

0 097334 800000

09-73-34-80  
(43.3)



время выезда 14:19  
время возвращения 14:22  
И. П. В.

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 5

Место проведения Санкт-Петербург  
город

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

Олимпиада школьников Ломоносов  
наименование олимпиады

по математике  
профиль олимпиады

Скаменко Юлии Павловны  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

09-73-34-80

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\Sigma$	Подпись	Расшифровка подписи
12	0	4	12	12	12	12	0	64		Кулешов И.А.
										Борисов В.В.



Числовые

№3

$$\begin{cases} (xy + 4x - y - 4) | y - x - 8 | = (x - 4) | xy + 4x - y - 4 | \\ \sqrt{y - x + 10} = y - 3 \end{cases}$$

1)  $xy + 4x - y - 4 > 0$

$|y - x - 8| = x - 4$  ( $x \geq 4$ )

$|y - 12 - (x - 4)| = x - 4$

вспомогательное уравнение

$|a - b| = b$

$$\begin{cases} y - 12 = 0 \\ y - 12 = 2x - 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = 2b \end{cases}$$

•  $y = 12$

$\sqrt{12 - x + 10} = 9$

$22 - x = 81$

$x = -59$  не подходит ( $x \geq 4$ )

~~118 = 2x + 4~~

•  $y = 2x + 4$

$\sqrt{2x + 4 - x + 10} = 2x + 4 - 3$

$\sqrt{x + 14} = 2x + 1$

$x + 14 = 4x^2 + 4x + 1$

$4x^2 + 3x - 13 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16 \cdot 13}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8}$

$\frac{-3 - \sqrt{217}}{8} < 4$  не подходит

$\frac{-3 + \sqrt{217}}{8} < (?) 4$

$\sqrt{217} < 35$  не подходит

2)  $xy + 4x - y - 4 < 0$

$|y - x - 8| = 4 - x$

$|y - 12 + (4 - x)| = 4 - x$

вспомогательное уравнение

$|a + b| = b$

$a = 0$

$a = -2b$

$\Rightarrow \begin{cases} y - 12 = 0 \\ y - 12 = -8 + 2x \end{cases}$

$\begin{cases} y = 12 \text{ ①} \\ y = 2x + 4 \text{ ②} \end{cases}$

ответы те же

①  $y = 12 \quad x = -59$

проверка, что  $xy + 4x - y - 4 < 0$

$-59 \cdot 12 - 59 \cdot 4 - 12 - 4 < 0 \quad \checkmark$  подходит

②  $x = \frac{-3 - \sqrt{217}}{8}$

$y = \frac{-3 - \sqrt{217}}{4} + 4$

$x = \frac{-3 + \sqrt{217}}{8}$

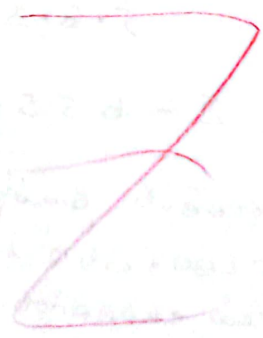
$y = \frac{-3 + \sqrt{217}}{4} + 4$

надо проверить, что

$xy + 4x - y - 4 < 0$

$y(x - 1) < 4 - 4x$

~~118 = 2x + 4~~



13 (продолжение)

