0 573292 270005

57-32-92-27
(40.10)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

+1 лист

Вариант 15

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Такаева Дениса Руслановича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«28» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	±	+	−	−	+	−	56
12	12	8	12	0	0	12	0	

56 (пятьдесят шесть) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

57-32-92-27 (40.10)

Черновик

1Др
7д
3Н

3Вр
4З
7Н
3Ун.

1Вр. 3З

C_3^1 ·

Случаи:

180+30

1) 0ун.

$C_4^2 \cdot C_7^3 = 35 \cdot 6 = 210$

2) 1ун. Н.

$C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^2 = 3 \cdot 6 \cdot 21 = 378$

21 × 18 = 168, 21, 378

3) 1ун. З

$C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_7^3 = 3 \cdot 4 \cdot 35 = 420$

4) 2ун 3-3

$C_3^2 \cdot C_7^3 = 3 \cdot 35 = 105$

5) 2ун. Н-Н

$C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot C_7^1 = 3 \cdot 6 \cdot 7 = 126$

21·6 = 126

5) 2ун. З-Н

$C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_4^1 \cdot C_7^2 = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 21 = 504$

24 × 21 = 24, 504

6) 3ун.

6) $C_4^2 = 6$.

7) $C_3^2 \cdot \cancel{C_2^1} \cdot C_4^1 \cdot C_7^1 = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$.

8) $C_3^2 \cdot C_7^2 = 3 \cdot 21 = 63$

12·7 =

221
1896
× 3
5688 | 3
-3 | 1896
26
-24
28
-27
18

63 × 8 = 504

$\frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}$

$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

35·4 =

$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

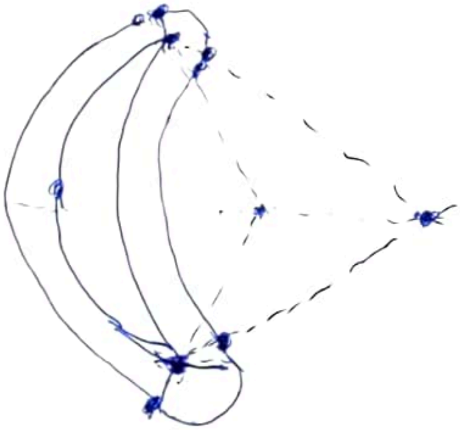
$C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$

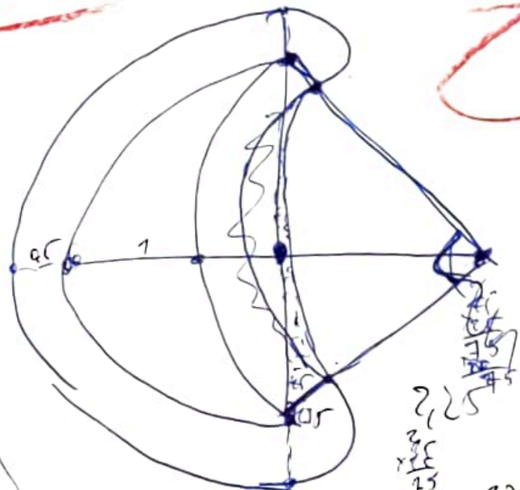
$C_7^1 = 7$

588 1008 = 1113
-420
588

1744 + 84 = 1833
1833 + 63 = 1896

= 1113 + 126 = 1239 =
= 1743 = 1749 =
= 1833



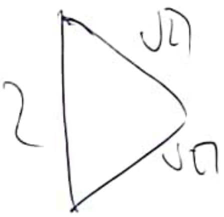


$\sqrt{2}-0,5$

$\boxed{\dfrac{\pi\cdot(1,5)^2}{2}} = \dfrac{\pi}{4}\cdot 2\cdot 1,5^2 = \dfrac{\pi}{4}\cdot 4,5$

2,25

$2,25\cdot 2 = 4,5$



$4 = 1+1-2\cdot\cos L$

90° $\cos L = $

$\dfrac{\pi R^2}{4} = \dfrac{\pi(\sqrt{2}-0,5)^2}{4}$

$S_{ш} = \boxed{1-\dfrac{\pi(\sqrt{2}-0,5)^2}{4}}$

$\dfrac{135}{360} = \dfrac{S_{сек}}{S_{кр}}$

?.

