

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант _____

Место проведения Москва
город

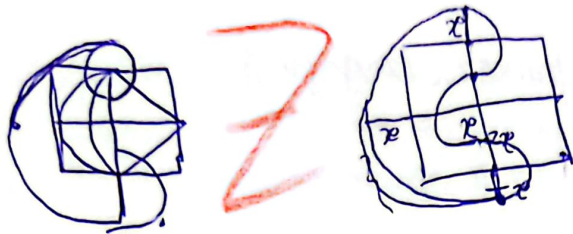
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников «Ломоносов»
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Субботина Михаила Максимовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
19-46-16-16	80	12	8	12	12	12	12	12	0



Черновик

80 (Всего баллов)

~~Handwritten scribbles and marks~~

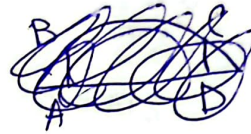
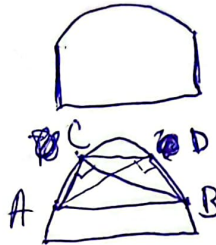
$$7A + 11K + 17L = 85$$

$$A + K = 2a$$

~~$$7A + 11K = 85$$~~

$$7A + 11K = 68$$

$$A = 5 \quad K = 3$$



840

$$\sin 30 = 2 \sin 15 \cos 15$$

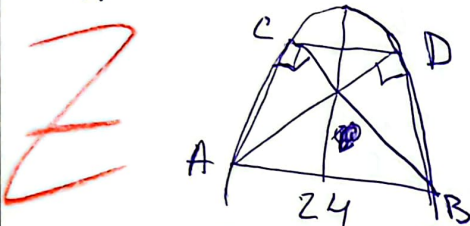
$$4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = x \sqrt{1-x^2}$$

$$120 \cdot x^2 - x^4 = \frac{1}{16}$$

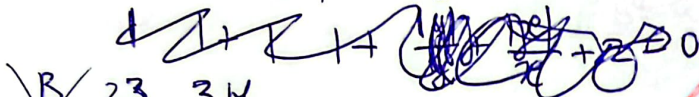
$$\frac{120}{840} \cdot 16x^4 - 16x^2 + 1 = 0$$

$$\frac{3}{2520} (4x^2 - 1)^2 = 0$$

$$x = \pm$$

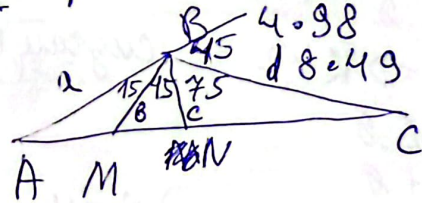
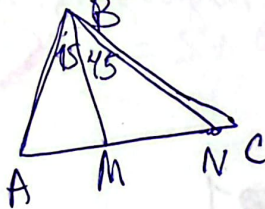


$$S(mn) = S(n)$$



$$\frac{23 \cdot 3H}{3B \cdot 53 \cdot 6H \cdot 3Y}$$

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 4)}{2} + \left(\frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 6 \cdot 5}{2} \right) + \frac{5 \cdot 3 + 2 \cdot 196}{4 \cdot 98}$$



$$\frac{ab \sin 15 + cd \sin 75}{2} = 5$$

$$\frac{abcd \sin 15 \sin 75}{2} = 3$$

$$\frac{\sqrt{ad}}{4} = ? \quad \frac{\sqrt{bc}}{4} = S_{MNB}$$

$$bc = \frac{4 \cdot 4 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} =$$

$$= 4 \sqrt{5} \left(\frac{6\sqrt{2}}{bc} - 5 \right)$$

$$\frac{6\sqrt{2}}{bc} = \frac{bc\sqrt{2}}{4} + 5$$

$$x^2 + 20x - 6\sqrt{2} = 0$$

$$D = 400 +$$

$$D = 200 + 96 = 296$$

$$bc = \sqrt{296}$$

$$bc = -100 \pm$$

$$bc = \frac{48}{bc} - 20\sqrt{2}$$

$$bc^2 + 20\sqrt{2}bc - 48 = 0$$

$$D = 800 + 192 = 992$$

Задача 6.

