 \pm 3\sqrt{2}$$

$$(x-1) |y-(4+3\sqrt{2})| |y-(4-3\sqrt{2})| = (x-4) |x-1|$$

$$\sqrt{y-x+9} = y-4$$

$x-1$  и  $x-4$  одного знака  $\Rightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$

при  $x=1$

$$\sqrt{y+8} = y-4$$

$$y+8 = y^2 - 8y + 16$$

$$y^2 - 9y + 8 = 0$$

$$(y-8)(y-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y=8 \\ y=1 \end{cases} \quad y \geq 4$$

корень:  
 $\begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$

при  $x=4$

$$(y-4)^2 - 18 = 0$$

$$(y-4)^2 = 18$$

$$y = 4 \pm \sqrt{18}$$

$$y \geq 4 \Rightarrow y = 4 + \sqrt{18}$$

$$\sqrt{4+\sqrt{18}-4+9} = \sqrt{18}$$

↑  
неправда

$$\sqrt{y-x+9} = y-4$$

$$y-x+9 = y^2 - 8y + 16$$

$$y^2 - 9y + 7 + x = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 7 - 4 \cdot x = 53 - 4x$$

$$D \geq 0$$

$$\frac{53}{4} \geq x$$

$$y = \frac{9 + \sqrt{53-4x}}{2}$$

$$y = \frac{9 + \sqrt{D}}{2} \geq 4 \Rightarrow \text{при } \frac{53}{4} \geq x \text{ корни есть}$$

Ответ:  
 $\begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$

при  $x < 1$

$$-|y-x-9| = x-4$$

$$\Rightarrow \text{нет решений}$$

$$\sqrt{y-x+9} = y-4$$

$$-\left| \frac{9 + \sqrt{53-4x}}{2} - x - 9 \right| = x - 4$$

нет решений при  $x < 1$

при  $x > 4$

$$|y-x-9| = x-4$$

$$\left| \frac{9 + \sqrt{53-4x}}{2} - x - 9 \right| = x - 4$$

нет решений при  $x > 4$



$\sqrt{9} \Rightarrow \frac{AB}{2} = 15 \text{ км}$

$\Rightarrow \frac{BC}{2} = 25 \text{ км}$

$\Rightarrow \frac{AC}{2} = \Rightarrow \frac{AB+BC}{2} = 40 \text{ км}$

Ехал 85 минут

AB = 7 мин

BC = 11 мин

AC = 17 мин.

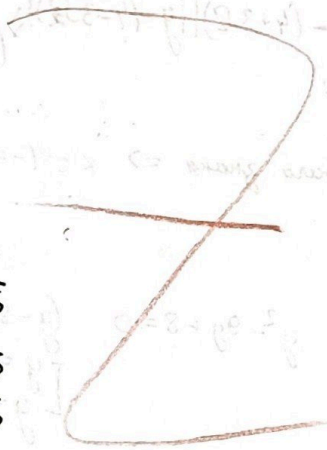
~~Вариант 85-90~~

85 : 17

Передор

17  
34  
51  
68  
85

случай	на-ч	11	7	17	
I	4	1	2	85	
II	3	5	1	85	
III	3	9	0	85	



7	11	1	2	3	4	5	6	7
7	1	18	29	40	51	62	73	84
14	2	23	36	47	58	69	80	
21	3	32	43	54	65	76		
28	4	39	50	61	72	83		
35	5	46	57	68	79			
42	6	53	64	75				
49	7	60	71	82				
56	8	67	78					
63	9	74	85					
70	10	81						
77	11							
84	12							

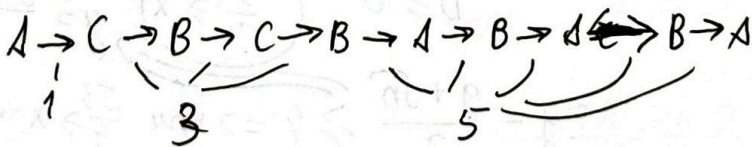
случай когда он проехал 3 раза по BC и 9 раз по AB невозможно

II случай невозможен, т.к. по AB катались нечётное число раз и ни разу не катались по AC