Шетовкин

при  $x = \frac{-3 - \sqrt{217}}{8}$   $x < 1$

$y > \frac{4-4x}{x-1}$   $y > -4$

$-\frac{3 - \sqrt{217}}{4} + 4 > -4$

$-3 - \sqrt{217} > -32$

$-\sqrt{217} > -29$

$\sqrt{217} < 29$  правда?  
подходит

$x = \frac{-3 + \sqrt{217}}{8}$   $x > 1$

$y < \frac{4-4x}{x-1}$   $y < -4$

$-\frac{3 + \sqrt{217}}{4} + 4 < -4$

$-3 + \sqrt{217} < -32$

$\sqrt{217} < -29$  не правда  
нам не подходит

б)  $xy + 4x - y - 4 = 0$

$y(x-1) = 4 - 4x$

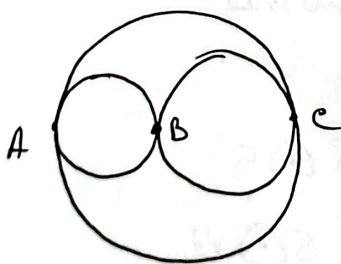
$y = \frac{4-4x}{x-1} = -4$

$\sqrt{-4-x+10} = -7$  не может быть

Ответ:  $y = 12$   $x = -59$

$y = \frac{-3 - \sqrt{217}}{4} + 4$   $x = \frac{-3 - \sqrt{217}}{8}$

14



пусть автомобиль а проедет  
AB; b раз - BC и c раз - AC  
тогда общее время будет -

$5a + 13b + 19c = 95$

$5a + 13b + 19c = 5 \cdot 19$

$5a + 13b + 19c : 5$  и  $5a + 13b + 19c : 19$

$13b + 19c : 5$  и  $5a + 13b : 19$  №4 Числовик

рассмотрим в каком отношении необходимо брать  $b$  и  $c$  и  $a$  и  $b$ , чтобы суммы делились на  $5$  и  $19$  соответственно

\* заметим, что не может быть то  $a=19, b=0, c=0$  или  $a=0, b=0, c=19$ , т.к. тогда автомобиль не вернется в (а) А

$13b + 19c$	$5a + 13b$
$b : c$	$1 : 4$
$2 : 1$ ( $2 \cdot 13 + 19 = 45 : 5$ )	$5 : 1$
$1 : 3$ ( $13 + 3 \cdot 19 = 70 : 5$ )	
	$(5 + 4 \cdot 13 = 57 = 3 \cdot 19)$
	$25 + 13 = 38 = 2 \cdot 19$

1) рассмотрим вариант

$a : b : c = 1 : 4 : 2$       $5 \cdot 1 + 13 \cdot 4 + 2 \cdot 19 = 95$

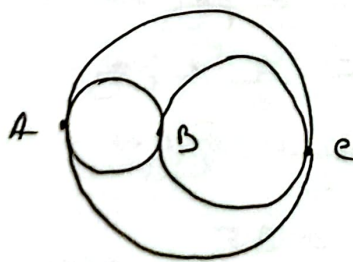
( $1 : 4 : 12$  не подходит т.к. сумма будет  $> 95$ )

~~заметим что тогда автомобиль 1 раз проедет по АВ и 2 раза по АС  $\Rightarrow$  он делает полный круг по АС  $\Rightarrow$  если он вернулся в А и в С~~

заметим что с такими же значениями необходимо вернуться в А, т.к. по ВС делаем 2 круга, по АС круг, а по АВ - по кругу  $\Rightarrow$  оканчиваемся не в А

2)  $a : b : c = 5 : 1 : 3$       $5 \cdot 5 + 13 + 3 \cdot 19 = 95$

этот вариант подходит



1) сначала 5 раз по АВ

$\uparrow$   
в (.) А

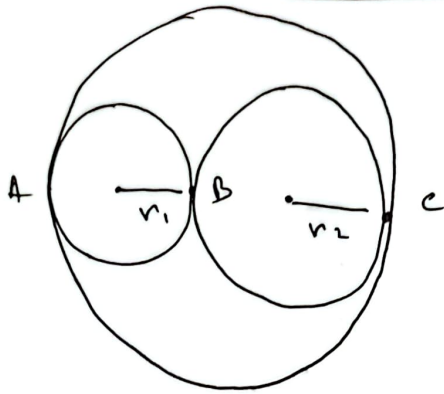
2) 1 раз по ВС  $\Rightarrow$  в (.) С

3) 3 раза по АС  $\Rightarrow$  в (.) А

тогда длина дороги -  $5 \cdot 13 + 27 + 3 \cdot 19$

Числовики

N4



$$\overline{AB} = 4r_1$$

$$\overline{BC} = 4r_2$$

$$\overline{AC} = \overline{r} \left( \frac{D_1 + D_2}{2} \right) =$$

$$= 4r_1 + 4r_2 = \overline{AB} + \overline{BC} =$$

$$= 13 + 27 = 40$$

длина дуги -  $5 \cdot 13 + 27 + 3 \cdot 40 = 192$  км

Ответ: 192 км

N5

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = t$$

$$x+1 = tx - t$$

$$t+1 = tx - x = x(t-1)$$

$$x = \frac{t+1}{t-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{\frac{t+1}{t-1} - 1} \quad (2)$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{1}{\frac{t+1-t+1}{t-1}} = \frac{1}{\frac{2}{t-1}} = \frac{t-1}{2} \Rightarrow f(t) = \frac{t-1}{2}$$

