0 204706 870008

20-47-06-87
(39.12)

1755

+1 ~~31~~
+1 Тоцму

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Смирнова Арсения Антоновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
20-47-06-87	84	12	0	12	12	12	12	12	12

1 Задача №1 человек!

Заметим, что выбрать 1 вратаря есть $C_3^1 = 3$ способа.

84 (восемьдесят четыре)

Далее рассмотрим 3 случая:

1) Из универсалов не выбрали защитников:

Тогда есть $C_5^2 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ способов их выбрать и нападающих есть выбрать C_9^3 способов $= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$ способ, тогда в этом случае выбрать команду есть $3 \cdot 10 \cdot 84 = 2520$ способов.

2) Из универсалов выбрали 1 защитника.

Тогда всего способов выбрать 2 защитников есть $C_5^1 \cdot C_3^1 = 15$ способов, а нападающего $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$ способов тогда всего есть $3 \cdot 15 \cdot 56 = 2520$ способов.

3) Из универсалов выбрали 2 защитников тогда защитники есть $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ способа выбрать, и 3 нападающих $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$ способов

а всего команду способов выбрать $3\cdot3\cdot35=315$ способ $\Rightarrow$
всего есть $\frac{2520\cdot2}{2}+315=$

$=5040+315=5355$ способа выбрать команду.

Ответ: 5355 способов

Задача №5.

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+$$
$$+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}-$$
$$-a-b-c+3$$

Заметим, что $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\overset{?}{\geq}$ ($a,b,c>0$)
$\geq a+b+c \Leftrightarrow$ докажем это.

$$b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2\overset{?}{\geq}abc(a+b+c)$$

Сделаем замену $ab=x$;
$bc=y$
$ac=z$.

20-47-06-87
(39.12)

Тогда неравенство перепишется в виде

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz \Leftrightarrow$$
$$2(x^2+y^2+z^2)\geq 2xy+2yz+2xz \Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2-2xy+y^2+z^2-2yz+x^2+z^2-2xz\geq 0$$
$$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\geq 0,$$ что верно $\Rightarrow$

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c \Leftrightarrow$$
$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}-a-b-c+3\geq$$
$$\geq a+b+c-a-b-c+3=$$
$$=3$$

Равенство достигается например, если $a=b=c$, тогда

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}\overset{a=b=c}{=}$$
$$\frac{2a^2-2a^2+2a}{2a}+\frac{2b^2-2b^2+2b}{2b}+\frac{2c^2-2c^2+2c}{2c}=$$
$$=\frac{2a}{2a}+\frac{2b}{2b}+\frac{2c}{2c}=3.$$

Ответ: 3.

Задача №3

Заметим, что если $x>0, y>0$, то

$$\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=\frac{xy-xy+2xy}{xy}=2,$$

если $x>0, y<0$, то

$$0=\frac{-xy-xy+2xy}{xy}=\frac{-|x|y+x|y|+2xy}{xy},$$

если $x<0, y>0$, то

$$\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=\frac{4xy}{xy}=4$$

и если $x<0, y<0$, то

$$\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=\frac{-xy+xy+2xy}{xy}=2.$$

Заметим, что

$|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|\geq 0$, а

$$|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|+\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=0 \Rightarrow \frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}\leq 0$$

(~~иначе выражение~~ т.к. иначе выражение будет >0).

20-47-06-87
(39.12)

Но т.к. $\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}$ принимает только значения 0; 2 и 4, то

$$\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=0 \Rightarrow$$

$x>0, \ y<0$.