I случай невозможен, т.к. по BC прокатились один раз, а значит от точки B в точке C, но у точки C в данном случае будет нечётная степень

т.е. случаи I и III невозможны, т.к. оба в одной из вершин ~~будет~~ степень нечётная

II случай возможен пример:



Проехал:  $3 \cdot 25 + 1 \cdot 40 + 5 \cdot 15 = 75 + 40 + 75 = 190 \text{ км}$

Ответ: 190 км

64-21-26-46  
(40.15)

Черновик:

$$7. k + 11 \cdot m \stackrel{17}{=} 0$$

$$17 \cdot 5 = 85$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	0
7	7	4	11	1	8	15	5	12	2	9	16	6	13	3	10	0

" "

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{x-1} = \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{2} \left( \frac{x+1}{x-1} + 1 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{x+1}{x-1} - 1 \right)$$

$$\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{2}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (x-1) = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} (x-1) - 1 \right)$$

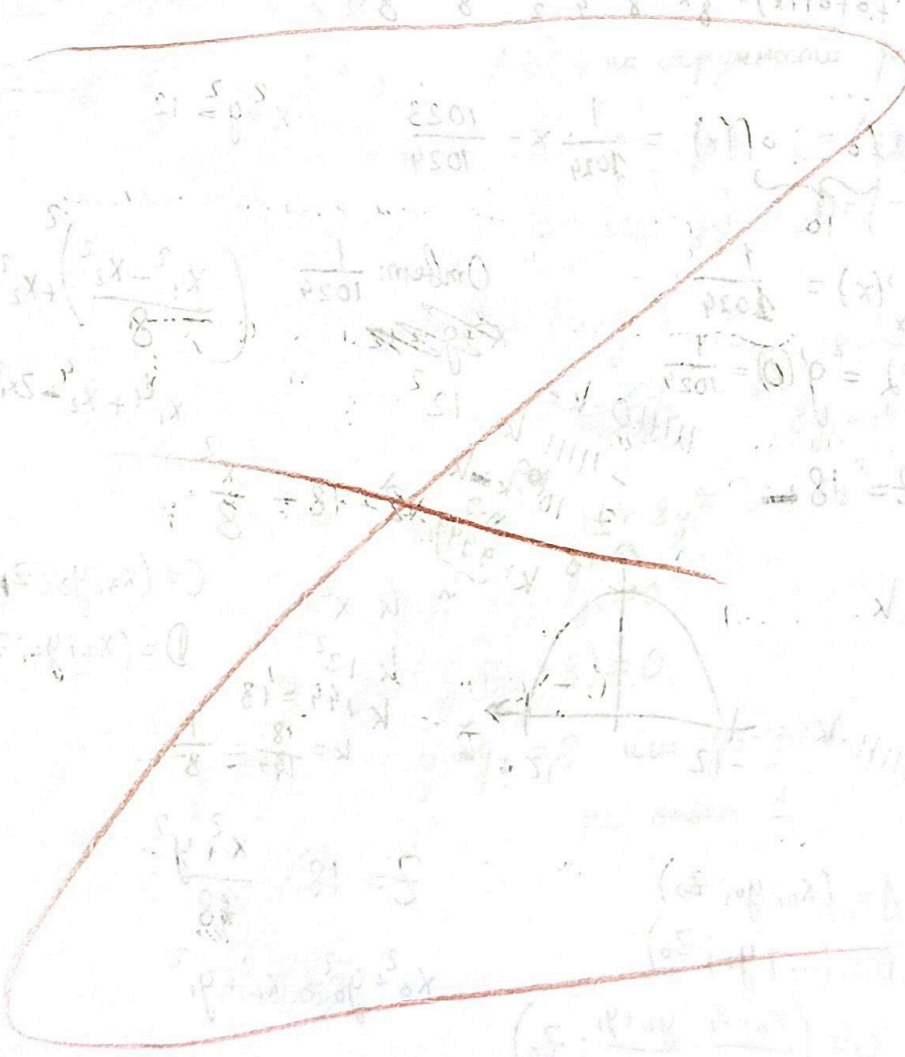
$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \cdot (-1) - 1 \right)$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$$