n - кат+во раз, которые авторобили проехали по дуге AC
 k - по дуге BC
 m - по дуге AB

$$m+k=2a, a \in \mathbb{Z}$$

$$7m+11k+17n=85$$

1) $n=0$

$$7m+11k=85$$

1.1) $m=0$ \emptyset

1.2) $m=1$ \emptyset

1.3) $m=2$ \emptyset

1.4) $m=3$ \emptyset

1.5) $m=4$ \emptyset

1.6) $m=5$ \emptyset

1.7) $m=6$ \emptyset

1.8) $m=7$ \emptyset

1.9) $m=8$ \emptyset

1.10) $m=9 \Rightarrow k=2$ - случай не подходит, т.к. $m+k \neq 2a$

1.11) $m=10$ \emptyset

1.12) $m=11$ \emptyset

4) $n=3$

$$7m+11k=34$$

4.1) $m=0$ \emptyset

4.2) $m=1$ \emptyset

4.3) $m=2$ \emptyset

4.4) $m=3$ \emptyset

4.5) $m=4$ \emptyset

$n=1; m=5; k=3 \Rightarrow$ длина = $\overset{\sim}{AC} + 5\overset{\sim}{AB} + 3\overset{\sim}{BC} =$

$R_{AB} = \overset{\sim}{AB}/\pi; R_{AC} = \overset{\sim}{AC}/\pi$

$R_{AC} = R_{AB} + R_{BC} = \frac{AB+BC}{\pi}$

$\overset{\sim}{AC} = \overset{\sim}{AB} + \overset{\sim}{BC}$

$= 6\overset{\sim}{AB} + 4\overset{\sim}{BC} = 190$

Ответ: 190

2) $n=1$

$$7m+11k=68$$

2.1) $m=0$ \emptyset

2.2) $m=1$ \emptyset

2.3) $m=2$ \emptyset

2.4) $m=3$ \emptyset

2.5) $m=4$ \emptyset

2.6) $m=5 \Rightarrow k=3$ - подходит

2.7) $m=6$ \emptyset

2.8) $m=7$ \emptyset

2.9) $m=8$ \emptyset

2.10) $m=9$ \emptyset

3) $n=2$

$$7m+11k=51$$

3.1) $m=0$ \emptyset

3.2) $m=1$ $n=4$ - не подходит, $m+k \neq 2a$

3.3) $m=2$ \emptyset

3.4) $m=3$ \emptyset

3.5) $m=4$ \emptyset

3.6) $m=5$ \emptyset

3.7) $m=6$ \emptyset

5) $n=4$

$$7m+11k=1$$

5.1) $m=0$ \emptyset

5.2) $m=1$ \emptyset

~~5.3) $m=2$ \emptyset~~

~~5.4) $m=3$ \emptyset~~

Задача 1

Рассмотрим 3 случая: когда замчатников выбрали только из защитников; только из универсалов; одного из защитников, другого из универсалов, а затем просуммируем кол-во способов

~~n_1, n_2, n_3~~ n_1, n_2, n_3 - кол-во способов в 3-х случаях

$$1) n_1 = 3 \cdot \left(5 \cdot 4 / 2 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} \right) = 2520$$

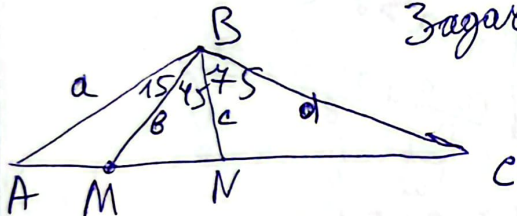
$$2) n_2 = 3 \cdot \left(3 \cdot 2 / 2 \cdot \frac{4 \cdot 6 \cdot 5}{6} \right) = 315$$

$$3) n_3 = 3 \cdot \left(3 \cdot 5 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \right) = 2520$$

Получ. = 5355

Ответ: 5355.

Задача 4.



$AB = a; BM = b; BN = c; BC = d$

$$\frac{ab \sin 15 + cd \sin 75}{2} = 5$$

$$\frac{ab \sin 15 - cd \sin 75}{4} = 3$$

~~$S_{ABC} = ad \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{12\sqrt{2}}{bc}$~~

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{MBC} + S_{MBN} = 5 + bc \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{12\sqrt{2}}{bc} = 5 + bc \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$bc^2 + 10\sqrt{2}bc - 48 = 0$$

$$D = 200 + 192 = 392 = (14\sqrt{2})^2$$

$$bc = \frac{-10\sqrt{2} \pm 14\sqrt{2}}{2} = -12\sqrt{2}; 2\sqrt{2} \quad bc > 0 \Rightarrow bc = 2\sqrt{2}$$

~~$S_{ABC} = \frac{12\sqrt{2}}{bc} = 6$~~

Ответ: 6.