$S_{сек} = \dfrac{45\cdot 3}{45\cdot 8}\cdot S_{кр} = \dfrac{3}{8}S_{кр} = \boxed{\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{\pi\cdot 0,5^2}{4}}$

Черновик

588
1008
1113
1239
1743
1849
1853
1889

$+\begin{array}{r}1749\\84\\\hline 1833\end{array}$ $+\begin{array}{r}1113\\126\\\hline 1239\end{array}$

$+\begin{array}{r}1833\\63\\\hline 1896\end{array}$ $+\begin{array}{r}1839\\84\\\hline 1923\end{array}$

$\times\begin{array}{r}1896\\3\\\hline 5688\end{array}$

57-32-92-27
(40.10)

Задача 1

Кол-во способов выбрать вратаря — C_3^1

Рассм. 10 случаев возможных случаев выбора универсалов и подсчитаем кол-во способов выбрать 2-ух защитников и 3-ёх нападающих.

Пусть 1 скобка - кол-во способов выбрать универсала, 2 — кол-во сп. выбрать защитника, 3-кол-во способов выбрать нападающего

Чистовик

1) 0 универсалов
$(1)\cdot(C_4^2)\cdot(C_7^3)=210$

2) 1 универсал - нап.
$(C_3^1)\cdot(C_4^2)\cdot(C_7^2)=378$

3) 1 универсал - защ
$(C_3^1)\cdot(C_4^1)\cdot(C_7^3)=420$

4) 2унив. защитники
$(C_3^2)\cdot(1)\cdot(C_7^3)=105$

5) 2 унив. нападающих
$(C_3^2)\cdot(C_4^2)\cdot(C_7^1)=126$

6) 1унив. - нап.
1унив - защ
$((C_3^1)\cdot(C_2^1))\cdot(C_4^1)\cdot(C_7^2)=504$

7) 3ун. - защ ∅

8) 3ун. - нап.
$(1)\cdot(C_4^2)\cdot(1)=6$

9) 2ун. - нап.
1ун. - защ.
$(C_3^2)\cdot(C_4^1)\cdot(C_7^1)=84$

10) 1ун. - нап
2ун. - защ
$C_3^2\cdot(1)\cdot C_7^2=63$

1

Суммарное всё кол-во способов выбрать защитника и нап. = 1896

Чистовик

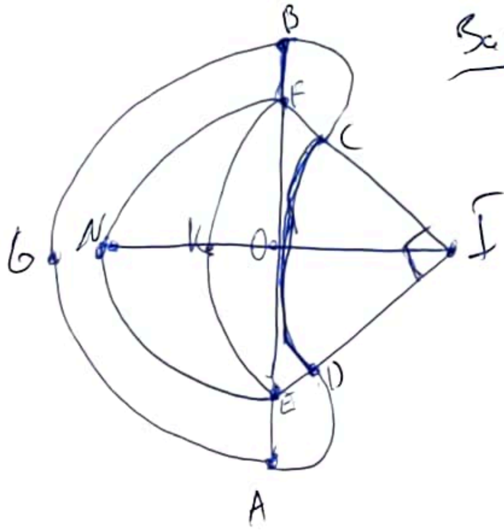
Всего: $C_3^1 \cdot 1896 = 3 \cdot 1896 = 5688$

Ответ: 5688

2

Задача 2 Чистовик

3



Т.к. каждая точка полумесяца превратилась в окр-ть радиуса 0,5, то получившаяся фигура имеет вид:
полуокружности GAB, ~~сектора окр-ти BFC~~ и (появившийся из-за дуги FNE), сегментов окр-тей BFC и AED (появившихся из-за т. F и E соответственно) и и участка FEDC (появившегося из-за дуги FEK).

