0 953445 670003

95-34-45-67
(38.2)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Сторожева Александра Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
95-34-45-67	100	10	15	15	15	15	15	15	

95-34-45-67 (38.2)

Черновик

№1

$a=-\left(\frac{1}{m}-2+\frac{1}{n}-2\right)=4-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\in\mathbb{Z}$

$b=\left(\frac{1}{m}-2\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\in\mathbb{Z}$

$b=4-\frac{2}{n}-\frac{2}{m}+\frac{1}{nm}\in\mathbb{Z}$

$b-2a=\frac{1}{nm}-4\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left[\begin{matrix}nm=1\\nm=-1\end{matrix}\right.$

$\frac{1}{m},\frac{1}{n}\in[-1;0)\cup(0;1]$ $\quad\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\in[-2;2]\in\mathbb{Z}$

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\in\{-2;-1;0;1;2\}$

1) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=-2\Rightarrow n+m=-2nm\Rightarrow 2nm+n+m=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 4nm+2n+2m=0\Rightarrow(2n+1)(2m+1)=1=\cancel{1\cdot1}=(-1)\cdot(-1)$ $\quad n=-1,\ m=-1$

$a=4-\frac{1}{-1}-\frac{1}{-1}=6;\ b=4-\frac{2}{-1}-\frac{2}{-1}+\frac{1}{(-1)\cdot(-1)}=9\quad a+b=\boxed{15}$

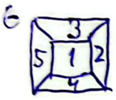
2) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=-1;\ nm+n+m=0;\ (n+1)(m+1)=1=\cancel{1\cdot1}=(-1)\cdot(-1)\Rightarrow n=-2,\ m=-2$ $\quad a=4-\frac{1}{-2}-\frac{1}{-2}=5;\ b=4-\frac{2}{-2}-\frac{2}{-2}+\frac{1}{(-2)(-2)}=6+\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z}$

3) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=0;\ m+n=0;\ m=-n;\ a=4;\ b=4-\frac{2}{n}-\frac{2}{(-n)}+\frac{1}{n\cdot(-n)}=4-\frac{1}{n^2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{1}{n^2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left[\begin{matrix}n=1;\ m=-1\\m=-1;\ m=1\end{matrix}\right.$ $\quad b=3\quad a+b=\boxed{7}$

4) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1;\ n+m=nm;\ 1=(n-1)(m-1)=1\cdot1=\cancel{(-1)\cdot(-1)}$ $\quad n=2,\ m=2$ $\quad a=4-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=3;\ b=4-\frac{2}{2}-\frac{2}{2}+\frac{1}{2\cdot2}=2+\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z}$

5)

№2



1 : 4 $\quad 1\to2,3,4,5\to3+2+2+1=8$

2 : 3 $\quad 2\to3,4,6\to2+2+0=4$

3 : 2 $\quad 3\to5,6\to1+0=1$

4 : 2 $\quad 4\to5,6\to1+0=1$

5 : 1 $\quad 5\to6\to0$

6 : 0 $\quad 6\to\varnothing$

$\boxed{14}$

№3

$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=\frac{bc}{a}-a+1+\frac{ac}{b}-b+1+\frac{ab}{c}-c+1=$

$=3-(a+b+c)+\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\geq3-(a+b+c)+3\sqrt[3]{\frac{ab}{c}\cdot\frac{ac}{b}\cdot\frac{bc}{a}}$

$a\geq b\geq c$ $\quad a\geq b\geq c$ $\quad \frac{b}{c}\geq\frac{a}{b}\geq\frac{c}{a}$ $\quad a\geq b\geq c$ $\quad \frac{a}{b}\geq\frac{b}{c}\geq\frac{c}{a}$ $\quad ab\geq ac\geq bc$ $\quad \frac{1}{c}\geq\frac{1}{b}\geq\frac{1}{a}$

$\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\geq a+b+c$

$\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}-a-b-c\geq0$

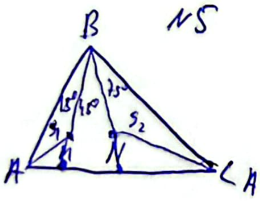
3 (1;1;1)

