0 189557 020003

18-95-57-02
(40.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Столярова Фёдора Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	12	8	8	12	12	0	0	64

Чистовик: №1 64 (шестьдесят четыре)

Способов выбрать вратаря: 3.

Способов выбрать защитников:

1) среди них 0 универсалов: $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

2) среди них 1 универсал: $3 \cdot 5 = 15$

3) среди них 2 универсала: $C_3^2 = 3$.

~~Среди~~ Способов выбрать нападающих (учитывая ~~пун~~ пункты с выбором защитников):

1) среди защитников 0 универсалов: $C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84$

2) среди защитников 1 универсал: $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$

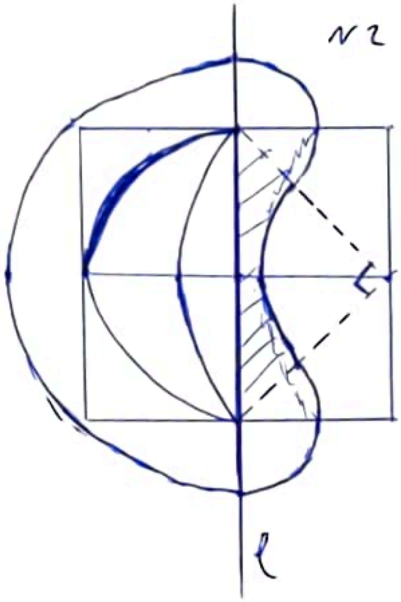
3) среди защитников 2 универсала: $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$.

Получаем, что всего способов: $3 \cdot (10 \cdot 84 + 15 \cdot 56 + 3 \cdot 35) =$
$= 3 \cdot (840 + 840 + 105) = 3 \cdot 1785 = 5355$

Ответ: 5355 способов.

$$\begin{array}{r} \times\ 1785 \\ 3 \\ \hline 5355 \end{array}$$

Чистовик: №2



~~Площадь по~~

После того, как точки превратились в круги радиуса 0,5; можно сказать, что ~~принадлежащая~~ границей новой фигуры стали множество точек, отдаленных на расстояние 0,5 от каждой ~~точки~~ граничной точки начальной фигуры.

1) Площадь фигуры слева от прямой l ~~(…)~~ (Это ~~…~~ полуокружность с радиусом 1,5): $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9\pi}{8}$

2) Площадь фигуры справа от прямой l ~~(…)~~ (заштрихованная) (площадь Δ − части круга):

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 - \cancel{\pi}\ \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot(\sqrt{2}-0{,}5)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}\left(\frac{9}{4}-\sqrt{2}\right) =$

$= 1 - \frac{9\pi}{16} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$;

3) Площадь фигуры справа от прямой l (не заштрихованная). (каждая часть − $\frac{3}{8}$ ~~круга~~ площади круга):

$2\cdot\frac{3}{8}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3\pi}{16}$;

Получаем, что площадь полученной фигуры: $\frac{9}{8}\pi + 1 - \frac{9}{16}\pi + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{3\pi}{16} =$

$= 1 + \frac{9\pi}{8} - \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 1 + \frac{3}{4}\pi + \cancel{\pi}\ \frac{\sqrt{2}}{4}\pi = 1 + \frac{3+\sqrt{2}}{4}\pi$.