$$f(f(t)) = \frac{\frac{t-1}{2} - 1}{2} = \frac{t-3}{4}$$

$$f(f(f(t))) = \frac{\frac{t-3}{4} - 1}{2} = \frac{t-7}{8}$$

$$f(f(f(f(t)))) = \frac{\frac{t-7}{8} - 1}{2} = \frac{t-15}{16}$$

$$f(\underbrace{f(\dots(f(t)))}_n) = \frac{t - (2^n - 1)}{2^n}$$

$$g(x) = \frac{x - 2^{10} + 1}{2^{10}} \quad \text{— линейная функция}$$

тангенс угла наклона = угл. коэффициент =  $\frac{1}{2^{10}}$  (касает себя. е  $g(x)$ )

Ответ:  $2^{-10}$

№6

Числовик

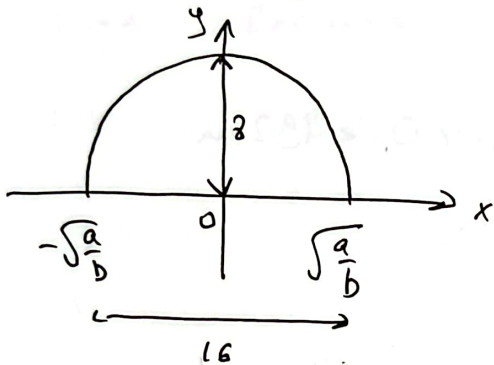
$$y = a - bx^2$$

$$y = 0 \quad a - bx^2 = 0$$

$$a = bx^2$$

$$x^2 = \frac{a}{b} \quad x = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad x = -\sqrt{\frac{a}{b}}$$

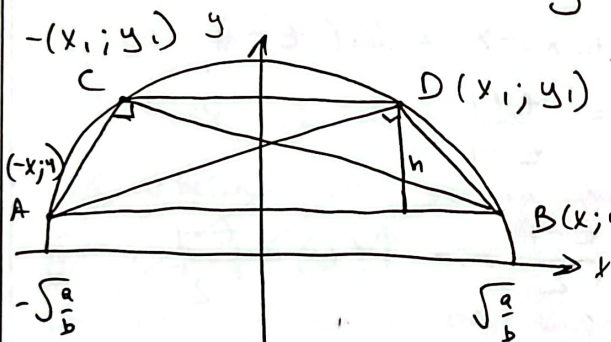
парабола  $y = a - bx^2$  симм. отн. Oy



$$\begin{cases} 2\sqrt{\frac{a}{b}} = 16 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{a}{b}} = 8 & \frac{a}{b} = 64 \\ a = 8 & b = \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$y = 8 - \frac{1}{8}x^2$$



точки B и D симм. отн. Oy  
A и C

$$g(AB; CD) = h$$

$$AB = 2x$$

$$BD^2 = h^2 + (x - x_1)^2$$

$$AD^2 = h^2 + (x + x_1)^2$$

ABD - прямоугол

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$4x^2 = 2h^2 + (x - x_1)^2 + (x + x_1)^2$$

$$4x^2 = 2h^2 + 2x^2 + 2x_1^2$$

$$2x^2 = 2h^2 + 2x_1^2$$

$$h^2 = x^2 - x_1^2$$

$$\frac{1}{64} (x^2 - x_1^2)^2 = x^2 - x_1^2$$

$$\frac{1}{64} h^4 = h^2$$

$$\frac{1}{64} h^2 = 1$$

$$h^2 = 0$$

$$h = 0 \text{ } \rho > 0$$

$$h^2 = 64 \quad h = 8$$

Ответ: 8

(.) с и (D) - совпадают

№7

Числовик

сумма цифр числа - показывает его остаток при делении на 9

если  $S(2n) = S(3n) = S(4n) = S(n)$ , то

при умножении числа на 2, 3, ..., n его остаток от деления на 9 - не меняется  $\Rightarrow$  это число имеет остаток 0 при делении на 9