$S_{BAG} = \frac{\pi \cdot R^2}{2} =$ $R = ON + NG = 1 + 0,5 = 1,5$

$= \frac{\pi \cdot 1,5^2}{2}$

$S_{BFC} = S_{AED} = \pi R^2 \cdot \frac{\angle BFC}{360°}$

$\angle BFC = 180° - \angle OFI = 135°$ $R_2 = IK - OK = KI - OK = \sqrt{2} - 0,5$

$S_{BFC} = S_{AED} = \pi R^2 \cdot \frac{45° \cdot 3}{360°} = \frac{3}{8}\pi \cdot (0,5)^2$

$S_{FEDC} = S_{EFI} - S_{сектора\ CDI} =$

$= \frac{2}{2} - \pi R_2^2 \cdot \frac{90°}{360°} = 1 - \frac{\pi(\sqrt{2} - 0,5)^2}{4}$

$S = \frac{\pi \cdot 1,5^2}{2} + \frac{3}{4}\pi \cdot 0,5^2 \cdot 2 - \frac{\pi \cdot 2,25 - \pi\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{4}(4,5 + 0,75 - 2,25 + \sqrt{2}) + 1$

$= \frac{\pi}{4}(3+\sqrt{2})+1 = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + 1$ Чистовик

Ответ. $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + 1$

4

$S(n)$

Черновик

$S(mn) = S(n)$ mod 9

$mn \equiv n$

$n = 0$

$999\ldots99$

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times\ 2 \\ \hline 198 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 99 \\ \times\ 99 \\ \hline 891 \\ 891\ \\ \hline 9801 \end{array}$$

$$\underbrace{99\ldots9}_{90} = \underbrace{1000\ldots0}_{91} - 1 =$$

$n \cdot \underbrace{10000\ldots0}_{91} - k$

Чистовик Задача 7

9

Число $\underbrace{99\ldots9}_{90}$ – подходит, оно не является максимальным ~~9~~ девятизначным числом

Покажем, почему условие выполняется

$\underbrace{99\ldots9}_{90} = \underbrace{100\ldots0}_{90} - 1$

Рассмотри $\underbrace{99\ldots9}_{90} \cdot m$, где $1 \leq m \leq 9$

Пусть m имеет вид $a_1 \cdot 10^{89} + a_2 \cdot 10^{88} + \ldots$

$+ \ldots a_{90}$ $a_1, a_2 \ldots a_{90} \geq 0, \in \mathbb{Z}$

Тогда $100\ldots0 \cdot (a_1 \cdot 10^{89} + a_2 \cdot 10^{88} + \ldots + a_{90}) =$

$= a_1 \cdot 10^{90+89} + a_2 \cdot 10^{90+88} + \ldots + a_{90} \cdot 10^{90}$

Тогда

$\underbrace{99\ldots9}_{90} \cdot m = a_1 \cdot 10^{90+89} + a_2 \cdot 10^{90+88} + \ldots + a_{90} \cdot 10^{90} -$

$- a_1 \cdot 10^{89} - a_2 \cdot 10^{88} - \ldots - a_{90}$

~~Тогда разряд числа в 10~~

Значит цифра стоящее в разряде числа 10^{90+89} и цифра в 10^{89} дают в сумме 9 (a_1 и $9 - a_1$), аналогично для остальных $a_n \cdot 10^{90+90-n}$ значит ~~в~~ сумма цифр такого числа равна $9 \cdot 90$, что равно сумме цифр $\underbrace{99\ldots9}_{90}$ ч.т.д. Ответ: $\underbrace{99\ldots9}_{90}$

$f(x) = f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \frac{-2}{y+2}$

$\frac{x-2}{}$

$f(0) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -3$

$\frac{x-2}{x+2} = y$ $\quad \frac{x+2-4}{x+2} = y$

$1 - \frac{4}{x+2} = y$

$\frac{4}{x+2} = 1-y$

$f^{-1}(f(f(f\ldots f(y))))) =$ $\quad x = \frac{4}{1-y} - 2$

$= \cancel{\frac{-2}{f(f(f+\ldots))) + 2}} - 2$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = x^{-1} = -\frac{1}{x^2}$