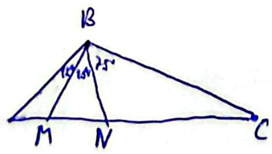
№4

$g:(1,3,5,7,9),(1,3,5,7,10),(1,3,5,8,10),(1,3,6,8,10),(1,4,6,8,10),(2,4,6,8,10)-\boxed{6}$ вар

$6\cdot5!\cdot A_5^3\cdot2=6\cdot120\cdot\frac{5!}{2!}\cdot2=6\cdot120^2=6\cdot14400=\frac{\times\ 144\ \ 6}{864}=\boxed{86400}$

№5





$\frac{S_{ABM}}{\sin15^\circ}\cdot\frac{S_{NBC}}{\sin75^\circ}=\frac{S_{ABC}}{\sin120^\circ}\cdot\frac{S_{MBN}}{\sin45^\circ}$

$S_{ABM}=\frac{1}{2}AB\cdot BM\cdot\sin15^\circ$ $\quad S_{ABC}\cdot S_{MBN}=\frac{3\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}}{\frac{1}{2}\sin30^\circ}=\frac{3\cdot\sqrt3\cdot\frac{\sqrt2}{2}}{\frac{1}{2}}=3\sqrt6$

$S_{NBC}=\frac{1}{2}BN\cdot BC\cdot\sin75^\circ$ $\quad \sin75^\circ=\cos15^\circ$

$S_{ABM}\cdot S_{NBC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\underbrace{\sin15^\circ\cdot\cos15^\circ}_{\frac{\sin30^\circ}{2}}\cdot BM\cdot BN\cdot\frac{1}{2}=$

$=\frac{S_{ABC}}{\sin120^\circ}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{S_{BMN}}{\sin45^\circ}=\frac{S_{ABC}}{\frac{\sqrt3}{2}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{S_{BMN}}{\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{S_{ABC}\cdot S_{BMN}}{\sqrt6}=3$

$S_{ABC}\cdot S_{BMN}=3\sqrt6$

$S_{ABC}-S_{BMN}=S_{ABM}+S_{NBC}=5;\ S_{BMN}=S_{ABC}-5\quad S_{ABC}=S$

$S(S-5)=3\sqrt6;\ S^2-5S-3\sqrt6=0$

$\cancel{S=\frac{3\pm\sqrt{9+12\sqrt6}}{2}=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{9+12\sqrt6}}{2}}$ $\quad S>0$ $\quad \cancel{S=\frac{5}{2}}$ $\quad S=\frac{5\pm\sqrt{25+12\sqrt6}}{2}=\frac{5+\sqrt{25+12\sqrt6}}{2}$ $\quad S>0$

Черновик

№6

$7 \to \frac{7}{2} \to \frac{7}{2}+5 \to \frac{\frac{7}{2}+5}{2}$ $a_i = \frac{a_{i-1}}{2}+5$ $a_{i-1} \leq 10 \Rightarrow a_i = \frac{a_{i-1}}{2}+5 \leq \frac{10}{2}+5 = 10 \Rightarrow a_i \leq 10$

$a_1 = 7$ $a_1 = 7$

$b_i = \frac{a_i}{2}$ $a_i = a_{i+1} = \frac{a_i}{2}+5$ $b_i = 10 - a_i \Rightarrow b_1 = 10-7=3$

$a_i = b_i + 5$ $10 - b_i = \frac{10-b_{i-1}}{2}+5 = 10 - \frac{b_{i-1}}{2}$; $b_i = \frac{b_{i-1}}{2}$ $a_i \geq 10 - \frac{99.9}{100} = 10 - 0.999 = 9.99$

$\frac{3}{2^{i-1}} \leq 0.01$; $300 \leq 2^{i-1}$ $256 = 2^8 < 2^{i-1}$ $i-1>8$ $i>9$ $i \geq 10$ $b_i \leq 0.01$