возьмем число  $xy$   $25 \cdot 9^n$

замечим что при умножении на 2

$$\begin{array}{r} \cdot \\ \times 99 \dots 99 \\ \hline 199 \dots 98 \end{array} \quad S(n) \text{ не меняется}$$

$4 \cdot 9^n \Rightarrow 1 + 8^n$

аналогично при умножении на 3, 4, ... 9 умножение на 12 например это крайнее умножение на 10 + прибавление умноженного на 2 числа; умножение на 10 не меняет  $S(n)$

$$\begin{array}{r} \cdot \\ \times 99 \dots 990 \\ \hline 199 \dots 998 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{крайне 2 девятки разбиваются} \\ \text{на } 1, 4, 8 \end{array}$$

при умн на 13 - 2 девятки на 2 и 7 ч.т. 9  
замечим что тем на большее число мы умножаем тем больше 9 разбиваются при этом сумма цифр не меняется (так можно думать пока 9 не закончатся т.е. пока  $n \leq 9$ )

Ответ:  $\underbrace{99 \dots 99}_{85}$

№2

при записи каждой закрашенной точки на ~~отрезке~~ кругу радиусом 0,25 у месяца появляется так называемый ободок

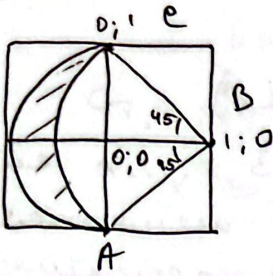


увеличивается на этот ободок



№2

Числовик

находим  $S$  без ободка

$S_1$  - площадь  $\frac{1}{4}$  круга с центром  $O; 0$  и радиусом 1

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1}{4} = \frac{\pi}{4}$$



$S_2$  - площадь  $\frac{1}{4}$  круга с центром  $(1; 0)$  и радиусом  $\sqrt{2}$

$$S_2 = \frac{1}{4} \pi (\sqrt{2})^2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$S \text{ треугольника } ABC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

↑ высота      ← основание

$$S \text{ без ободка} = S_1 - (S_2 - S_{ABC}) =$$

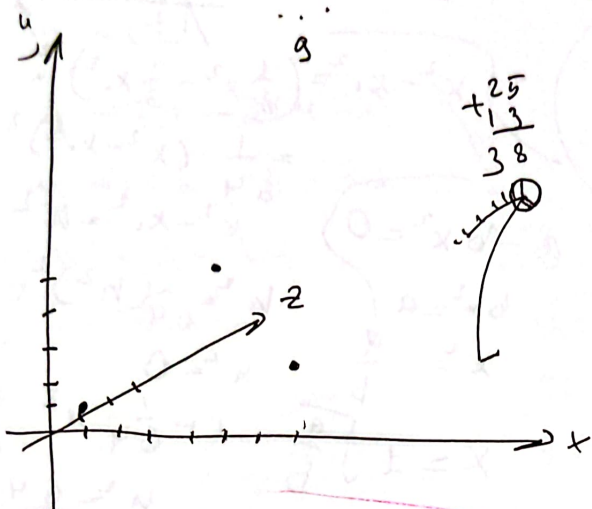
$$= \frac{\pi}{4} - \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) = 1$$