$f(y) = \frac{-2}{\frac{4}{1-y} - 2} =$

$\left(\frac{-2}{f(f(y)) + 2} + 2\right)\left(f(y) + 2\right) =$

$= \frac{-2+2y}{4-2+2y}$

$\cancel{2f(f(y)) + 2}$

$\frac{(2f(x)+2)\cancel{(f(x)+2)}}{\cancel{f(x)}+2} = \cancel{2f(x+2)}$ $\quad = \boxed{\frac{2y-2}{2+2y}}$

$2f(x) + 2$

$\frac{y-1}{y+1}$

$\cancel{\frac{-2}{f(y)+2}} \left(\frac{2f(y)-2}{2+2f(y)} + 2\right)$ $\quad \frac{-1}{0} = -1 \quad \frac{-2}{0}$

$f(f(f(x))) =$ $\quad \frac{-3}{-1} = 3$

$\frac{t-1}{t+1} = t$ $\quad f(-1) = -2$

$\left(\frac{t-1}{t+1}\right)' = 1 - \frac{2}{t+1} = +2 \cdot \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{2}{t^2+2t+1} = t$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задача 5 Чистовик

10

$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$

$\frac{x-2}{x+2} = t$ $1-\frac{4}{x+2} = t$ $x = \frac{4}{1-t} - 2$

$f(t) = -\frac{2}{\frac{4}{1-t}-2} = \frac{-2+2t}{4-2+2t} = \frac{2t-2}{2+2t} = \frac{t-1}{t+1}$.

При $t \neq -1$

$g(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{11}$

$f(-1) = -2$

$f(f(0)) = -2$

$g'(x) = f'(\underbrace{f \ldots f(x)}_{11}) \cdot f'(\underbrace{f \ldots f(x)}_{10}) \cdot \ldots \cdot f'(x)$

Черновик

$y(x-1)+2(x-1)$

$(y+2)(x-1)\ |y-x-10|=(x-4)$

$|xy+2x-y-2|$

$(y+2)(x-1)$

$y\geq 5$

1) $x\geq 1$

$|y-x-10|=x-4$

$x\geq 4$

$y-x+8=$

$=y^2-10y+25$

$x=-y^2+11y-$

-17

$y\geq 5$

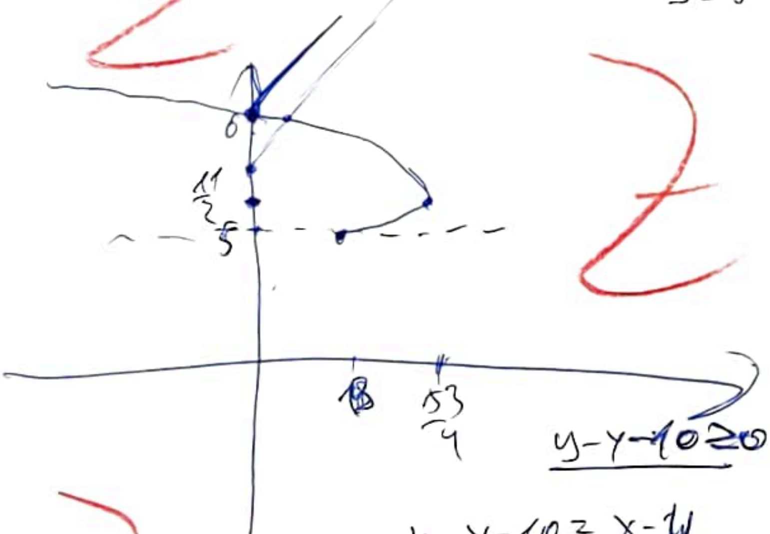
$\frac{-b}{2a}=\frac{-11}{-2a}=\frac{11}{2}$