Черновик

$$\vec{AC} = (x_1 - x_2; \frac{x_1^2 + x_2^2}{8})$$

$$\vec{CB} = (x_1 + x_2; \frac{x_2^2 - x_1^2}{8})$$

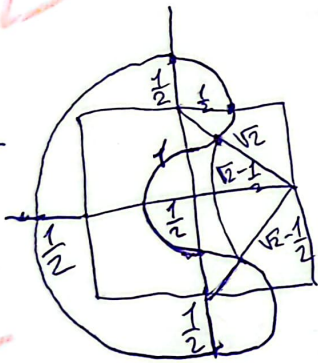
$$x_1^2 - x_2^2 + \frac{x_2^4 - x_1^4}{64} = 0$$

$$-1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{64} = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 64$$

6+6-

21
21
21
42
441



$$2 + \frac{1}{4} - \sqrt{2}$$

$$\frac{9}{8}\pi + \frac{3}{16}\pi + 1 - \frac{9}{16}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

$$\frac{3}{4}\pi$$

$$|x| + 1 + \frac{|y|}{8} - \frac{|x|}{x} + 2 = 0$$

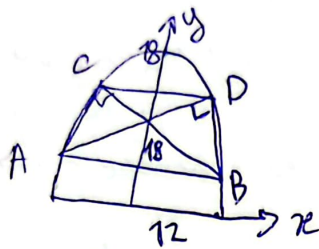
$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = -19$$

$$(x+y)xy = -6 \quad -6\left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}\right) = -19$$

$$b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 - a^2bc - b^2ac - c^2ab$$

$$a^2(c^2 - bc) + b^2(c^2 - ac) + c^2(a^2 - ab)$$

$$c^2(a^2 - ab) + b^2(c^2 - ac) + a^2(b^2 - bc)$$



$$|\vec{AC}| = 1$$

$$\frac{|y|}{8} - \frac{|x|}{x} + 2 = 0$$

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{8} = h$$



$$\frac{bc - a^2}{a} + \frac{ac - b^2}{b} + \frac{ab - c^2}{c}$$

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + 3 - a - b - c$$

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \vee a + b + c$$

$$\frac{9}{16} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

~~$$b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 - a^2bc - b^2ac - c^2ab$$~~

~~$$a^2(c^2 - bc) + b^2(c^2 - ac) + c^2(a^2 - ab)$$~~

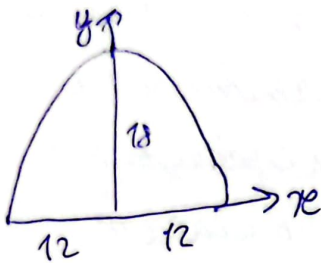
z

z

z

z

Задача 7.



$$y = a - bx^2$$

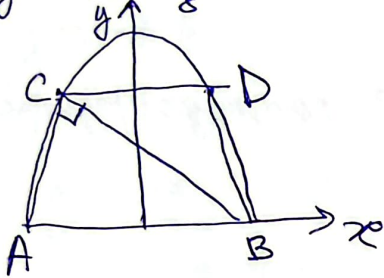
$$x = 0$$

$$y = a \Rightarrow a = 18$$

$$y = 0$$

$$x^2 = \frac{18}{b} = 144 \Rightarrow b = \frac{1}{8}$$

$$y = 18 - \frac{x^2}{8}$$



$$Bx = x_1; Dx = x_2$$

$$B(x_1; 18 - \frac{x_1^2}{8})$$

$$D(x_2; 18 - \frac{x_2^2}{8})$$

$$A(x_1; 18 - \frac{x_1^2}{8})$$

$$C(-x_2; 18 - \frac{x_2^2}{8})$$

$$\vec{AC} = (x_1 - x_2; \frac{x_1^2 - x_2^2}{8})$$

$$\vec{CB} = (x_1 + x_2; \frac{x_2^2 - x_1^2}{8})$$

$$(\vec{AC}, \vec{CB}) = x_1^2 - x_2^2 - \frac{(x_1 - x_2)^2}{64} = 0$$

$$x_1^2 \neq x_2^2$$

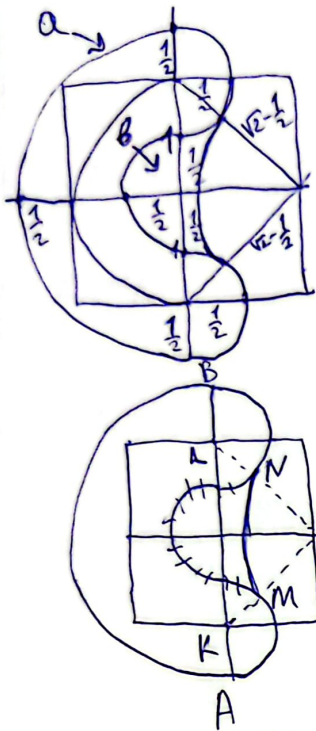
$$1 - \frac{x_1^2 - x_2^2}{64} = 0$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 64$$

$$C_y - A_y = \frac{x_1^2 - x_2^2}{8} = 8$$

Ответ: 8.