# Черновики

95 минут

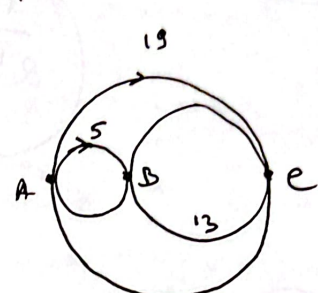
$$S_{2n} = S_{3n} = S_{4n} = S_n^2$$

$$a b e \quad S_n = a + b + e$$



- 9
- 2
- 18
- 56
- 72

- 13
- 26
- 39
- 52
- 65
- 19
- 38
- 57
- 76



$$95 = a \cdot 5 + b \cdot 13 + c \cdot 19$$

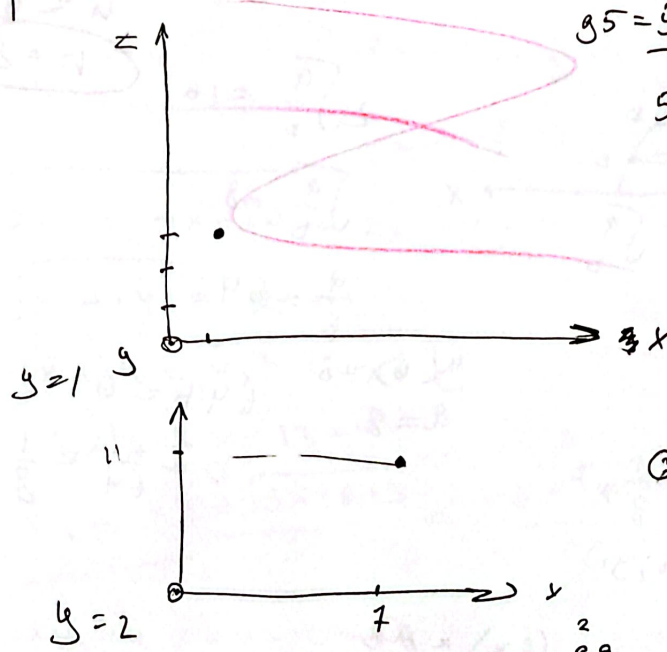
$$95 = 5 \cdot 19$$

$$5a + 13b + 19c$$

$$13b + 19c : 5$$

$$5a + 13b : 19$$

~~13b + 19c = 5k~~  
~~5a + 13b = 19h~~  
~~19c - 5a = 5k~~



$$13b + 19c : 5$$

b	c	
1	1	2
2	1	0
1	3	

$$5a + 13b : 19$$

a	b	e
5	2	4
1	10	2

$$a : b : e = 5 : 1 : 3$$

$$5a + 13b + 19c$$

$$\textcircled{1} + \frac{52}{38} \textcircled{4} \quad \textcircled{2}$$

$$25 + 13 + 57$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ + 13 \\ + 57 \\ \hline 95 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \dots \dots \dots 90 \\ \times \dots \dots \dots 99 \\ \hline \dots \dots \dots 99 \end{array}$$

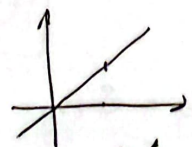
$$\begin{array}{r} 9a = 10a - a \\ \times 99 \dots \dots 99 \\ \hline \dots \dots \dots 99 \end{array}$$

Черновик

- ① 1
- ② 3
- ③ 7
- ④ 15
- 31
- 2 4 8 16 32

10-1

$\frac{1}{2^{10}}$



$y=2x$



$$x^2 - x_1^2 = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x_1^2\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - x_1^2)^2$$

$$64(x^2 - x_1^2) = h^2$$

$$a - bx^2 = 0$$

$$bx^2 = a$$

$$x^2 = \frac{a}{b}$$

$$h^2 = \frac{1}{64}(h^2)^2$$

$$h^2 = 0$$

$$1 = \frac{1}{64}h^2$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$h^2 = 64$   
 $h = 8$

$$2\sqrt{\frac{a}{b}} = 16$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = 8$$