$b_1 = 3$ $b_2 = \frac{3}{2}$ $b_9 = \frac{3}{2^8} = \frac{3}{256} > 0.01$ $b_{10} = \frac{3}{512} \leq 0.01$ 10

№7 $AB = \frac{l_{AB}}{2\pi} = \frac{30}{\pi}$ $BC = \frac{l_{BC}}{2\pi} = \frac{80}{\pi}$ $AC = AB + BC = \frac{80}{\pi}$

$x : AB$ $y : BC$ $z : AC$ $l_{AC} = \cancel{2\pi} \cdot AC = 80$; $\frac{l_{AC}}{2} = 40$

$7x + 11y + 17z = 85$ $x \leq 12$; $y \leq 7$; $z \leq 5$

$z=0$: $7x + 11y = 85 = 63 + 22$; $7(x-9) + 11(y-2) = 0$; $7(x-9) = 11(2-y)$ $x-9 \vdots 11$ $x = 9$ $y = 2$ $y+z \not\vdots 2$

$z=1$: $7x + 11y = 85 - 17 = 68 = 35 + 33$; $7(x-5) = 11(3-y)$ $x-5 \vdots 11$ $x=5$ $y=3$ $z=1$ A; B, C BCABABA

$5 \cdot 15 + 3 \cdot 25 + 1 \cdot 40 = 190$

$z=2$: $7x + 11y = 85 - 34 = 51 = 7 + 44$; $7(x-1) = 11(4-y)$ $x-1 \vdots 11$ $x=1$ $y=4$ $z=2$

$\boxed{\text{цикл: } x+y \vdots 2;\ x+z \vdots 2,\ y+z \vdots 2 \quad x+y+z \not\vdots 2 \quad x \not\vdots 2\ y \not\vdots 2\ z \not\vdots 2}$

$z=3$: $7x + 11y = 85 - 51 = 34 = 56 - 22$; $11(y+2) = 7(8-x)$ $y+2 \vdots 7 \Rightarrow y = 5$ $5 \cdot 11 > 34$

$z=5$: $7x + 11y = 85 - 85 = 0$ $x=0$ $y=0$ $z=5$. $x \not\vdots 2$

Чистовик

Задача 1.

По т. Виета $\begin{cases} a = -\left(\left(\frac{1}{m}-2\right)+\left(\frac{1}{n}-2\right)\right) \in \mathbb{Z} \\ b = \left(\frac{1}{m}-2\right)\left(\frac{1}{n}-2\right) \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$a = 4 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \in \mathbb{Z}$

$b = 4 - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} + \frac{1}{mn} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow b - 2a = 4 - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} + \frac{1}{mn} - 2\left(4 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{mn} - 4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{mn} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 \vdots (mn) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (1)\ mn = 1 \\ (2)\ mn = -1 \end{array}\right.$

(1) $mn = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 \vdots n \Rightarrow n \in \{1; -1\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n=1 \\ m=1 \end{cases} \\ \begin{cases} n=-1 \\ m=-1 \end{cases} \end{array}\right.$

$n=1, m=1 \Rightarrow a = 2; b = 1 \Rightarrow \underline{a+b=3}$

$n=-1; m=-1 \Rightarrow a = 6; b = 9 \Rightarrow \underline{a+b=15}$

(2) $mn = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 \vdots n \Rightarrow n \in \{1; -1\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n=1 \\ m=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} n=-1 \\ m=1 \end{cases} \end{array}\right. \xRightarrow{\text{(в обоих случаях)}} a = 4; b = 3 \Rightarrow \underline{a+b=7}$

~~$n=1; m=-1$~~ $\Rightarrow$

Ответ: 3; 7; 15

Задача 2.