Ответ: $1 + \frac{3+\sqrt{2}}{4}\pi$

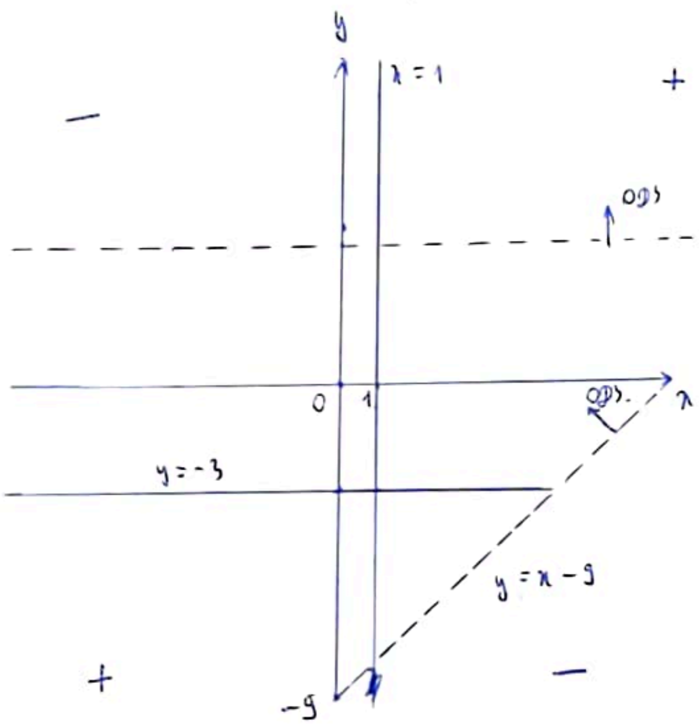
Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

18-95-57-02 (40.1)

Чистовик. №3 (1)

$xy-3+3x-y\geq 0;\quad x(y+3)-(y+3)\geq 0;\quad (x-1)(y+3)\geq 0;$

ОДЗ: $y-x+9\geq 0;\quad y\geq x-9;\quad y-4\geq 0\Rightarrow y\geq 4.$



~~$\sqrt{y-x+9}=y-4;$~~

~~Но ОДЗ: $y-x+9=y^2-8y+16;$~~

~~$y^2-9y+7=-x;$~~

~~$x=-y^2+9y-7;$~~

~~$y_0=-\frac{9}{2\cdot(-1)}=\frac{9}{2};$~~

~~$x_0=-\frac{81}{4}+\frac{81}{2}-7=$~~

~~$=\frac{81}{4}-7=\frac{81}{4}-\frac{28}{4}=\frac{53}{4}$~~

1) $xy-3+3x-y=0\Rightarrow$ ~~$x=1,\ y=$~~ $x=1$ или $y=\cancel{3}-3$

а) $x=1:\ \sqrt{y-1+9}=y-4;\quad \sqrt{y+8}=y-4;\quad y+8=y^2-8y+16;$

$y^2-9y+8=0;\quad (y-1)(y-8)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \text{ — не удов. ОДЗ} \\ y=8 \text{ — удов. ОДЗ} \end{array}\right.\Rightarrow y=8,\ x=1.$

~~2)~~ б) $y=-3:\ \sqrt{-3-x+9}=-3-4\Rightarrow\varnothing.$

2) $xy-3+3x-y>0\Rightarrow |y-x-9|=x-4;\quad x\geq 4.$

а) $y-x-9\geq 0:\quad y-x-9=x-4;\quad y=2x+5.$

$\sqrt{2x+5-x+9}=2x+5-4;\quad \sqrt{x+14}=2x+1;\quad 2x+1\geq 0\Rightarrow x\geq-\frac{1}{2}$

$x+14=4x^2+4x+1;\quad 4x^2+3x-13=0;\quad x=\frac{-3\pm\sqrt{9+208}}{16}<4\Rightarrow\varnothing$

~~3) $xy-3+3x-y<0\Rightarrow |y-x-9|=4-x;\ x\leq 4.$~~

$y<x.$

б) $y-x-9<0;\quad -y+x+9=x-4;\quad y=13;\quad \sqrt{13-x+9}=13-4;$

$\sqrt{22-x}=9;\quad 22-x=81;\quad x=-59$, но тогда $xy-3x-y<0\Rightarrow\varnothing$

3) $xy-3+3x-y<0:\ |y-x-9|=4-x;\quad x\leq 4.$

а) $y-x-9\geq 0:\quad y-x-9=4-x;\quad y=13;\quad \sqrt{13-x+9}=13-4\Rightarrow x=-59.$

$13-(-59)-9\geq 0$ — верно $\Rightarrow (-59;\ 13)$ — подходит.