Заметим теперь, что

$$|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ x^2y+xy^2=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)=19 \\ xy(x+y)=-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)((x+y)^2-3xy)=19 \\ xy(x+y)=-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3xy(x+y)=19 \\ xy(x+y)=-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3+18=19 \\ xy(x+y)=-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

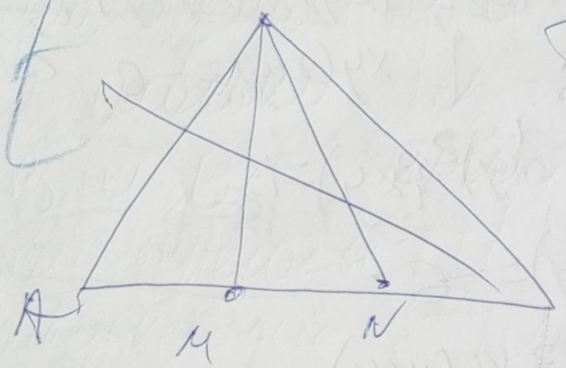
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3=1 \\ xy(x+y)=-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

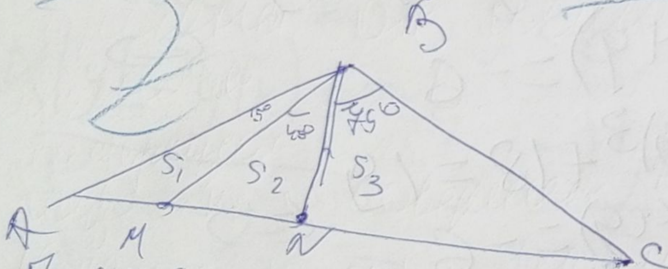
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy\cancel{(x+y)}=-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-6. \end{cases}$$

Тогда x, y это корни уравнения
$a^2 - a - 6 = \cancel{(x+3)(x-2)}$ $(a+2)(a-3)$, то есть
x и y – это из 3 и –2 в каком-то порядке, но т.к. $x>0$, а $y<0$,
то $x=3$, а $y=-2$
Ответ: $(3;-2)$

Задача №4.





Пусть S_1 – площадь ΔABM, S_2 – площадь ΔBMN и S_3 – площадь ΔBNC
Тогда $(S_1+S_2)\cdot(S_2+S_3) = \frac{AB\cdot BN\cdot \sin 60^\circ}{2} \cdot \frac{BM\cdot BC\cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{AB\cdot BN\cdot BM\cdot BC\cdot 3}{16}$

Заметим также, что
$S_1\cdot S_3 = \frac{AB\cdot BM\cdot \sin 15^\circ}{2} \cdot \frac{BN\cdot BC\cdot \sin 75^\circ}{2} =$
$= \frac{AB\cdot BM\cdot BN\cdot BC}{4} \cdot \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ =$
$= \frac{AB\cdot BM\cdot BN\cdot BC}{4} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{2} =$
$= \frac{AB\cdot BM\cdot BN\cdot BC}{16} = 3 \Rightarrow AB\cdot BM\cdot BN\cdot BC = 24$
Тогда $(S_1+S_2)(S_2+S_3) = \frac{AB\cdot BM\cdot BN\cdot BC}{16}\cdot 3 = 4{,}5$, а
также $(S_1+S_2)(S_2+S_3) =$
$= S_1S_2 + S_1S_3 + S_2^2 + S_2S_3 =$
$= S_2^2 + S_2(S_1+S_3) + S_1S_3 =$
$= S_2^2 + 3S_2 + 5 = 4{,}5$, тогда
$S_2^2 + 3S_2 \cancel{+0{,}5} -4 = 0 \Leftrightarrow$
$(S_2+4)(S_2-1) = 0 \overset{S_2>0}{\Leftrightarrow} S_2 = 1$, тогда

$S_{ABC} = S_1 + S_2 + S_3 = 5+1=6$.

Ответ: $S_{ABC} = 6$

Задача №6

Заметим, что автомобиль хотя бы по разу совершил переезды AB, BC и CA, потому что иначе его путь будет н.у.о. из чередования только из поездок AB и BC, тогда на ~~на~~ зациклнуем переходе и

Утверждение: После нечётного перегона автомобилист оказался в B.

Индукция:

База: k=1 совершён переезд из A→B.