В последовательности за числом 1 могут идти: 2,3,4,5 – 4 варианта; за 2: 3,4,6 – 3 варианта; за 3: 5,6 – 2 варианта; за 4: 5,6 – 2 варианта; за 5: 6 – 1 вариант; за 6 – никакое число – 0 вариантов

$n(1)=4,\ n(2)=3,\ n(3)=2,\ n(4)=2,\ n(5)=1,\ n(6)=0$

Если первое число посл. – 1, то за ним могут идти 2,3,4,5, за каждым из которых соответственно может идти 3,2,2,1 чисел $\Rightarrow$ суммарно посл., нач. с 1: $3+2+2+1=8$

Аналогично; с 2 может начинаться $n(3)+n(4)+n(6)=4$ посл.; с 3 может начинаться $n(5)+n(6)=1$ посл.; с 4 может начинаться $n(5)+n(6)=1$ посл; с 5 может начинаться $n(6)=0$ посл.; с 6 посл. начинаться не могут

$8+4+1+1+0+0=14$

Ответ: 14

Задача 3.

$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a} + \frac{2ca-2b^2+2b}{2b} + \frac{2ab-2c^2+2c}{2c} = \frac{bc}{a} - a + 1 + \frac{ca}{b} - b + 1 + \frac{ab}{c} - c + 1 = 3 + \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right) - (a+b+c)$

БОО: $a \geq b \geq c$

Рассмотрим наборы x_i: $x_1 = ab;\ x_2 = ac;\ x_3 = bc$ и y_i: $y_1 = \frac{1}{c};\ y_2 = \frac{1}{b};\ y_3 = \frac{1}{a}$

$ab \geq ac \geq bc \Rightarrow x_1 \geq x_2 \geq x_3$; $a \geq b \geq c \Rightarrow \frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a} \Rightarrow y_1 \geq y_2 \geq y_3$

Следовательно, по транснеравенству $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \geq x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 \Rightarrow \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a + c + b \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} - a - b - c \geq 0 \Rightarrow 3 + \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right) - (a+b+c) \geq 3$

Пример на 3: $a=1, b=1, c=1$; $3 + \frac{1 \cdot 1}{1} + \frac{1 \cdot 1}{1} + \frac{1 \cdot 1}{1} - (1+1+1) = 3$

Ответ: 3

Чистовик

Задача 4.

Рассмотрим все множества мест, на которых могли бы сидеть 5 девочек: $(1;3;5;7;9)$, $(1;3;5;7;10)$, $(1;3;5;8;10)$, $(1;3;6;8;10)$, $(1;4;6;8;10)$, $(2;4;6;8;10)$ – 6 вариантов

В каждом из этих вариантов:

рассадить девочек по данным 5 местам – $5! = 120$ вариантов

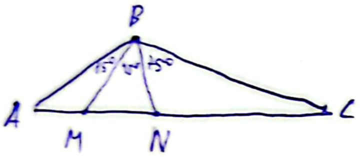
рассадить 3 мальчиков по оставшимся 5 местам – $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$ вариантов

посадить учительницу на одно из оставшихся 2 мест – 2 варианта

Всего способов: $6 \cdot 120 \cdot 60 \cdot 2 = 86400$

Ответ: 86400

Задача 5.



Если порядок точек на прямой AC: (A,N,M,C), то $\angle ABM = \angle ABN + \angle NBM$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow 15^\circ = \angle ABN + 45^\circ \Rightarrow \angle ABN = 15^\circ - 45^\circ = -30^\circ < 0^\circ$ ${\it W}$ $\Leftarrow$

$\Rightarrow$ Порядок точек на прямой AC: (A,M,N,C). $\Rightarrow \angle ABC = 15^\circ + 45^\circ + 75^\circ = 135^\circ$

$$\frac{S_{ABM}}{\sin 15^\circ} \cdot \frac{S_{NBC}}{\sin 75^\circ} = \frac{1}{2} AB \cdot BM \cdot \frac{1}{2} \cdot BN \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \frac{1}{2} BM \cdot BN = \frac{S_{ABC}}{\sin 135^\circ} \cdot \frac{S_{MBN}}{\sin 45^\circ} \; ; S_{ABM} \cdot S_{NBC} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABC} \cdot S_{MBN} = \frac{3 \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 135^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ} = \frac{3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \underline{2 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \sin 30^\circ} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{NBC} + S_{BMN} = 5 + S_{BMN} \Rightarrow S_{BMN} = S_{ABC} - 5$ $\quad (S_{ABC} = S > 0)$

$S(S-5) = 6$; $S^2 - 5S - 6 = 0$; $(S-6)(S+1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} S = 6 \\ S = -1 < 0 \times \end{array}\right. \Rightarrow S = 6$

Ответ: 6

Задача 6.

a_i – объём воды в i-ый день после закачивания воды.

