+1 Гриш
+1 ~~Я~~

0 072773 000006

07-27-73-00
(39.1)

дешифр

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант

Место проведения Г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Таранова Павла Игоревича

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
07-27-73-00	92	8	12	12	12	12	12	12	12

$S(mn) = S(n)$ и ЧЕРНОВИК

$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} \geq 2a$

$m = 10^{99} + 1$

$m = 1\underbrace{000}_{98}1$

$\cancel{S(9n)}$ $S(3n) = S(n)$

T_{11-1}

$\cancel{T_{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}$

T_{1-1-1}

$9n$

9

$\begin{array}{r} \times \ 23 \\ 9 \\ \hline 207 \end{array}$

297

9 81.

$\begin{array}{r} \times \ 81 \\ 23 \\ \hline 243 \\ 162 \\ \hline 1863 \end{array}$

2 $1 \cdot 1$

$\cancel{\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq a+b+c}$

$2+1$

$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq a+b+c$

Черновик

56×1

$10^{99}+1$

$n = \overline{aB}$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{n+a}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{B}$

$a = S(n+a)$

1. $a \le 8$

$\cancel{n+a}$

$(n+a) \bmod 10 \le 9$

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times\ 37 \\ \hline 693 \\ 297\ \ \\ \hline 3663 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times\ \ 9 \\ \hline 1089 \end{array}$$

99×11

$n+a = a \ldots \cdot 10^{99}$

$n+a = 1\,0 \ldots 0\ a-1$

$121 \cdot 9$

$\underbrace{9 \ldots 99}_{100}$

1000

1189

07-27-73-00
(39.1)

$S((10^{1000}-1)k) = S(\cancel{9\ldots}) 900$

Черновик

$S(10^{100} \cdot k - k)$

$k \le \cancel{9\ldots 10^{99}}\ 10^{100}-1$

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times\ 79 \\ \hline 891 \\ 693 \\ \hline 7821 \end{array}$$

$\cancel{0000000}$ $k = \underbrace{t}_{a}\underbrace{000}_{b}$

$k\ 00\ 000$

100

9,a

$\cancel{9000} - S(k)+1$

$\underbrace{k-1}\ \underbrace{999}_{100-len(k)}\ \underbrace{9}$

$$\begin{array}{r} 73700000000 \\ -\ 528900 \\ \hline 7369471100 \end{array}$$

24

22

$k = \underbrace{t}_{a}\ \underbrace{000}_{b}$

$\vec{CA} = (\cancel{\ }^{c-a}, a^2-c^2) = (c-a)\cdot(1, -a-c)$

$\vec{CB} = (a+c, a^2-c^2) =$

$=(a+c)\cdot(1, a-c)$

$\underbrace{t}_{a}\ \underbrace{000000}_{100+b}$

$1 - (a-c)^2 = 0$

$(a-c)^2 = 1$

$|a-c| = 1$

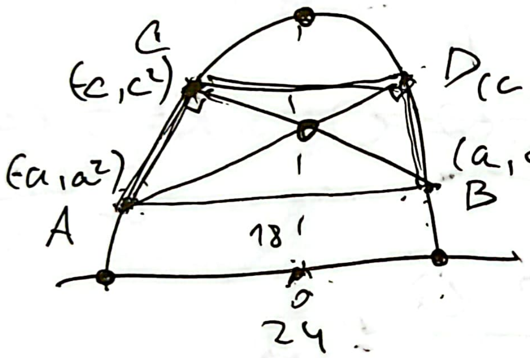
$\underbrace{t}_{a}\ \underbrace{\qquad\qquad}\ \underbrace{0001}_{b}$

$a \geq c$

$a - c = 1$

$a = c+1$

$a - bx^2 = 0$



$x^2 = \frac{a}{b}$

$x = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$

$2\sqrt{\frac{a}{b}} = 24$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = 12 \qquad \frac{a}{b} = 144$

$-bx^2 + a$

$a = 18$

$\frac{18}{b} = 144$

$\frac{1}{b} = 8 \qquad b = \frac{1}{8}$

$-\frac{1}{8}x^2 + 18$

$\vec{AC} = \cancel{(a-c, c^2-a^2)}$

$\vec{BC} = (a+c,$

$\frac{bc}{a} - a + 1$

3+

ЧЕРНОВИК

07-27-73-00 (39.1)

~~Зад~~ №8. Лист 1/12

Пусть $n = \underbrace{9\ldots9}_{100} = 10^{100}-1$

Очев. больше n не подойдет.