Переход. k→k+2. Если на нечётном шаге он в B, то дальше он может поехать либо в A либо в C, а т.к. из A в C не поехать (CA нельзя использовать), то после этого перегона он снова вернется в B.

Аналогично доказывается, что если можно пользоваться перегонами AC и BC, то на нечётном переезде мы попадаем в C, а если можно пользоваться перегонами AB и AC, то мы всегда на чётном переезде попадаем в A => на нечётном в B или C. Итого, если у нас доступно ≤ 2 трасс, то в A мы попадем через чётное число ~~часов~~ переездов. Но т.к. на каждый переезд затрачивается нечётное число минут, то для того чтобы попасть из A в A потребуется чётное число минут, а у нас 85 – ?! => хотя бы по разу использовались переезды AB, BC и AC и на это ушло 35 минут => осталось 50 минут.

Заметим, что если ещё хотя бы по разу совершать все пути

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

~~[illegible]~~ AB, BC и AC, что осталось 15 минут. ~~Потом же~~ Оказывается, что за 15 минут нельзя сделать никаких переездов, потому что если воспользоваться BC ~~[illegible]~~, то останется 4 минуты, за которые нельзя сделать ни одного перегона ⇒ AC нельзя пользоваться ⇒ можно пользоваться только AB, но тогда 15 ⋮ 7, что неверно ⇒ какой-то из трасс мы можем воспользоваться только один раз. Заметим тогда, что по соображениям изложенным выше, каждой трассой после этого мы сможем воспользоваться ~~лишь~~ ~~нечетное~~ только чётное число раз. Очевидно, что если мы едем AБA только обратно, а потом другим способом, то их можно сначала совершить второй способ, а потом первый ⇒ можно считать, что автомобиль первые 3 действия выполнил — это AB → BC → CA.

1) сперва нельзя пользоваться AC тогда

$14k + 22l = 50 \;|:2$

$7k + 11l = 25$

имеет решения лишь при $l = 1$ (иначе если $l \geq 2$ $7k \leq 3$), тогда $k = 2$ (k и l не равны 0, т.к. $25 \not\vdots 11$ и $25 \not\vdots 7$.

2) если нельзя пользоваться BC тогда

$14k + 34l = 50 \Leftrightarrow$ не имеет решений, т.к. k и l не равны 0

$7k + 17l = 25$ (т.к. $25 \not\vdots 7$ и $25 \not\vdots 17$), и

20-47-06-87 (39.12)

тогда $7k + 17l \leq 25$ только при $k = l = 1$, но тогда $7 + 17 = 24 \neq 25$.

3) Если нельзя пользоваться AB. Тогда

$11k + 17l = 25$ k и l не равны 0 (выше доказано) и при этом

т.к. $k \geq 1$ и $l \geq 1$, то

$11k + 17l \geq 17 + 11 = 28 > 25$ ⇒ здесь тоже нет решений в неотрицательных целых.

Итого есть один вариант, где AB автомобиль проехал 5 раз, AC — ~~7~~ 3 раза и BC — 3 раза.

Осталось лишь заметить, что длина $\smile AC = \Pi \cdot AC = \Pi \cdot (AB + BC) =$

$= \Pi \cdot AB + \Pi \cdot BC = \smile AB + \smile BC =$

$= 40$ км.

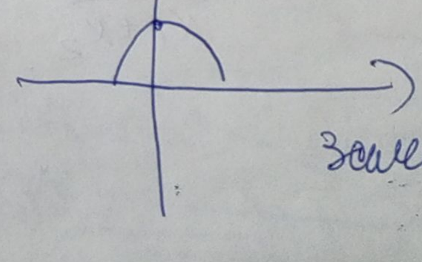
Тогда всего он проехал

$15 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 40 =$

$= 75 + 75 + 40 = 190$ км.

Ответ: 190 км.

Задача № 7.