$a_1 = 7$; $a_{i+1} = \frac{a_i}{2} + 5$

Докажем, что $(\forall i \in \mathbb{N} : a_i < 10)$ по индукции:

база: $a_1 = 7 < 10$

шаг $(i \to i+1)$: по предположению индукции $a_i < 10$, тогда $a_{i+1} = \frac{a_i}{2} + 5 < \frac{10}{2} + 5 = 10 \Rightarrow a_{i+1} < 10$, доказано

Пусть $b_i = 10 - a_i$; $b_1 = 10 - 7 = 3$; $a_{i+1} = \frac{a_i}{2} + 5 \Rightarrow 10 - b_{i+1} = \frac{10 - b_i}{2} + 5 = 10 - \frac{b_i}{2} \Rightarrow b_{i+1} = \frac{b_i}{2}$

$a_i \geq 10 \cdot \frac{99{,}9}{100} = 9{,}99 \Leftrightarrow b_i \leq 10 - 9{,}99 = 0{,}01$; $\min i : b_i \leq 0{,}01$ – ?

$b_{i+1} = \frac{b_i}{2} < b_i \Rightarrow b_i$ – монотонно убывает

Докажем, что $(\forall i \in \mathbb{N} : b_i = \frac{3}{2^{i-1}})$ по индукции:

база: $b_1 \cancel{=3} = \frac{3}{2^{1-0}} = \frac{3}{1} = 3$ – истинно

шаг $(i \to i+1)$: по предположению индукции $b_i = \frac{3}{2^{i-1}}$, тогда $b_{i+1} = \frac{b_i}{2} = \frac{3}{2^{i-1} \cdot 2} = \frac{3}{2^i} = \frac{3}{2^{(i+1)-1}}$ – доказано

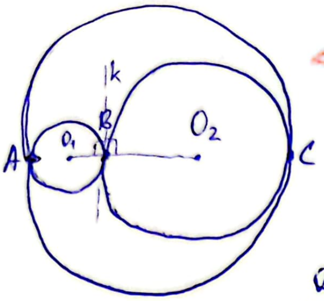
$\frac{3}{2^{i-1}} \leq 0{,}01 \Leftrightarrow 300 \leq 2^{i-1}$; $i = 9$: $300 \leq 2^{9-1} = 256$ – неверно; $i = 10$: $300 \leq 2^{10-1} = 512$ – верно

Ответ: a) 10 $\quad$ b) 10

95-34-45-67 (38.2)

Черновик

Задача 7.



O_1B и O_2B — радиусы, проведённые в точку касания с общей касательной $\Rightarrow$

$\Rightarrow O_1B \perp k$, $k \perp O_2B \Rightarrow O_1, B, O_2$ — лежат на одной прямой

Обе дуги $\overset{\frown}{AB}$ равны $\Rightarrow AB$ — диаметр $\Rightarrow O_1 \in [AB] \Rightarrow A, O_1, B, O_2$ — на одной прямой

Обе дуги $\overset{\frown}{BC}$ равны $\Rightarrow BC$ — диаметр $\Rightarrow O_2 \in [BC] \Rightarrow A, B, C$ — лежат на одной прямой

Обе дуги $\overset{\frown}{AC}$ равны $\Rightarrow AC$ — диаметр

l_{AB} — длина окружности с диаметром $AB = \pi \cdot AB$

Аналогично, $l_{BC} = BC \cdot \pi$ и $l_{AC} = AC \cdot \pi$

$l_{AB} + l_{BC} = \pi \cdot AB + \pi \cdot BC = \pi(AB+BC) = \pi \cdot AC = l_{AC} \Rightarrow \frac{l_{AB}}{2} + \frac{l_{BC}}{2} = \frac{l_{AC}}{2}$