Док. что это и подходит.

Док. индукцией по m, что

$S(mn) = S(n)$, $1 \le m \le n = 10^{100}-1$

~~База: $m=1$ очев.~~

~~ИП: $S(mn) = S(n)$ $m \le n-1$~~

~~Переход:~~

~~Пусть $m = t000$~~ $m = t \cdot 10^{a}$

~~t - a-значное число~~

~~$t \not\vdots 10$~~

~~$S(m(10^{100}-1)) \overset{!}{=} S(10^{100}-1) = 900$~~

1. $m \not\vdots 10$

$S(mn) \overset{!}{=} S(n)$

$S(m(10^{100}-1)) \overset{!}{=} 900$

$m \cdot 10^{100} = m\underbrace{000\ldots0}_{100}$

$m \le 10^{100}-1 \Rightarrow m$ не более чем 100 значное число

Лист 2/12

№8.

Вычтем в столбик

$$\begin{array}{r} m\ \overbrace{0\,0\,0 \ldots\ldots 0}^{100} \\ -\quad a_{100} \ldots a_k \ldots\ldots a_1 \\ \hline \underbrace{m-1}\ \sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\ \underbrace{10-a_1} \end{array}$$

$m = \overline{a_{100} \ldots a_1}$

~~$k \leq 100$~~

$a_1 \neq 0$, т.к. $m \not\vdots 10$

возможны ведущие нули

в k-ом разряде будет $9 - a_k$

$$S(mn) = S(m-1) + 9 \cdot 99 + 10 - \underbrace{(a_1 + \ldots + a_{100})}_{S_m}$$

$$S(mn) = 900 + S(m-1) + 1 - S(m)$$

$m - 1 = \overline{a_{100} \ldots a_2 (a_1 - 1)}$, т.к. $a_1 \neq 0$

$\Rightarrow S(m-1) = S(m) - 1$

$S(mn) = 900 + S(m) - 1 + 1 - S(m) = 900$ ч.т.д.

2. $m = 10^{\alpha} \cdot m'$, $m' \not\vdots 10$, $\alpha \geq 1$

Уже доказано, что $S(m'n) = S(n)$

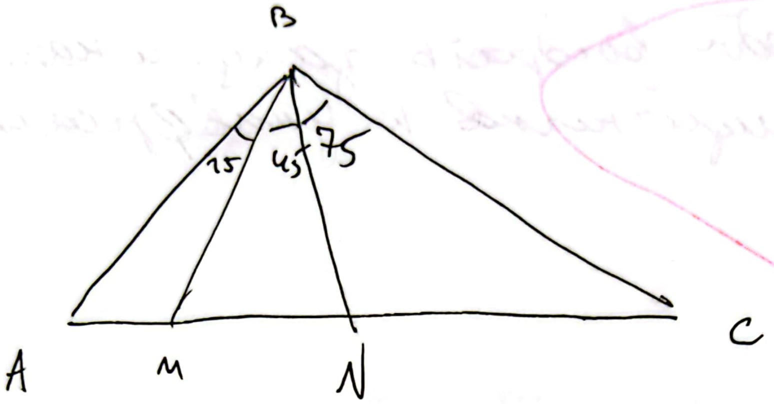
$mn = 10^{\alpha} \cdot m'n \Rightarrow S(mn) = S(m'n)$.

$\Rightarrow S(mn) = S(n)$ ч.т.д.

Ответ: $10^{100} - 1$

07-27-73-00 (39.1)

№4. Лист 7/12



Расположение точек такое, т.к.

$\angle ABM \le \angle BMN$.