Чистовик. №3(2)

5) $y - x - 9 < 0$; $-y + x + 9 = y - x$; $y = 2x + 5$;

$\sqrt{2x+5 - x+9} = 2x+5-4$; $\sqrt{x+14} = 2x+1$; $(2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

$x + 14 = 4x^2 + 4x + 1$; $4x^2 + 3x - 13 = 0$; $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+208}}{16} = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{16}$;

$\frac{-3-\sqrt{217}}{16} < \frac{-3-14}{16} = -\frac{17}{16} < -1 \Rightarrow$ не подходит.

$x = \frac{-3+\sqrt{217}}{16} \Rightarrow y = \frac{-3+\sqrt{217}}{8} + 5 = \frac{37+\sqrt{217}}{8}$;

$0 < x < 1$; $\frac{51}{8} < y < \frac{52}{8} = 6{,}5$; $y - x - 9 < 0$ – верно.

$xy - 3 + 3x - y < 0$ – верно $\Rightarrow$ корни подходят.

Получаем, что решения системы: $(x;y) = \{(1;8); (-59;13); (\frac{-3+\sqrt{217}}{16}; \frac{37+\sqrt{217}}{8})\}$

Ответ: $(1;8)$, $(-59;13)$, $(\frac{-3+\sqrt{217}}{16}; \frac{37+\sqrt{217}}{8})$.

№4(1)

1 час 25 минут = 85 минут. Заметим, что $85 = 17 \cdot 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ он не мог проехать по дуге AC больше 5 раз. Но он также не мог проехать по дуге AC ровно 5 раз, иначе он бы оказался в точке C, поэтому по дуге AC он проехал не более 4 раз.

1) Автомобиль проехал по дуге AC 4 раза, потратив на это 68 минут. Значит на другие участки дороги он потратил 17 минут, что невозможно получить из 11 и 7 минут.

2) Автомобиль проехал по ~~дуге~~ дуге AC 3 раза, потратив на это 51 минуту. Значит, на другие участки дороги он потратил 34 минуты, что невозможно получить из 11 и 7 минут.

3) Автомобиль проехал по дуге AC 2 раза, потратив на это 34 минуты. Значит, на другие участки дороги он потратил ~~17~~ 51 минуту.
$51 = 1 \cdot 7 + 4 \cdot 11$. ~~Но чтобы вернуться~~ Он пройдет по дуге AC – 2 раза, а по дуге AB – 1 раз, что невозможно ~~(он не вернется в то~~ (он не вернется в точку A)

18-95-57-02
(40.1)

Чистовик   № 4 (г)

~~Но чтобы вернуться в точку А, он должен проехать четное количество дуг AB и BC. 5+17+4 = ... /:2 => такое невозможно.~~

4) Автомобиль проехал по дуге AC 1 раз, потратив на это 17 минут. Значит, на другие участки дороги он потратил 68 минут. $68 = 5 \cdot 7 + 3 \cdot 11$. ~~1+5+3=9 /:2 =>~~ ~~=> такое невозможно.~~ - такое возможно.

5) Автомобиль проехал по дуге AC 0 раз. Значит, на другие участки дороги он потратил 85 минут.

$85 = 9 \cdot 7 + 2 \cdot 11$ и $85 = 1 \cdot 7 + 7 \cdot 11$.

AB - 9 раз, BC - 2 раза => он не вернется в точку А.

~~9+2=11 /:2 => такое невозможно~~

$1+7 \vdots 2$, но он пройдет по дуге AB 1 раз, после чего будет ездить по ~~дуг~~ дуге BC и не вернется в точку А.

Получаем, что возможен ~~вари~~ только один случай - когда он автомобиль проехал по дуге AC - 1 раз, ~~по дуг~~ AB - 5 раз, BC - 3 раза.

Пример: $AC \to 5 \cdot BC \to 3 \cdot AB$.

~~$AC \to 3 \cdot AB \to 5 \cdot BC$~~. $\breve{AB} = 15 \Rightarrow R_1 = \frac{15}{\pi}$

$\breve{BC} = 25 \Rightarrow R_2 = \frac{25}{\pi}$; $AC = \pi(R_1 + R_2) = 15 + 25 = 40$.