По условию $\frac{l_{AB}}{2} = 15$ км; $\frac{l_{BC}}{2} = 25$ км $\Rightarrow \frac{l_{AC}}{2} = 15+25 = 40$ км

Пусть x — кол-во раз, которое автомобиль прошёл любую из дуг $\overset{\frown}{AB}$, y — кол-во раз, которое автомобиль прошёл любую из дуг $\overset{\frown}{BC}$, z — кол-во раз, которое автомобиль прошёл любую из дуг $\overset{\frown}{AC}$.

Представим путь автомобиля как граф, вершинами которого являются точки A, B, C, а рёбрами — дуги, проведённые между соответствующими вершинами.

Тогда x — кратность ребра AB, y — кратность ребра BC, z — кратность ребра AC

Путь автомобиля является циклом, проходящим по каждому ребру ровно 1 раз, начало и конец которого совпадают $\Rightarrow$ степень каждой вершины чётна

$\deg A = x+z \vdots 2$; $\deg B = x+y \vdots 2$; $\deg C = y+z \vdots 2$

По условию: $7x+11y+17z = 85$; $\cancel{x+y+z}$

$7x+11y+17z \equiv 85 \pmod 2$; $7 \equiv 1$; $11 \equiv 1$; $17 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow 7x+11y+17z \equiv x+y+z \equiv 1 \equiv 85 \pmod 2 \Rightarrow x+y+z \not\vdots\, 2$

Если $x \vdots 2$, то $z \vdots 2$ (т.к. $x+z \vdots 2$) и $y \vdots 2$ ($x+y \vdots 2$) $\Rightarrow x+y+z \vdots 2$ W

Следовательно, $x \not\vdots\, 2 \Rightarrow y \not\vdots\, 2$ (т.к. $x+y \vdots 2$) и $z \not\vdots\, 2$ (т.к. $x+z \vdots 2$) $\Rightarrow x \not\vdots\, 2$, $y \not\vdots\, 2$, $z \not\vdots\, 2 \Rightarrow x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$

$x > 0; y > 0; z > 0 \Rightarrow 7x < 85 \Rightarrow x < \frac{85}{7} < 13 \Rightarrow x \leq 12$; $x \neq 12 \Rightarrow x \leq 11$

$11y < 85 \Rightarrow y < \frac{85}{11} < 9 \Rightarrow y \leq 8$

$17z < 85 \Rightarrow z < \frac{85}{17} = 5 \Rightarrow z \leq 4$; $z \neq 4 \Rightarrow z \leq 3 \Rightarrow z \in \{1;3\}$

1) $z=1$: $7x+11y = 85-17\cdot1 = 68 = 35+33 = 7\cdot5+11\cdot3 \Rightarrow 7(x-5) = 11(3-y) \vdots 11$, НОД$(7;11)=1 \Rightarrow x-5 \vdots 11$

$x \in [1;11]$, $x \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow x=5 \Rightarrow y = \frac{7(5-5)}{11} = 0 \Rightarrow y=3$ $\quad x=5; y=3; z=1$

Пример пути: $A \to B \to A \to B \to A \to B \to C \to B \to C \to A$

Длина пути: $5\cdot15+3\cdot25+1\cdot40 = \boxed{190}$

2) $z=3$: $7x+11y = 85-17\cdot3 = 34 = 56-22 = 7\cdot8-11\cdot2 \Rightarrow 11(y+2) = 7(8-x) \Rightarrow$ (НОД$(7;11)=1$) $y+2 \vdots 7$

$0 < 11y \leq 34 \Rightarrow y \leq \frac{34}{11} < 4 \Rightarrow y < 3$; $y \not\vdots\, 2 \Rightarrow y \in \{1;3\}$ $\quad 1+2 \not\vdots\, 7$, $3+2 \not\vdots\, 7$ — решений нет в данном случае

Ответ: 190 км