$S_{ABM} = a$

$S_{BNC} = b$ $\quad S_{BMN} = x$

$a + b = 5 \quad ab = 3$

$$\frac{S_{ABN} \cdot S_{BMC}}{S_{ABC}} = \frac{(a+x)(b+x)}{a+b+x}$$

$\sin 60 \cdot \sin 120 = \sin ABN \cdot \sin MBC$

$$\frac{AB \cdot BN \cdot BM \cdot BC \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{AB \cdot BC \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}}$$

$\uparrow$ $\sin ABC$

$$BM \cdot BN \; \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} S_{BMN} = \frac{3}{2} x$$

$$\frac{3}{2} x = \frac{x^2 + (a+b)x + ab}{a+b+x}$$

$$\frac{3}{2} x (5 + x) = x^2 + 5x + 3$$

$$15x + 3x^2 = 2x^2 + 10x + 6$$

$x^2 + 5x - 6 = 0$

$(x+6)(x-1) = 0, \quad x > 0$

$x = 1. \Rightarrow S_{ABC} = a + b + x = 6$

ответ.

Лист 8/12

№1.

Посчитаем способы выбрать защ. и нап. если среди защитников k универсалов

~~1. k=0~~ $\cancel{C_5^2 \cdot \ldots}$

1. k=0

$$C_5^2 \cdot C_9^3 = \frac{5\cdot 4}{2}\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3!} = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$$

↑ защ. ↑ нап.

6 нап. + 3 универс.

~~2. k=1~~

$$\cancel{C_6^2 \cdot C_8^3 = \frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} = 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 840}$$

~~3. k=2~~

2. k=1

$$3\cdot 5\cdot C_8^3 = 3\cdot 5\cdot 8\cdot 7 = 840$$

↑ универс. защ. ↑ ~~универс~~ защ. защ. ↑ нап. + универс. нап.

3. k=2 Лист 9/12

$C_3^2 \cdot C_7^3 = 3 \cdot 7 \cdot 5 = 105$

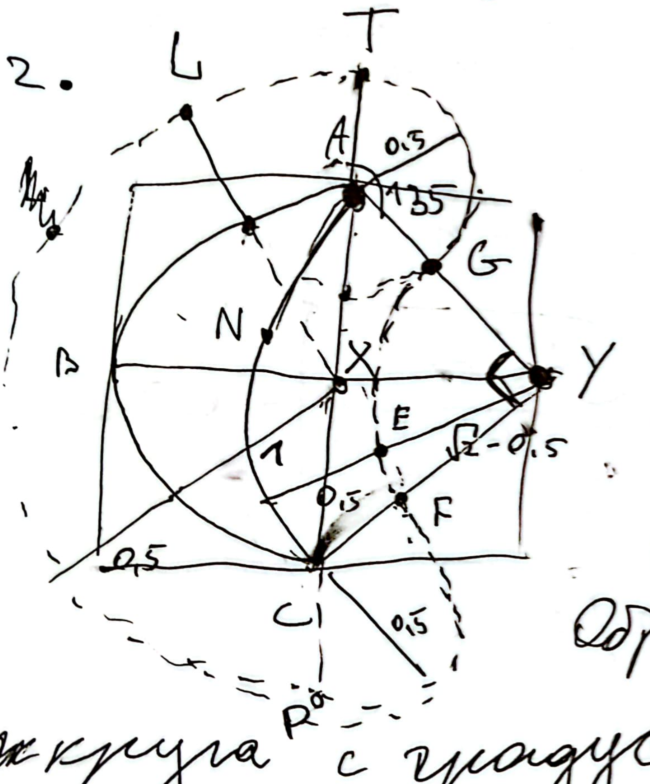
универ. зац. универ + нал. нал.

Итого выбрать нал. и зац. 1065 варианта

~~На~~ В 1 варианте выберем вратаря 3 способами.

1065·3=3195 - ответ.

№2.



Все радиусы из X увеличатся на 0.5

Все радиусы из Y уменьшатся на 0.5.

Около точек A и C образуются сектора ~~о~~круга с градусной мерой 135°.

Очев. все внутри нового контура будет в краске.

Пусть S_1 - S ~~дуги~~ сектора TLP с центром в X ~~без~~ минус площадь ~~сектора~~ „криволинейного треугольника" ANC с центром в Y

S_2 - площадь ~~сектора A~~ сектора ANC с центром в Y без площади GEF с центром в Y

S_3 – площадь сектора окр. радиуса 0,5 углом 135°.