$3 \cdot AB + 5 \cdot BC + AC = 3 \cdot 15 + 5 \cdot 25 + 40 =$

$= 45 + 125 + 40 = 210$ км   Ответ: 210 км.

Черновик. №5

$y = f(x)$; $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$; $\cancel{f(\frac{1}{x})}$

$\cancel{f(\frac{1}{x-1}) =}$ $x = \frac{1}{x-1}$: $f\left(\frac{\frac{1}{x-1}+1}{\frac{1}{x-1}-1}\right) = f\left(\frac{1+x-1}{1-x+1}\right) =$

$= f\left(\frac{x}{2-x}\right)$;

$\cancel{f(}$ $x=-1$: $f\left(\frac{-1+1}{-1-1}\right) = f(0) = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$;

$\cancel{x=-3: f\left(\frac{-3+1}{-3-1}\right) = f\left(\frac{-2}{-4}\right) = f}$

$\frac{x+1}{x-1} = -\frac{1}{2}$; $2x+2 = 1-x$; $3x = -1$; $x = -\frac{1}{3}$;

$x = -\frac{1}{3}$: $f\left(\frac{-\frac{1}{3}+1}{-\frac{1}{3}-1}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{3}{4}$;

$\cancel{f\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad \frac{x+1}{x-1} = x; \quad x+1 = x^2-x, \quad x^2-2x-1=0;}$

$\cancel{f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = f(}$; $x = \frac{x+1}{x-1}$: $\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}\right) = \left(\frac{x+1+x-1}{x+1-x+1}\right) = \frac{2x}{2} = x$;

$f\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}\right) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{x-1}{x+1-x+1} = \frac{x-1}{2}$;

$f(x) = \frac{x-1}{2}$; $f\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{\frac{x-1}{2}-1}{2} = \frac{x-1-2}{4} = \frac{x-3}{4}$;

$\cancel{f(x}$ $f($

Чистовик. №5

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{1}{x-1}$; Подставим ~~вместо~~ вместо x: $\frac{x+1}{x-1}$.

$$f\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}\right)=f\left(\frac{x+1+x-1}{x+1-x+1}\right)=f\left(\frac{2x}{2}\right)=f(x)=$$

$$=\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\cancel{\frac{x-1}{x+1-x+1}}\ \frac{x-1}{x+1-x+1}=\frac{x-1}{2};$$

Получаем: $f(x)=\frac{x-1}{2}$; $f(f(x))=f\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{\frac{x-1}{2}-1}{2}=\frac{x-3}{4}$;

$$f(f(f(x)))=f\left(\frac{x-3}{4}\right)=\frac{\frac{x-3}{4}-1}{4}=\frac{x-7}{16};$$

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{4}=f\left(\frac{x-7}{16}\right)=\frac{\frac{x-7}{16}-1}{2}=\frac{x-23}{32};$$

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{5}=f\left(\frac{x-23}{32}\right)=\frac{\frac{x-23}{32}-1}{2}=\frac{x-55}{64};$$

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{6}=f\left(\frac{x-55}{64}\right)=\frac{\frac{x-55}{64}-1}{2}=\frac{x-119}{128};$$