$$\frac{a}{b} = 64$$

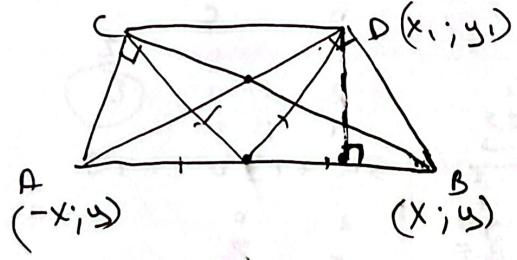
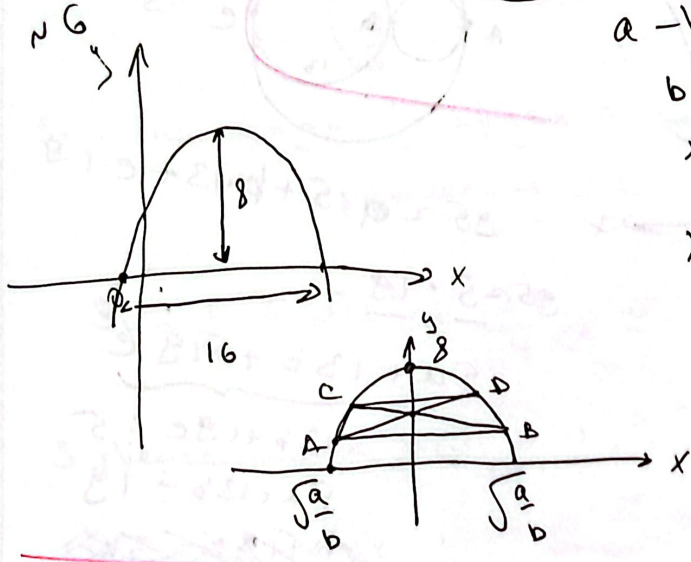
$$y(0) = 8$$

$$a = 8$$

$$64b = a$$

$$b = \frac{a}{64} = \frac{1}{8}$$

$$y = 8 - \frac{1}{8}x^2$$



$$(2x) = AB$$

$$AD^2 = (x + x_1)^2 + h^2$$

$$DB^2 = (x - x_1)^2 + h^2$$

$$4x^2 = (x + x_1)^2 + (x - x_1)^2 + 2h^2$$

$$4x^2 = x^2 + 2xx_1 + x_1^2 + x^2 + x_1^2 - 2xx_1 + 2h^2$$

$$2x^2 = 2x_1^2 + 2h^2$$

~~$$x^2 - x_1^2 = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x_1^2$$~~

$$x^2 = x_1^2 + h^2$$

$$h^2 = x^2 - x_1^2 = (y_1 - y)^2$$

~~$$8 - \frac{1}{8}x^2 = \left(8 - \frac{1}{8}x_1^2\right)^2$$~~

2)  $xy + 4x - y - 4 < 0 \rightarrow y(x-1) < 4 - 4x$

$|y - x - 8| = 4 - x$

$x \leq 4$  Черновик

$|y - 12 + 4 - x| = 4 - x$

$|a+b| = 8$

$y - 12$

$a = 0$

$a = -2b$

$y - 12 = -2(4 - x)$

$\sqrt{y - x + 10} = y - 3$

$y - 12 = -8 + 2x$

$\sqrt{12 - x + 10} = 9 \quad xy + 4x - y - 4 < 0$

$y = 2x + 4$

$\sqrt{22 - x} = 9 \quad y(x-1) < 4 + 4x$

$22 - x = 81$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 45 \\ +21 \\ \hline 72 \\ +120 \end{array}$$

$x = -59$

$xy + 4x - y - 4 =$

$= -59 \cdot 12 - 59 \cdot 4 - 12 - 4 < 0 \quad +$

$\sqrt{2x + 4 - x + 10} = 2x + 4 - 3$

$\sqrt{x + 14} = 2x + 1$

$x + 14 = 4x^2 + 4x + 1$

$4x^2 + 3x - 13 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16 \cdot 13}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8}$

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$

$f\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$

$\frac{x+1}{x-1} = t$

$x+1 = tx - t$

$t+1 = tx - x$

$t+1 = x(t-1)$

$x = \frac{t+1}{t-1}$

3)  $xy + 4x - y - 4 = 0$

$y(x-1) = 4 - 4x$

$y = \frac{4-4x}{x-1} = -4$

$\sqrt{-4 - x + 10} = -7$

1.  $f(t) = \frac{t-1}{2}$

$f(t) = \frac{1}{\frac{t+1}{t-1} - 1} = \frac{1}{\frac{t+1-t+1}{t-1}} = \frac{1}{\frac{2}{t-1}} = \frac{t-1}{2}$