Иск. площадь $A = S_1 + S_2 + 2S_3$

$\cancel{S_1 = \frac{\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} - \left(\pi\cdot(\sqrt{2})^2 - S(AYC)\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1\cdot 2}{2} = \frac{\pi}{4} + 1}$

$$S_1 = \frac{\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} - \left(\frac{\pi\cdot(\sqrt{2})^2}{4} - S(AYC)\right) = \frac{5}{8}\pi + \frac{1\cdot 2}{2} = \frac{5}{8}\pi + 1$$

$$S_2 = \frac{\pi\cdot(\sqrt{2})^2}{4} - \frac{\pi(\sqrt{2}-0{,}5)^2}{4} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right) = \pi\,\frac{4\sqrt{2}-1}{16}$$

$$S_3 = \pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{135}{360} = \pi\,\frac{135}{4\cdot 360} = \pi\,\frac{3}{32}$$

$$A = \pi\left(\frac{5}{8} + \frac{4\sqrt{2}-1}{16} + \frac{3}{16}\right) + 1$$

$$A = \pi\,\frac{12+4\sqrt{2}}{16} + 1 = \boxed{\pi\,\frac{3+\sqrt{2}}{4} + 1}$$ – Ответ

Лист 10/12

07-27-73-00
(39.1)

~~$(x+y)(x^2-xy+xy^2)+xy(x+y)$~~

~~$(x+y)(x^2+y^2)$~~

Лист 11 / 12

№ 3.

1. $x \geq 0$, $y \geq 0$ или $x \leq 0$, $y \leq 0$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow x|y| = y|x|$

$\underbrace{|\ldots|}_{\geq 0} + \underbrace{|\ldots|}_{\geq 0} + \underbrace{2}_{> 0} = 0$ – противоречие

2. $x < 0$ $y > 0$ $xy < 0$

~~$x|y| = y|x|$~~

$x|y| < 0 < y|x|$

$|\ldots| + |\ldots| + 2 + \underbrace{\frac{x|y| - y|x|}{xy} }_{>0} = 0$

противоречие

3. $x > 0$ $y < 0$

$x|y| = -y|x| = -xy$

$|x^3+y^3-19| + |x^2y+xy^2+6| = 0$ $x+y \neq 0$

$\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ x^2y+xy^2=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)=19 & (1) \\ (x+y)xy=-6 & (2) \end{cases}$

(1) + 3(2) : $(x+y)(x^2+2xy+y^2)=1$

$(x+y)^3=1$ $x+y=1$

Лист 12/12

№3.

~~$x^2-2xy+y^2=$~~

$$\begin{cases} xy=-6 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow x, y \text{ - корни}$$

$$t^2-t-6=0$$

$$(t-3)(t+2)=0$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow t\in\{-2;3\} \\ &x>0,\ y<0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x=3 \\ y=-2 \end{aligned}$$

Ответ: $x=3$, $y=-2$

Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

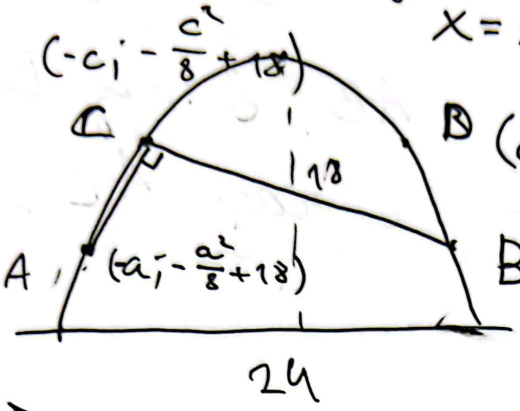
№7. Вершина лежит на оси симметрии, то есть $x_{в.п.}=0 \Rightarrow y_{в.п.}=a=18$. Найдем корни

$x=\pm\sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow x_1-x_2=2\sqrt{\frac{a}{b}}=24$

$\sqrt{\frac{a}{b}}=12;\ \frac{a}{b}=144$

$\Downarrow$

$b=\frac{1}{8}$



D $(c;-\frac{c^2}{8}+18)$

B $(a;-\frac{a^2}{8}+18)$

Парабола:

$a\neq c$ $\quad y=-\frac{x^2}{8}+18$

$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CA}=\left(c-a;\frac{c^2-a^2}{8}\right)\parallel\left(1;\frac{a+c}{8}\right)\parallel(8;a+c)$

$\overrightarrow{CD}=\left(a+c;\frac{c^2-a^2}{8}\right)\parallel\left(1;\frac{c-a}{8}\right)\parallel(8;c-a)$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