$-\frac{121}{4}+\frac{121}{2}-17=$

$=\frac{121}{4}-17=$

$=\frac{121-68}{4}=$

$=\frac{53}{4}$



$y-x-10\geq 0$

$y-x-10=x-4$

$y\geq 10+x$ $y=2x+6$

$y=6$

$x=-25+55-17=$

$=-42=13$

$x=-y^2+11y-17$

$y-6=-2y^2+22y-34$

$2y^2-21y+28=0$

$D=442-4\cdot 2\cdot 28$

$y-x-10\leq 0$ $\varnothing$

$-y+x+10=x-4$

$y=14$

2) $x\leq 1$

$\varnothing$ $x=-196+154-17=$

$=-42-17=-59$

$|y-x-10|=4-x$

$y\geq x+10$

$y-10=4$ $y=14$ $x=-59$

$y\leq x+10$

$x-y+10=4-x$

$y=2x+6$ $x\geq 0$ $y\geq 6$

отв. $(-59;14)$; $(0;6)$

Черновик

$7k + 21b + 17c = 85$

$c = 5$ $\quad 85 = 5 \cdot 17$

$7k + 21b \underset{17}{\equiv} 0$ $\quad b < 4$

$7k + 4b \underset{17}{\equiv} 0$ $\quad 3; 2; 1$

$k = 1$
$k = 2$ ∅
$k = 3$

$7k + 4 \underset{17}{\equiv} 0$ $\quad 34$ $\quad 51$

$b = 3$

$7k + 63 + 17c = 85$

$7k + 17c = 22$

∅

$b = 2$

$7k + 17c = 85 - 42 = 43$

$c = 2$

$7k = 43 - 34 = 9$

$c = 1$

$7k + 17 = 43$

$k = ∅$ $\quad 17c \underset{7}{\equiv} 1$

$b = 1$

$7k + 17c = 85 - 21 = 64$

$c = 3$ $\quad 34$ $\quad 51$

$7k = 64 - 51 = 13$ $\quad 68 \underset{7}{\equiv} 5$

$c = 2$ $\quad 73 \underset{7}{\equiv} 3$

$7k = 64 - 34 = 30$

$c = 1$

$7k = 64 - 17 = 44$

$c = 5$

$k, b = 0$ ∅

$c = 4$

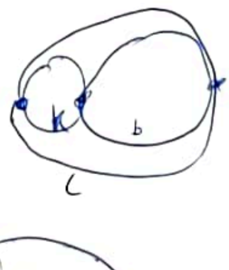
$7k + 11b = 17$

∅

$c = 3$

$7k + 11b = 34$ $\quad 23$ $\quad 12$

$k = 1$



$c = 2$

$7k + 11b = 51$

$b = 4$ $\quad k = 1$

$51 - 33 = 18$ $\quad b = 3$

$51 - 22 = 29$

$c = 1$

$7k + 11b = 68$

$b = 3$
$k = 5$

$c = 0$

$7k + 11b = 85$

$85 - 77 = 8$
$85 - 66 = 19$
30
41
52
63

$b = 2$

$k = 9$

Задача 3 Чистовик 15

$$\begin{cases}(xy+2x-y-2)\,|y-x-10| = (x-4)\,|xy+2x-y-2| \\ \sqrt{y-x+8} = y-5\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-1)(y+2)\,|y-x-10| = (x-4)\,|(x-1)(y+2)| \\ y \geq 5 \\ y - x + 8 = y^2 - 10y + 25\end{cases}$$

т.к. $y \geq 5$, то $y+2 > 0$

$$\begin{cases}x = -y^2 + 11y - 17 \\ (x-1)\,|y-x-10| = (x-4)\,|x-1|\end{cases}$$

1) Рассм. $x-1 \geq 0$

$|y-x-10| = x-4$

$x \geq 4$

а) Рассм. $y-x-10 \geq 0$

$y = 2x+6$

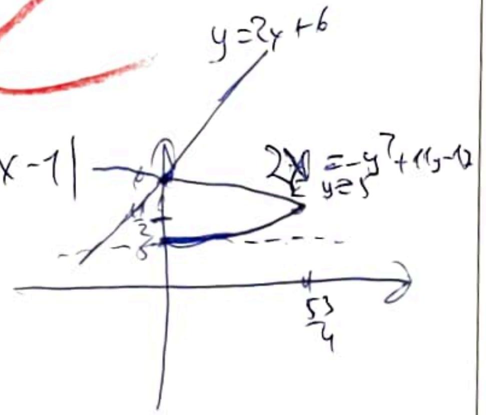
Корни: $x=0$; $y=6$, не подходят под условие $x \geq 4$