$$-\frac{7}{8} \quad -\frac{15}{16}$$

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$









N6 при  $x=0$   $y \in \mathbb{R}$   $z=18$   
 $xy$  - плоскость поля

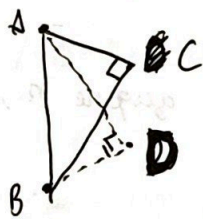
ширина 24  $\Rightarrow$  радиус 12

Иштейвх

при  $y=0$   $z=18-kx^2$  при  $x=12$   $z=18-k \cdot 144$   
 $k = \frac{1}{8}$

при  $k=0$  то все сечение  
 $\Rightarrow$  упр. параболы  $z = 18 - \frac{x^2+y^2}{8}$

$AB \parallel xy$  и  $CD \parallel xy$



$ABCD$

$AD$  и  $BC$  пересекаются

$\Rightarrow ABCD$  в одной плоскости

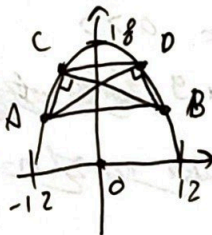
если эта плоскость не параллельна полю,

то  $AB \parallel CD$

$\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow ABCD$  лежит на окружности  
 радиусом  $\frac{AB}{2}$

если задача в 2D

$y = 18 - \frac{x^2}{8}$



$ABCD$  на окружности радиуса  $\frac{AB}{2}$

$A = (x_1; y_1)$   $C = (x_2; y_2)$

$B = (-x_1; y_1)$   $D = (-x_2; y_2)$

$O = (0; y_1)$

$y_1 = 18 - \frac{x_1^2}{8}$

$x_2^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_1^2$

$8y_1 - 144 = -x_1^2$

$x_2^2 = 144 - 8y_2$

$144 - 8y_2 + y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2 = 144 - 8y_1$

$y \leq 18$

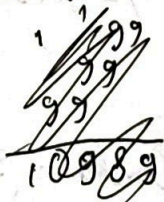
$y_2^2 + y_1^2 - 2y_2y_1 - 8y_2 + 8y_1 = 0$

$(y_1 - y_2)(y_1 + y_2 + 8) = 0$

$y_1 \neq y_2$

$y_1 + y_2 = 8$  или  $y_2 - y_1 = 8$

но ответ 1



Ответ: 8

н 7. если  $n > 10^{99}$

можно взять  $m = 10^{99} + 1$ , тогда все цифры кроме первого закрываются

если  $100$ -е ~~с~~ скачка <sup>цифры числа</sup>  $mn$  не перескочет разряд, то условие не выполнено, т.к. сумма цифр заранее больше  $S(mn) > S(n)$   
в том случае

~~$\Rightarrow S(n+1) =$~~  цифры в числе  $n$

~~$a_1$  - первая цифра~~  ~~$a_{100} + a_1 \geq 10$~~  и ~~цифры между ними~~

первая цифра  $mn$  будет равна первой цифре  $n$ , значит она должна увеличиться

~~$a_1$  - первая цифра  $n$~~   $\Rightarrow a_1 + 1 \geq 10 \Rightarrow a_1 = 9$

~~$a_2$  - вторая и т.д.~~  $a_2 + 1 \geq 10 \Rightarrow a_2 = 9$

и т.д.

~~$a_1 + a_{100} \geq 10$~~ , т.к.  $a_1 \geq 10$

$\Rightarrow$  все цифры должны быть равны 9, ~~это верно~~

~~но мы это уже умножили на  $2$  ( $m=2$ )  $S(mn) \leq S(n)$~~

и пусть  $n = \underbrace{999\dots9}_{100}$   $S(n) = 900$

$$n \cdot m = 9 \cdot \underbrace{11\dots1}_{100} \cdot m = \underbrace{111\dots1}_{100} \cdot m \cdot 9 - \underbrace{111\dots1}_{100} \cdot m =$$

$$= m(10^{100} - 1) = \frac{(m-1) \cdot \underbrace{999\dots9}_{100}}{100} - m + 1 =$$