$64+c^2-a^2=0$

$a^2-c^2=64$

Высота $=\left(-\frac{c^2}{8}+18\right)-\left(-\frac{a^2}{8}+18\right)=\frac{a^2-c^2}{8}=$

$=8$

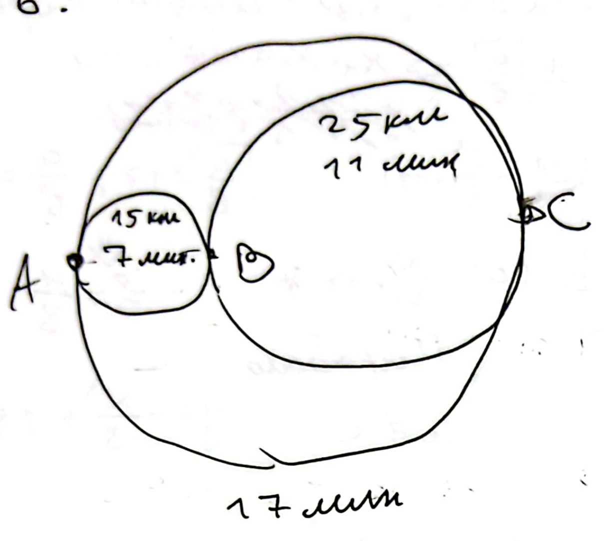
($AB\parallel OX \Rightarrow$ их y равны $\Rightarrow x$ симм. отн. оси параболы, то есть $x_A+x_B=0$, обозначим $x_A=-a$, тогда $x_B=a$.)

Ответ: 8

Лист 3/12

№6. Лист 4/12

a раз проехал AB, b раз BC, c раз AC.



$a, b, c \in \mathbb{N}$

$7a + 11b + 17c = 85$ – 1ч 25 мин.

$17c \le 85 \Rightarrow c \le 5$

1. $c = 5 \Rightarrow 7a + 11b = 0 \Rightarrow a = b = 0$
2. $c = 4 \Rightarrow 7a + 11b = 17$ — $b = 0$, но $17 \not\vdots\, 7$; $b = 1$, но $6 \not\vdots\, 7$
3. $c = 3 \Rightarrow 7a + 11b = 34$ — $b = 0$, но $34 \not\vdots\, 7$; $b = 1$, но $23 \not\vdots\, 7$; $b = 2$, но $12 \not\vdots\, 7$; $b = 3$, но $1 \not\vdots\, 7$
4. $c = 2$ $7a + 11b = 51$ — $b = 0$ $51 \not\vdots\, 7$; $b = 1$ $40 \not\vdots\, 7$; $b = 2$ $29 \not\vdots\, 7$; $b = 3$ $18 \not\vdots\, 7$; $b = 4$, $a = 1$; ~~$b = 5$~~
5. $c = 1$ $7a + 11b = 68$

$11b \overset{7}{\equiv} 5$

$11b$	11	22	33	44	55	66
$11b \bmod 7$	4	1	5	2	6	3

$\boxed{a = 5 \quad b = 3}$ $c = 1$

6. $c = 0$ $7a + 11b = 85$ $11b \overset{7}{\equiv} 1$ $b = 2$

$11b$	77
$11b \bmod 7$	0

$\Rightarrow$ см. пред. Таблицу $a = 9$, $c = 0$

1. $a=0$ $b=0$ $c=5$ №6. Продолжение

2. $a=5$ $b=3$ $c=1$

3. $a=9$ $b=2$ $c=0$ Лист 5/12

1. Ездим только по AC нечетное кол-во раз => закончим в C

2. Так проехать можно, например ACBCBABABA

Если $\cup AB = 15$, то $2\pi V_a = 30$

$V_a = \frac{15}{\pi}$

$V_b = \frac{25}{\pi}$

$V_c = \frac{2V_a + 2V_b}{2} = V_a + V_b = \frac{40}{\pi}$

$\cup AC = \pi V_c = 40$ (т.к. A, B, C лежат на 1 пр. с центрами)

Итого $15 \cdot 5 + 3 \cdot 25 + 40 = 190$ (км)