Заметим, что $a = 18$ (т.к. высота равна (2).

а ширина вычисляется как

$bx^2=a \Rightarrow x^2=\frac{a}{b}$

$2 \cdot 2\sqrt{\frac{a}{b}}=24 \Leftrightarrow$

$2\sqrt{\frac{a}{b}}=12 \Leftrightarrow$ $a=18$.

$b=\frac{1}{8}$

Теперь на параболе отмечены

точки с координатами

$(x_1; y_1); (-x_1; y_1); (x_2; y_2); (-x_2; y_2)$.

Тогда наклоном изображения

прямой проходящей через

(x_1, y_1) и $(x_2; y_2)$ — это

$k_1x_1+b=y_1$ $\Leftrightarrow$ $k_1(x_1-x_2)=y_1-y_2 \Rightarrow$

$k_1x_2+b=y_2$ $\quad k_1=\frac{y_1-y_2}{x_2-x_1}$

аналогично

k проходит через A и D.

$\begin{cases} -kx_1+b=y_1 \\ kx_2+b=y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx_1-b=-y_1 \\ kx_2+b=y_2 \end{cases} \Rightarrow$

$k(x_1+x_2)=y_2-y_1 \Leftrightarrow k_2=\frac{y_2-y_1}{x_1+x_2}$,

т.к. $k_1 \cdot k_2=-1 \Rightarrow$

$\frac{(y_2-y_1)^2}{x_2^2-x_1^2}=1$

Заметим, что

$y=18-\frac{1}{8}x^2 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{8}x^2=18-y \Leftrightarrow$

$x^2=8\cdot(18-y)$, тогда.

$\begin{cases} x_2^2=8\cdot(18-y_2) \\ x_1^2=8\cdot(18-y_1) \end{cases} \Rightarrow$

$x_2^2-x_1^2=8\cdot18-8\cdot y_2-8\cdot18+8\cdot(y_1) \Leftrightarrow$

$8(y_1-y_2) \Rightarrow$, тогда

$\frac{(y_1-y_2)^2}{x_2^2-x_1^2}=\frac{(y_1-y_2)^2}{8(y_1-y_2)}=\frac{y_1-y_2}{8}=1 \Leftrightarrow$

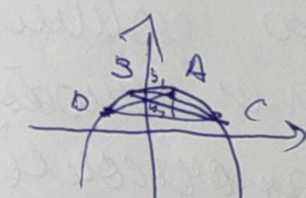
$y_1-y_2=8$

Заметим тогда, что y_1-y_2 — и есть

искомое расстояние, как

видно

из рисунка.



Ответ: 8.

Задача 8

Ответ: $\underbrace{99\ldots9}_{100}$

Решение: ~~Предположим~~ $\underbrace{10^{100}}_{}$ девяток. Пусть $p=$

$=\underbrace{99\ldots9}_{100\ \text{девяток}}$. Тогда $(p+1)=10^{100} \Rightarrow p=10^{100}-1$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

~~Итак~~ Далее. Заметим, что

$P \cdot m = (10^{100}-1)\cdot m = 10^{100}\cdot m - m$

А заметим, что если m заканчивается на k нулей, то сумма цифр $n \cdot m$ и (поделим m на 10^k) и $n \cdot m/10^k$ будут равны, поэтому можно считать, что m не ~~з~~ оканчивается 0. Добавим ~~Дополним~~, если надо в начало числа m сначала нулей, чтобы оно стало (от этого очевидно) 100-значным. Теперь заметим, что т.к. m — 100 значным, и соответственно допишем 0 в начало $n \cdot m$, чтобы оно стало 200-значным).