б) Рассм. $y-x-10<0$

$x+10-y = x-4$

$y = 14$

$x = -y^2+11y-17 = -59$, не подходит под $y-x-10<0$



2) $x-1<0$

$|y-x-10| = 4-x$

а) $y-x-10 \geq 0$

$y=14$ $x=-y^2+11y-17=-59$ – подходит под все условия

б) $y-x-10<0$

$x+10-y = 4-x$

$y = 2x+6$ из графика $x=0$; $y=6$ – подходят под все условия

Чистовик

1'

3) $x-1=0$

$\begin{cases} 1=-y^2+11y-17 \\ y \geq 5 \end{cases}$

$y^2-11y+18=0$

$D=121-4\cdot 18=121-72=49$

$y=\frac{\pm 7+11}{2}$ $\left[\begin{array}{l} y_1=9 \text{ - подходит} \\ y_2=2 \text{ - не подходит под } y\geq 5 \end{array}\right.$

Ответ: $(1;9)$, $(-59;14)$, $(0;6)$

6

7

Задача 4 Чистовик

Пусть дуги AB ~~автомобиль~~, BC и AC автомобиль проехал соответственно K, b, c раз

Тогда его время движения составило

$7K + 11b + 17c$

Тогда ~~и~~ выполнено по условию:

$7K + 11b + 17c = 85$

Рассм. случаи:

1) $c=5$
$K, b=0$ невозможно, т.к. автомобиль за нечётное кол-во проехавших дуг AC не сможет снова оказаться в т. A

2) $c=4$
$7K+11b=17$
а) $b=1$ $7K=6$
б) $b=0$ $7K=17$

3) $c=3$
$7K+11b=34$
1) $b=3$ $7K=1$
2) $b=2$ $7K=12$
3) $b=1$ $7K=23$
4) $b=0$ $7K=34$

4) $c=2$
$7K+11b=51$
Подходит ~~7K~~ $b=4$, $K=1$
Такой случай невозможен, т.к. автомобиль проедет AC ~~ровно 1 раз, т.к. проехал~~ по дугам AB и BC только 1 раз, т.к. $K=1$, ~~проехал~~ значит чтобы ~~единожды~~ вернуться в т. A автомобиль должен проехать AC по дугам AB и BC и сделать нечётное кол-во поездок по дугам AC, но $c=2$ значит этот случай не подходит.

5) $c=1$
$b=3$
$K=5$
Такой случай возможен. Автомобиль едет по окр-ти AB, ~~проехал~~ сделал 2 полных круга и 1 полукруг, оказываясь в т. B, затем

Чистовик

делает 1 полный круг и 1 полукруг по BC, оказываясь в т. C, затем делает ~~полный круг по AC~~ 1 полукруг по AC

б) $c=0$

$b=2$ Такой случай невозможен, т.к.

$k=9$ водитель обязан начать ехать по AB и ~~сделать полный круг по BC (т.к. $c=0$)~~ сделать k_1 полных кругов и 1 полукруг, затем сделать полный круг по BC, затем k_2 полных кругов и 1 полукруг по AB. То есть он должен проехать чётное кол-во полукругов, но $k=9$, значит такой случай невозможен

Итого: $k=5$; $b=3$; $c=1$

~~Суммарный путь равен:~~

$R_{AC} = R_{AB} + R_{BC}$

$\pi R_{AB} = 13$

$\pi R_{BC} = 21$ $\quad \pi R_{AC} = \pi R_{AB} + \pi R_{BC} = 34$

Суммарный путь равен:

$5 \cdot 13 + 3 \cdot 21 + 1 \cdot 34 = 65 + 63 + 34 =$

$= 162$

Ответ. 162

8