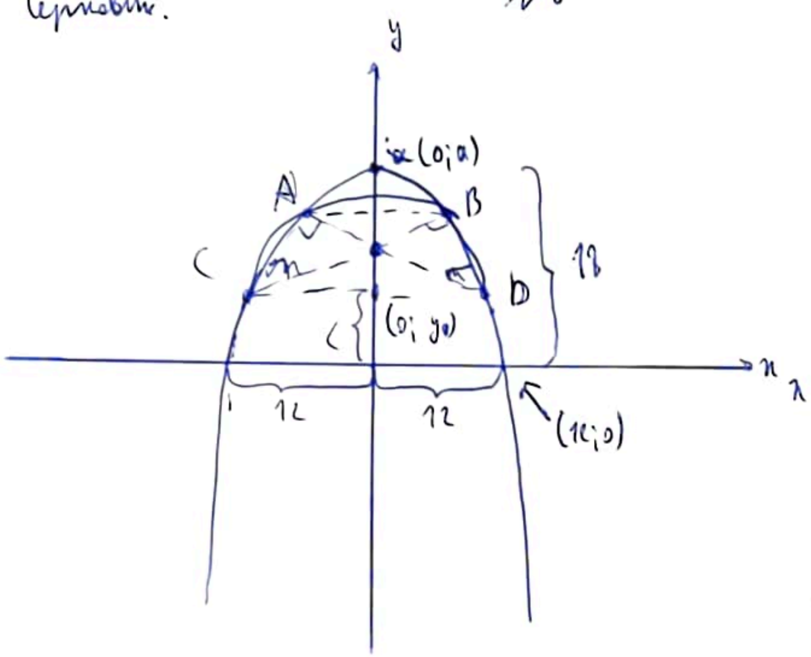
Заметим, что ~~коэф. при x~~ всегда остается только коэф. при x и свободный член. ~~И~~ Коэф. при x: $\frac{1}{2^n}$, где n – количество функций $f(x)$, ~~под~~ тогда $g(x)=\frac{x}{2^{10}}-c$, где c – свободный ~~коэф.~~ член. Тангенс угла наклона касательной – это $g'(x)$, то есть $\frac{1}{2^{10}}$ ед. Получаем, что ~~о~~ ~~tg~~ тангенс угла наклона в любой точке ~~графика $g(x)$.~~ в $x=0$: $\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}$

Ответ: ~~$\frac{1}{2^{10}}$~~ $\frac{1}{1024}$.

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик.

№6



$y = a - bx^2$;

$x_0 = 0$; $y_0 = a$

$a = 18$ (из условия).

~~$24 = \dots$;~~

~~$D = 0 + 4\cdot 18\cdot b =$~~

~~$= 0 + 4\cdot 18 b = 72b$;~~

~~$24 = \sqrt{72b} \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow 4 = \sqrt{2b} \Rightarrow b = 8 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow y = -8x^2 + 18$~~

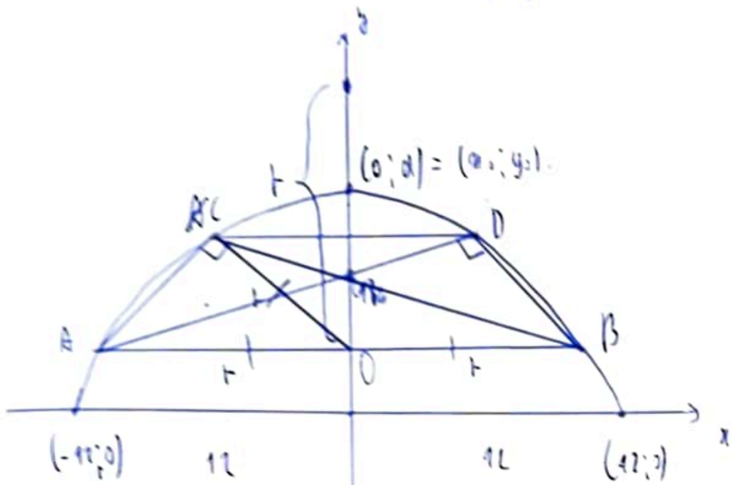
$0 = 18 - b\cdot 12^2$; $b = \frac{18}{12^2} = \frac{18}{144} = \frac{1}{8}$; $y = -\frac{1}{8}x^2 + 18$;

Окружность $x^2 + (y - c)^2 = r^2$

$\underline{y_A} = y_0$

Чистовик

№6



$y = -bx^2 + a;$

$x_0 = 0;\ y_0 = a.$

$a = 18$ — по условию.