2.  $f(f(t)) = \frac{\frac{t-1}{2} - 1}{2} = \frac{t-3}{4}$

3.  $f(f(f(t))) = \frac{\frac{t-3}{4} - 1}{2} = \frac{t-7}{8}$

4.  $f(f(f(f(t)))) = \frac{\frac{t-7}{8} - 1}{2} = \frac{t-15}{16}$

10.  $\frac{t - 2^{10} + 1}{2^{10}} = \frac{t}{2^{10}} - 1 + \frac{1}{2^{10}}$

Черновик

Вратарь 3 вариант выбрать 2 из 4  
3 мяча

2 заш 5 + 3

3 мяча

бп и  
3.2  
бп  
бп  
пн

$$\begin{array}{r} 6 \\ 2 \cdot 2 \cdot 1 \\ 1785 \\ \hline 5355 \end{array}$$

1) без учета цвета 13<sup>6</sup> 15

$$\frac{5 \cdot 4}{2} * \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2}$$

2) уч в заш

$$1) \frac{3 \cdot 5}{2} * \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2}$$

$$2) \frac{3 \cdot 2}{2} * \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2}$$

3) уч в мяч

$$1) 3 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} * \frac{5 \cdot 4}{2}$$

$$2) 3 \cdot \frac{2 \cdot 6}{2} * \frac{5 \cdot 4}{2}$$

$$3) 3 \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} * \frac{5 \cdot 4}{2}$$

4) уч в заш и мяч

$$1) \frac{5}{2} * \frac{6 \cdot 5}{2} * \frac{5 \cdot 6 \cdot 5}{2} * \frac{3 \cdot 2}{2}$$

$$2) \frac{5}{2} * \frac{6 \cdot 5}{2} * 3$$

$$3) \frac{5}{2} * 3 * 3$$

$$\begin{array}{r} + 260 \\ 640 \\ \hline 900 \\ 1785 \\ \hline 5355 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 13 \\ \hline 48 \\ 16 \\ \hline 208 \\ 9 \\ \hline 217 \end{array}$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7}{3 \cdot 2}$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 30 \\ \hline 630 \\ \times 13 \\ 15 \\ \hline 195 \\ 39 \\ \hline 585 \end{array}$$

$$|a-b| = 6$$

$$a = 2 \text{ в}$$

$$a = 0$$

$$\sqrt{12-x+10} = 9$$

$$\sqrt{22-x} = 9$$

$$22-x = 81$$

$$x = -59 \text{ не может}$$

$$\begin{array}{r} + 390 \\ 195 \\ \hline 585 \end{array}$$

$$(xy + 4x - y - 4) |y - x - 8| =$$

$$= (x-4) |xy + 4x - y - 4|$$

$$1) xy + 4x - y - 4 > 0$$

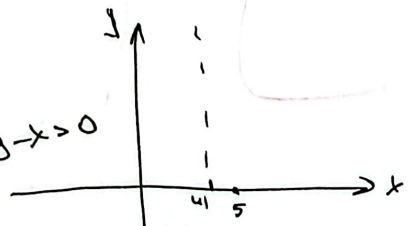
$$|y - x - 8| = x - 4$$

$$y(x-1) > 4 - 4x$$

$$y > \frac{4-4x}{x-1}$$

$$y > -4 \Rightarrow y - x > 0$$

$$x > 4$$



$$|y - x - 8| = x - 4$$

$$\sqrt{y - x + 10} = y - 3$$

$$\sqrt{10}$$

$$y > 3$$

$$|y - 12 - (x - 4)| = x - 4$$

$$y - 12 = 0$$

$$y = 12$$

$$y - 12 = 2x - 8$$

$$y = 2x + 4$$

$$\sqrt{2x+4 - x+10} = 2x+4-3$$

$$\sqrt{x+14} = 2x+1$$

$$x+14 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$4x^2 + 3x - 13 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16 \cdot 13}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8} = \frac{-3 + \sqrt{217}}{8} = 4$$

$\sqrt{217} > 35$  мб