3. Сделаем полный круг по BC и нечетное кол-во полукругов AB => закончим в B

Ответ: 190 км

Лист 6/12

5. $f(a,b,c)=\sum_{cyc}\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}$

$$f(a,b,c)=\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}-a-b-c+3$$

~~Зь~~ Док. что:

$$\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\ge a+b+c$$

$$\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}\ge 2\sqrt{a^2\frac{bc}{bc}}=2a$$

Коши

~~Суммиру~~ Суммируя аналогичные

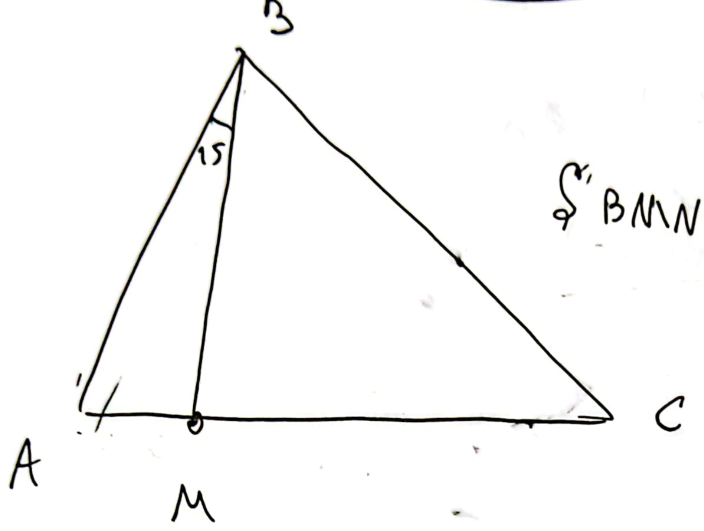
$$2\sum_{cyc}\frac{ab}{c}\ge 2\sum_{cyc}a \quad \text{— ч.т.д.}$$

$$\Downarrow$$

$$f(a,b,c)\ge 3$$

$f(1,1,1)=3$ Ответ: 3

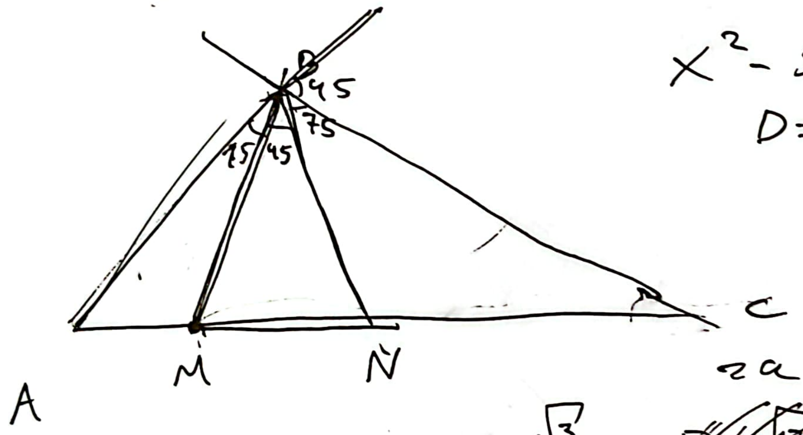
$\boxed{\text{Черновик}}$



$S_{BMN} = BM \cdot BN \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{1}{2}$

$a + b = 5$

$ab = 3$



$x^2 - 5x + 3 = 0$

$D = 25 - 12 = 13$

$\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$

$2a$

$AB \cdot BN \frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}} = \cancel{5+\sqrt{13}} + \cancel{\dots}\, 2S(BMN)$

$2 \qquad 2b$

$BM \cdot \cancel{B}C \frac{\sqrt{3}}{2} = \cancel{5+\sqrt{13}} + \cancel{\dots}\, 2S(BMN)$

$2(a+b)$

$\cancel{\dots}\ AB \cdot BC \frac{\sqrt{2}}{2} = \cancel{10} + 2S(BMN)$

~~SBM~~ $\frac{BMN}{BAN} = \frac{BM}{AB} \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \frac{BMN}{BMC} = \frac{BN}{BC} \sqrt{\frac{2}{3}}$

$BM\cdot BN \; \frac{3}{2\sqrt{2}} =$

ЧЕРНОВИК

$BM\cdot BN\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\,S(BMN) = \cancel{4}X$

$\frac{3}{2}X = \frac{\left(\overset{2a}{\cancel{}}+X\right)\left(\overset{2b}{\cancel{}}+X\right)}{}$