



81-07-23-50
(40.8)



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 15

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Тимореева Всеволода Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

81-07-23-50

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	0	8	12	0	12	12	0	56



М

СТР 1 из 7

Черновик

1 бр 2 зм 3 н

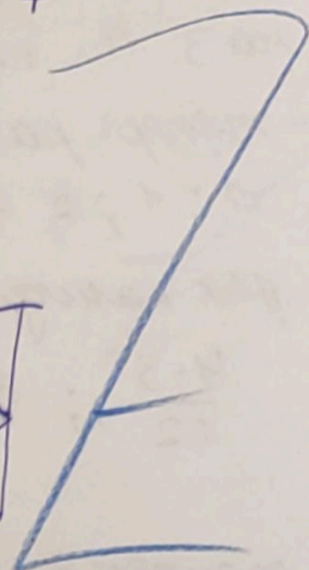
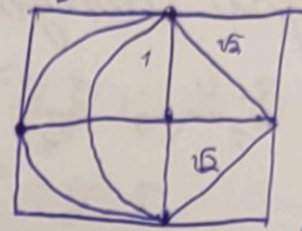
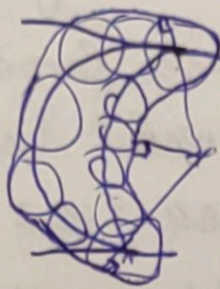
3 бр 4 зм 7 н

зун

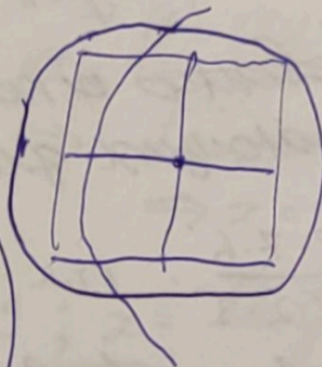
а б
в а
з б
г

2 3
4 7
3

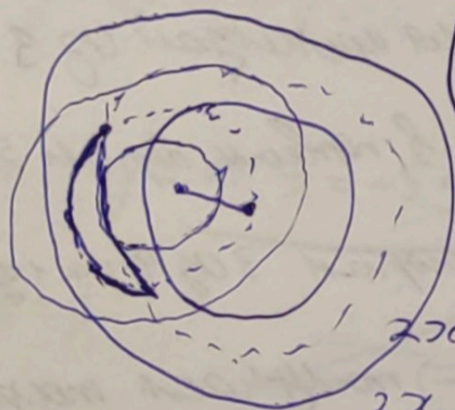
3.1



$$\frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7}{6}$$

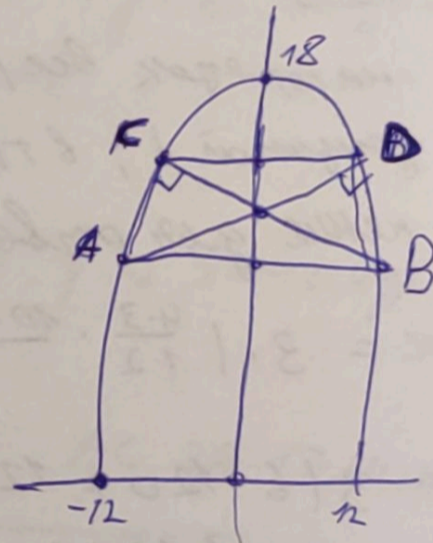


$$(10^n - 1) / 9$$



3

$$\begin{aligned} 2x + 6 &< 2 \\ 2x &< -4 \\ x &< -2 \end{aligned}$$



$$p = 4 + 9$$

$$x = \frac{p}{9} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 99 \\ \hline 216 \\ -216 \\ \hline 2376 \end{array}$$

99

$$y = a - bx^2$$

1.42

$$9 \cdot 6 = 54$$

2 2 7 7

Иметь десет шест

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times 23 \\ \hline 297 \\ 198 \\ \hline 2277 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 99 \\ \hline 207 \end{array}$$

$$(9 \cdot 10^n + 9) \cdot 10^n + 9$$

99 108 117

N1

Знаем, что универсалы не выключают ко батарей по этому
 понимаем, что батареи выключают и готовили ответ
 на 3 (т.к. надо было 1 из 3 а это 3 вар) и забываем про них
 теперь рассмотрим 3 сл: когда среди замкнутых
 0; 1; 2 универсала ну тогда кол-во вар
 для каждой ситуации соответственно это

$$\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} ; \frac{3 \cdot 4}{1} ; \frac{3 \cdot 2}{2} \quad (\text{т.к. в первом берем 2 из 4; во втором на берем 1 из 3 и 1 из 4; а в четв. мы берем 2 из 3})$$