$$= \underbrace{999\dots9}_{100} + (m-1) \cdot 10^{100} - (m-1)$$

$$\Rightarrow S(mn) = 9 \cdot 100 + (m-1) - S(m-1) = 9 \cdot 100$$

$\Rightarrow \underbrace{999\dots9}_{100}$  подходит

она наибольшая среди  $100$ -значных, т.к.  $9$  - наибольшая цифра

Ответ:  $\underbrace{999\dots9}_{100}$



$$\begin{matrix} \sqrt{8} & (3; 4; 5) & & (0; 0; 0) \\ & (11; 10; 6) & \rightarrow & (8; 6; 1) = a \\ & (5; 8; 9) & & (2; 4; 4) = b \end{matrix} \quad \text{нужно } \begin{matrix} \cancel{10-x} \\ \cancel{10-y} \\ \cancel{10-z} \end{matrix} \quad (x; y; z)$$

$\lambda \in \text{тр. см}$

$$\begin{aligned} & (-x; -y; -z) + (8-x; 6-y; 1-z) + \\ & + (2-x; 4-y; 4-z) = \cancel{(10-x; 10-y; 10-z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ka + tb; \\ & \text{где } k, t \in \mathbb{R} \\ & k, t > 0 \end{aligned}$$

$$(10-3x; 10-3y; 5-3z) = ka + tb$$

$$x; y; z \in \mathbb{N} \Rightarrow ka + tb \in \mathbb{N}$$

~~и~~ ~~значит~~

перебор

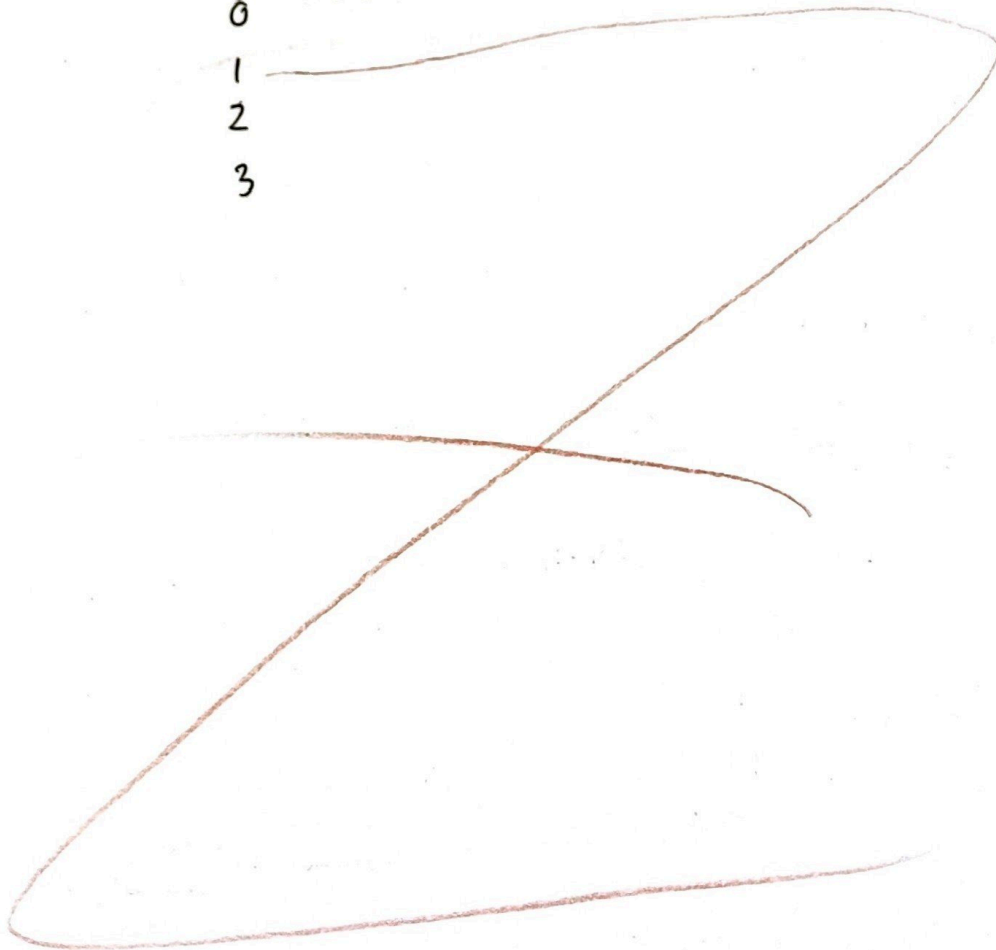
$$k \in \{0; 1; 2; 3\} \quad y \in \{0; 1; 2; 3\} \quad z \in \{0; 1\}$$