Тогда заметим, что если $m = x_1x_2\ldots x_{100}$, то если вычесть в столбик, то получим

$$\begin{array}{r} x_1x_2\ldots x_{100}\,000\ldots0 \\ - \qquad\qquad\qquad\qquad 00\ldots0 \\ \hline x_1x_2x_3\ldots x_{100} \end{array}, \text{ где } x_{100}\neq 0.$$

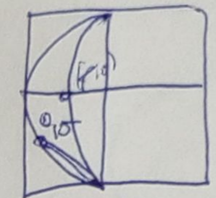
Тогда посчитаем сумму цифр, очевидно это (т.к. нужно занимать единицу)

$x_1+x_2+\ldots+(x_{100}-1)+(9-x_1)+(9-x_2)+\ldots+(10-x_{100}) =$
$= 9\cdot 100$, что и равно сумме цифр нашего числа.

20-47-06-87
(39.12)

Задача 2

Если правильно понял условие, то точка превращается в круг радиуса 0,5 с центром в ней.



Площадь 1. т.к.

~~$1 = \pi R$ окружности $= \pi\sqrt{1^2+1^2} = 2\sqrt{2}-1$~~

$1 - R_{окр} = 1-2\sqrt{1^2+1^2} = 1-2\sqrt{2}$

черновик:

$84 \times 3 = 252$

56×45

280

224

2520

$999 \times 0{,}55 = 549{,}45$

$99 \times 98 = 9702$

$9702 - 99 = 9603$

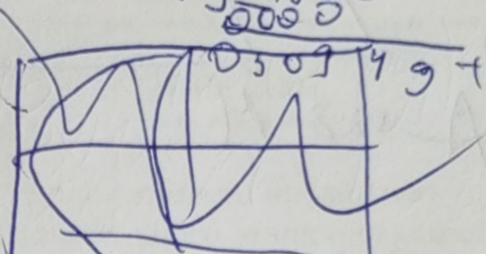
$99 \times 50 = 4950$

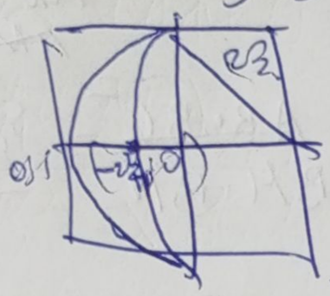
$4950 - 99 = 4851$

$5049 + 99 = 5148$

5148

$5841 - 99 = 5742$





$1 - \sqrt{2} > 0{,}5$

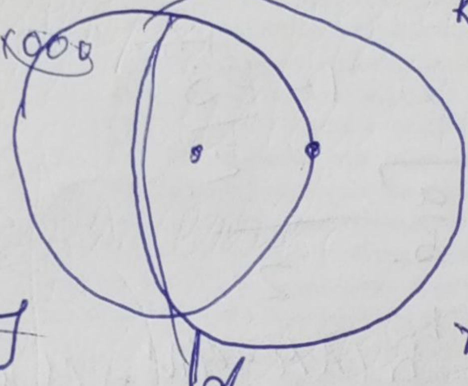
$1{,}5$

$kx_1 - 6 = y_1$

$kx_2 + 6 = y_2$

$(a_1; b_1)$

$(a_2; b_2)$



$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$k(x_1 + x_2) = y_2 - y_1$

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\frac{(y_1 - y_2)^2}{x_2^2 - x_1^2} = 1$