$y = -bx^2 + 18;$

$(x; y) = (12; 0):$

$0 = -144b + 18;$

$b = \frac{1}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{8}x^2 + 18;$

Пусть координаты точки B: $\left(x; -\frac{1}{8}x^2 + 18\right)$, тогда точка A: $\left(-x; -\frac{1}{8}x^2 + 18\right)$. $AB = 2x$

Пусть координаты точки C: $\left(x_c; -\frac{1}{8}x_c^2 + 18\right)$, тогда

~~по т. Пифагора:~~ $\cancel{AC^2 = (-x - x_c)^2 + \left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}x_c^2\right)^2;}$

$\cancel{BC^2 = (x - x_c)^2 + \left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}x_c^2\right)^2;\ AB^2 = 4x^2;}$

~~Получаем, что~~ $\cancel{AC^2 + BC^2 = AB^2:}$

$\cancel{(x + x_c)^2 + (x - x_c)^2 + \frac{1}{64}(x^2 - x_c^2)^2 + \frac{1}{64}(x^2 - x_c^2)^2 = 4x^2}\ (1)$

$OC = AO = BO \Rightarrow;\ OC^2 = x_c^2 + \left(-\frac{1}{8}x_c^2 + \frac{1}{8}x^2\right)^2;\ AO^2 = x^2;$

$x_c^2 + \frac{1}{64}x_c^4 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{32}x_c^2x^2 = x^2;$

$\Leftrightarrow \frac{1}{64}(x^2 - x_c^2)^2 = x^2 - x_c^2;\ x \neq x_c \Rightarrow x^2 - x_c^2 = 64$

$\cancel{(1):\ x^2 + x_c^2 - 2xx_c + x^2 + x_c^2 + 2xx_c +}$

$\cancel{\Rightarrow \frac{1}{64}\cdot 64^2 + \frac{1}{64}\cdot 64^2 = 4x^2;\ 2x}$

$S(AB; CD) = y_c - y_B = -\frac{1}{8}x_c^2 + 18 - \left(-\frac{1}{8}x^2 + 18\right) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x_c^2 =$

$= \frac{1}{8}(x^2 - x_c^2) = \frac{1}{8}\cdot 64 = 8$ Ответ: 8.

Чистовик №7

n – 10-значное натуральное число $\Rightarrow$ $n \geq \overset{m}{\cancel{10}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow m$ может равняться n. $S(n) = S(n^2)$;

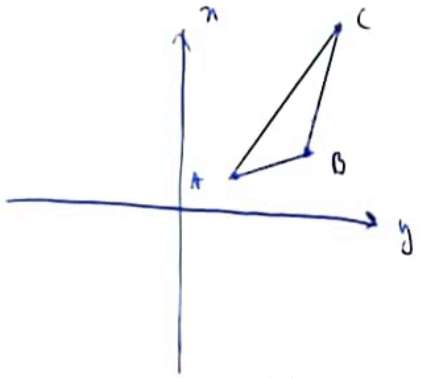
$S(mn) = S(n)$;

Чистовик:

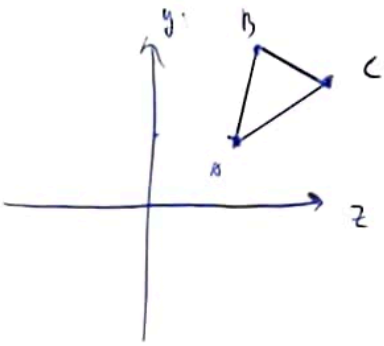
№ 6

A(3; 4; 5), B(11; 10; 6), C(5; 8; 9). ; (x; y; z).

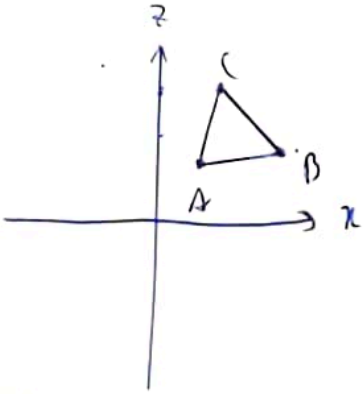
В плоскости XY:



В плоскости YZ:



В плоскости ~~XZ~~ ZX:



~~Т.о.~~ Если точка ~~увеличлена~~ имеет целые во всех трех плоскостях, то она имеет целые координаты и в плоскости самого треугольника.