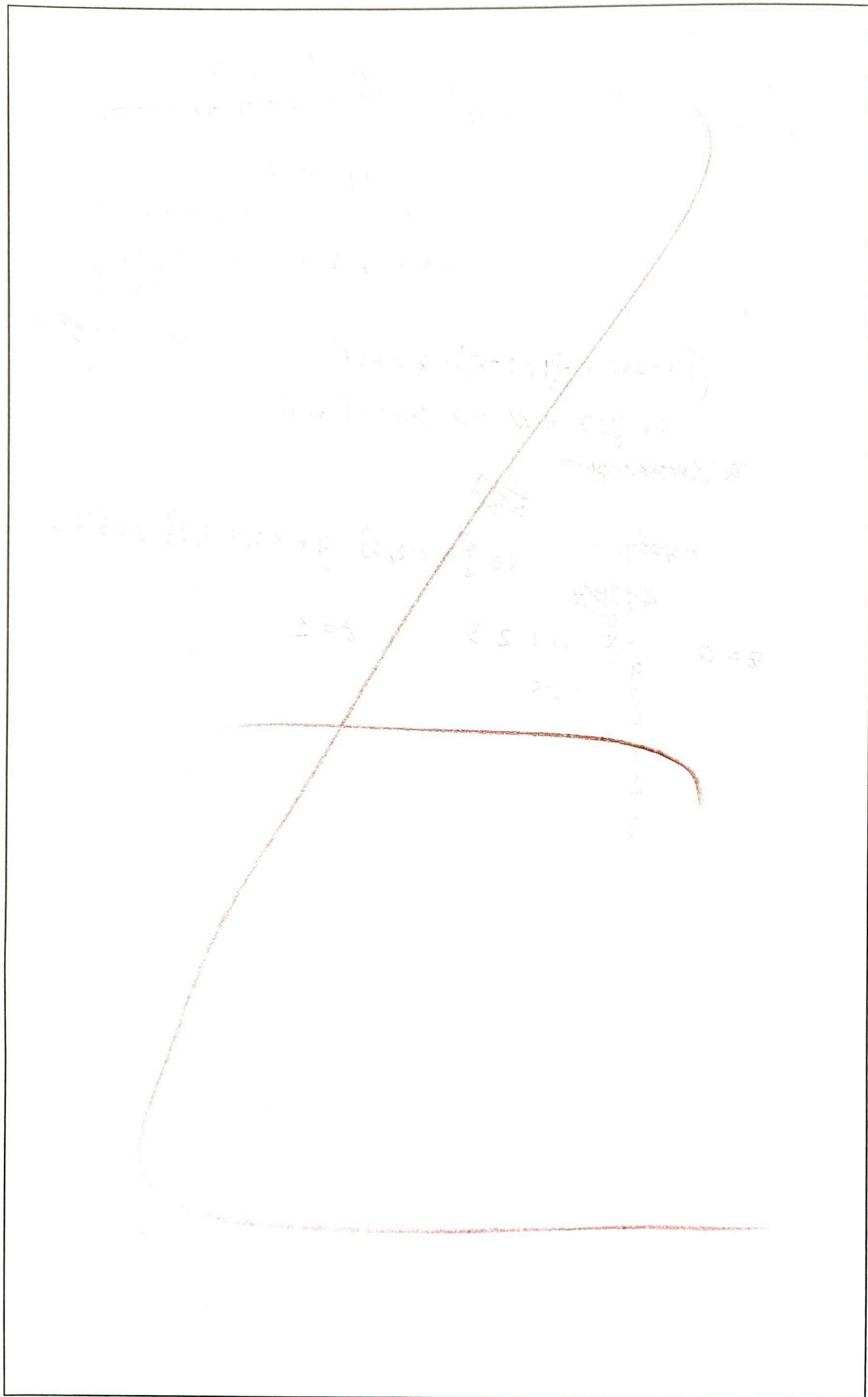
$z = 0$

~~и~~ ~~значит~~

	x	0	1	2	3
y					