$k = (-a_1; b_1)$

$(a_2; b_2)$

~~$ka_1 + b_1 = y$~~

~~$ka_1 + b$~~

$-kx_1 + b = y_1$

$kx_2 + b = y_2$

$kx_1 + b = y_1$

$kx_2 + b = y_2$

$\frac{4xy}{xy} = 4$

$x^2 + y^2 (x+y)$

$\frac{14}{-6} = \frac{7}{-3}$

$2 \cdot 1 \cdot 1 - 8 + 4$

$y < 0$ $x > 0$ $(x+y)^2$

$xy(x+y) = -6$

$\frac{ca - b^2 + b}{}$

$\frac{bc - a^2 + a}{a}$

$-\frac{1}{2}$

~~$x^2 + y^2$~~ $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 19$

$(399+90+9)\cdot(500+0+0)\ \ldots$

$(1000-1)\cdot 500 \quad 501000$

501

499

450000 45 4500 999

$100\cdot 10$

$1000\cdot 1000$

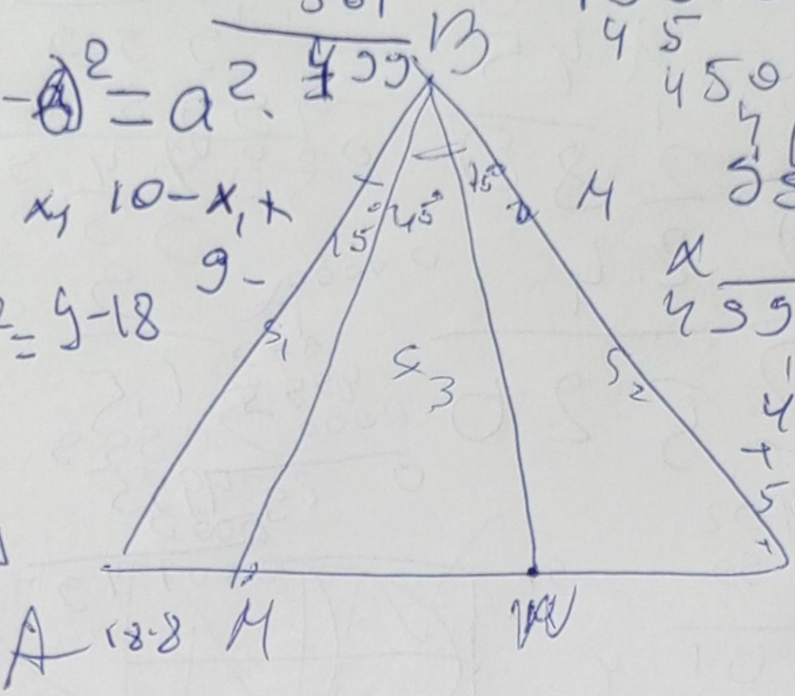
$x^2+(y-a)^2=a^2$

$x_1\ 10-x_1+$

$9-$

$x^2=y-18$

$18-\frac{1}{8}x^2=y$



499500

500499

$x^2=8y$

$\frac{AC}{MN}=$

$2S_2+S_3$

$S_1+S_2=5$

$S_1S_2=3$

a^2-5a+3

$25-12$

$\frac{AB\cdot BC}{BM\cdot BN}=\frac{S_1+S_2+S_3}{S_3}=$

$=\frac{S_1+S_2}{S_3}+1$

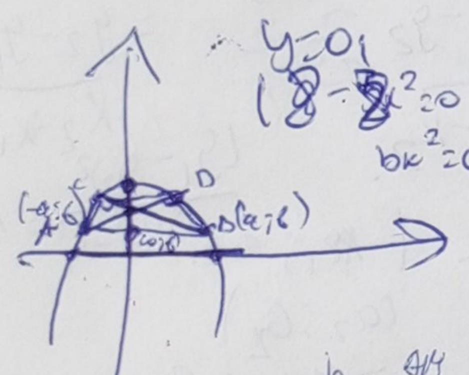
$\cos 2x=1-2\sin^2 x$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y=0$

$18-\frac{1}{8}x^2=0$

$bx^2=a$



$x=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$

$\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$

$=\frac{AM+NC}{MN}$

$\frac{h\cdot AM}{2}$

$\frac{h}{2}(AM+MN)+MN+AC$

$a=18$

$2\sqrt{\frac{a}{b}}=24$ $h\cdot MN+5$

$\frac{h}{2}(AM+MN)$

$\frac{18}{b}=144$

$(S_1+S_2)(S_3+S_2)=$

$b=\frac{144}{18}$ $b=\frac{1}{8}$

$2\sqrt{\frac{b}{a}}=24$

$\frac{b}{a}=144$