Задача 2



Фигура а - фигура, появившаяся от ~~левого~~ полушарика с радиусом 1
 в - часть фигуры, появившейся от полушарика с радиусом $\sqrt{2}$, которая ~~не~~ лежит вне фигуры а

- полушарика фигура

часть фигуры левее ~~AB~~ AB - полушарик с радиусом 1.5

$$S = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{2 \cdot 25\pi}{2}$$

$$S_{BLN\#} = S_{AKM} = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3\pi}{32}$$

$$S_{KLC} - S_{CMN} = 1 - \pi \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2 / 4 = 1 - \pi \left(\frac{9}{16} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$S_{общ.} = \frac{2 \cdot 25\pi}{2} + 2 \cdot \frac{3\pi}{32} + 1 - \pi \left(\frac{9}{16} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \pi \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1$$

Ответ: $\pi \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1$

Задача 3

$$|x^3 + y^3 - 19| + |x^2y + xy^2 + 6| + \frac{|x|y| - y|x| + 2xy}{xy} = 0 \quad x \neq 0; y \neq 0$$

$$|x^3 + y^3 - 19| + |x^2y + xy^2 + 6| + \frac{|y|}{y} - \frac{|x|}{x} + 2 = 0$$

$$|x^3 + y^3 - 19| \geq 0; |x^2y + xy^2 + 6| \geq 0 \Rightarrow \frac{|y|}{y} - \frac{|x|}{x} \leq -2 \Rightarrow \frac{|y|}{y} - \frac{|x|}{x} = -2$$

$$y \leq 0; x \geq 0$$

$$|x^3 + y^3 - 19| + |x^2y + xy^2 + 6| = 0$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ x^2y + xy^2 = -6 \end{cases}$$

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 19$$

$$(x+y) \cdot xy = -6$$

$$x+y = -\frac{6}{xy}$$

$$-\frac{6}{xy} (x^2 + xy + y^2) = 19$$

$$\frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x} = -\frac{19}{6}$$

$$x/y = t$$

$$t^2 + \frac{13}{6}t + 1 = 0$$

$$t^2 + \frac{13}{6}t + 1 = 0$$

$$D = \frac{169 - 144}{36} = \frac{25}{36}$$

$$t = \frac{-\frac{13}{6} \pm \frac{5}{6}}{2} = -\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{3}{2}y; -\frac{2}{3}y$$

$$1) (-\frac{3}{2}y + y) \cdot -\frac{3}{2}y^2 = -6$$

$$y^3 = -8 \Rightarrow y = -2; x = 3$$

$$2) (-\frac{2}{3}y + y) \cdot \frac{2}{3}y^2 = -6$$

$$-\frac{2}{3}y^3 = -6$$

$$y = 3; x = -2$$

Проверка: $y = 3; x = -2$

$$|27 - 8 - 19| + |-18 + 12 + 6| + \frac{-6 - 6 + 12}{-6} \neq 0 \Rightarrow \text{Эти корни не подходят}$$

Для $y = -2; x = 3$

$$|27 - 8 - 19| + |-18 + 12 + 6| + \frac{6 + 6 - 12}{-6} = 0 \Rightarrow \text{Корни подходят}$$

Ответ: $x = 3; y = -2$

Задача 5

$$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ca - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c} = , a, b, c > 0$$

$$= \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c + 3$$

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c \Rightarrow 3 - \text{минимум, достигается при } a = b = c$$

Ответ: 3

Черновик

$$\frac{be}{a} + \frac{ae}{b} + \frac{ab}{c} \sqrt{a+b+c}$$

~~$$\frac{a^2 - ax - ay + xy}{a} + \frac{a^2 - ax}{a-x} + \frac{a^2 - ay}{a-y}$$~~

~~$$\frac{a^2 - ax - ay + xy}{a} + \frac{a^2 - ax}{a-x} + \frac{a^2 - ay}{a-y}$$~~

~~$$\frac{a^2 - ax - ay + xy}{a} + \frac{a^2 - ax}{a-x} + \frac{a^2 - ay}{a-y}$$~~

$$\frac{a^2 - ax - ay + xy}{a} + \frac{a^2 - ax}{a-x} + \frac{a^2 - ay}{a-y}$$

$$-x - y + \frac{xy}{a} + a \left(\frac{a-x}{a-y} + \frac{a-y}{a-x} \right) \sqrt{b+c}$$

~~$$\frac{2a^2 - 2ax - 2ay + x^2 + y^2}{(a-x)(a-y)}$$~~