0					
1					
2					
3					

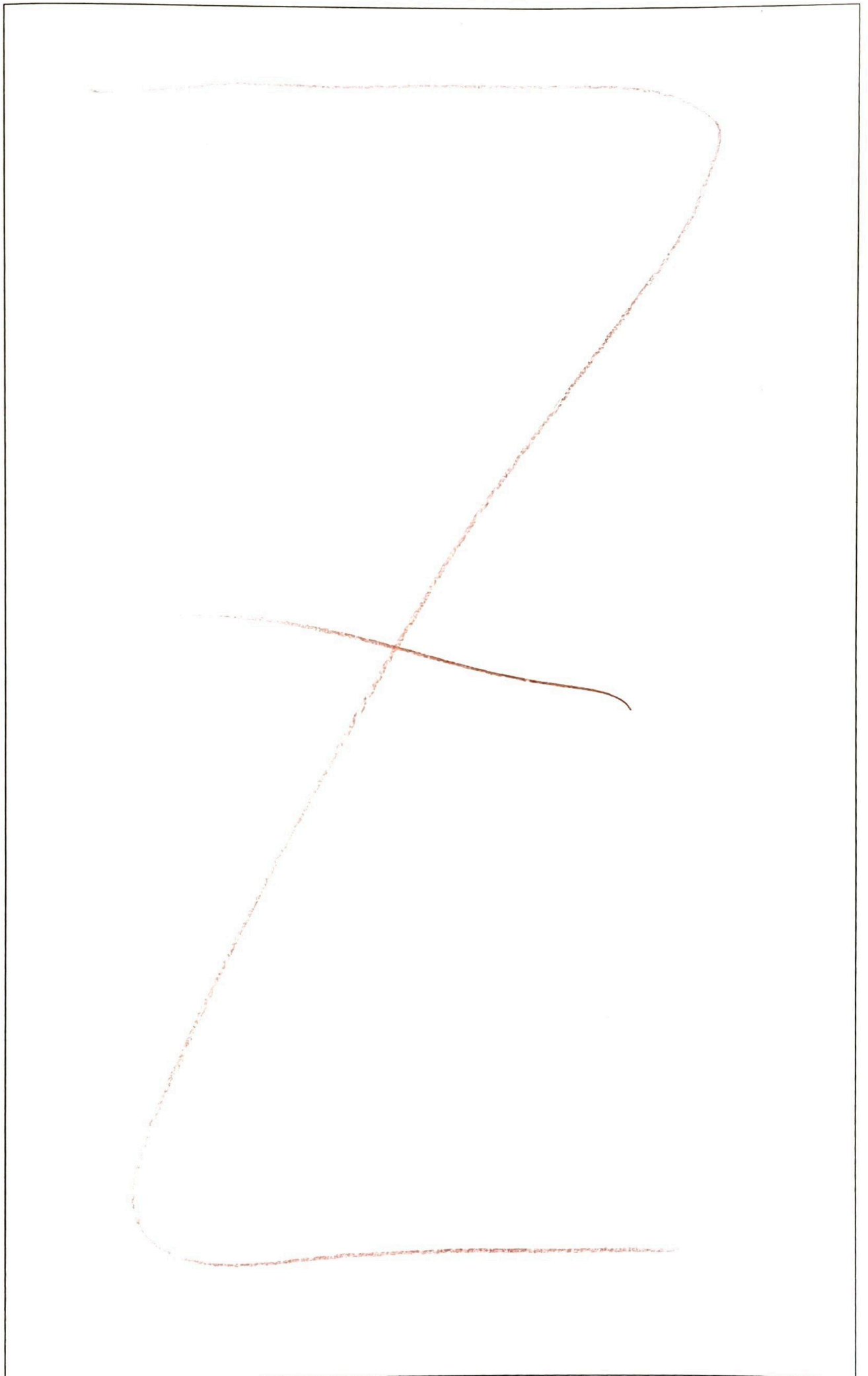
$z = 1$





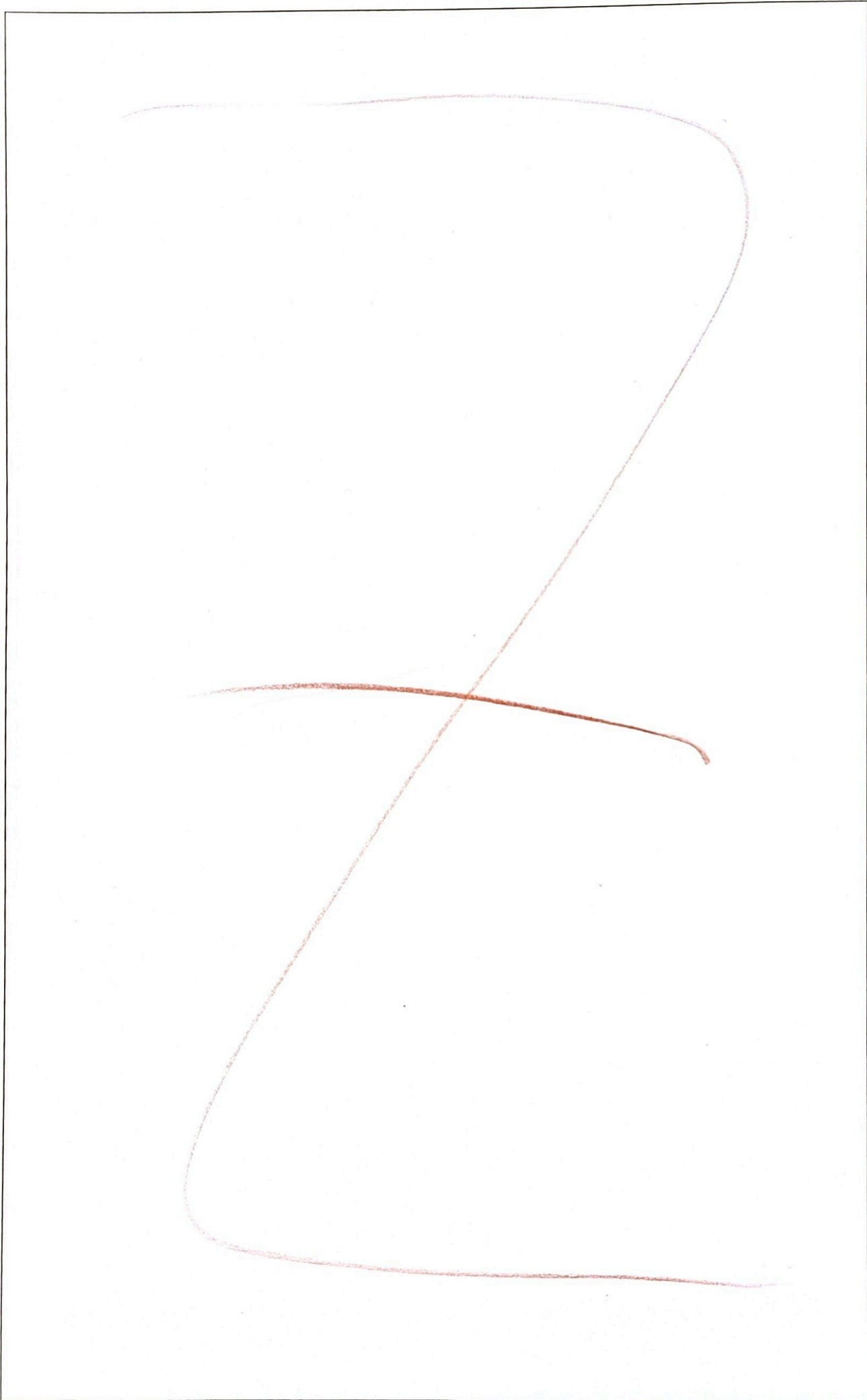


ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!