теперь соответственно мы получаем кол-во вар.
 по набору находящихся для каждой из 3 ситуаций:

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} ; \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} ; \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad (\text{т.к. в первом берем 3 из 10}$$

(на порядок все равно); во втором 3 из 9 (т.к. 1 из них замкн
 замкнутой); в тр. 3 из 8 ...) \Rightarrow получаем такое урав-
 нение для ответа

$$x = 3 \cdot \left(\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} + \frac{3 \cdot 4}{1} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} + \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \right) =$$

$$= 3(6 \cdot 120 + 12 \cdot 7 + 3 \cdot 56) = 3(720 + 1008 + 168) =$$

$$= 3 \cdot 1896 = 5688 \quad \text{Ответ: } 5688$$

N3

$$y - x + 8 = (y - 5)^2 = y^2 - 10y + 25 \quad \text{от } y + 8 \geq x$$

$$\text{пусть } xy + 2x - y - 2 \geq 0 \Rightarrow x(y + 2) - (y + 1) = (x - 1)(y + 2) > 0$$

$$\Rightarrow |y - x - 10| = x - 4 \quad \text{при } y - x - 10 \leq 0 \quad -y + 10 = -4 \quad y = 14 \quad \text{но!}$$

$$\Rightarrow \sqrt{14 - x + 8} = 14 - 5 \quad 22 - x = 81 \Rightarrow x = -59 \quad \text{не верно}$$

$$\text{при } y - x - 10 \geq 0 \Rightarrow y = 2x + 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x + 6 - x + 8} = 2x + 1 \quad (x + 14 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$4x^2 + 3x - 13 = 0 \quad x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 208}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}$$

$$\text{верно по } \text{от } y = 2x + 6$$

81-07-23-50
(40.8)

пусть $x y + 2x - y - 2 < 0$

$|x-1| |y+2| < 0$ *

$|y-x-10| = -(x-4)$

пусть $y-x-10 \geq 0 \Rightarrow y-10 = 4 \Rightarrow y = 14$

$\sqrt{14+8-x} = \sqrt{14-5}$

$\Rightarrow x = -59$

пусть $y-x-10 \leq 0 \Rightarrow -y+x+10 = -x+4 \Rightarrow 2x+6 = y$

это мы решали и там не выполняется *

пусть $x y + 2x - y - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(y+2) = 0$

пусть $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \sqrt{y+7} = y-5$

$\Rightarrow y+7 = y^2 - 10y + 25 \Rightarrow y^2 - 11y + 18 = 0 = (y-9)(y-2)$
при $y=-2 \Rightarrow \sqrt{9} = -3$!

пусть $y+2=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow \sqrt{6-x} = -7$

$\Rightarrow x = -43$

Ответ: $y = 14 \quad x = -59$; $x = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8}$ $y = \frac{-3 \pm \sqrt{217} + 6}{4}$
(ответ)

$x=1 \quad y=9$

корни отрицательны по осям ($\sqrt{x} \geq 0$) $x=1 \quad y=-2$; $y=-2 \quad x=-43$ и др.)
НЧ

13 км за 7 км 21 км за 11 км AC за 17 км

$\pi \cdot AB = \cup AB \quad \pi \cdot BC = \cup BC$

$\cup AC = \pi \cdot AC = \pi (BC + AB) = \cup \frac{BC+AB}{\pi} \cdot \pi = 13+21 = 34$ км

заметьте что $1 \cdot 4 \cdot 25 \text{ км} = 85 \text{ км}$ а это

как раз 5 раз AC но тогда авт не попал в А.

переворот по пол-ву проезда по AC:

Если AC проехал 4 раза \Rightarrow осталось 17 км \Rightarrow не смогли

Если 3 раза \Rightarrow 34 км

тоже из 11 км и 7 не составим.
т.к. 34; 23; 12; 2 и 7

Если 2 раза \Rightarrow 51 км

т.к. 51; 40; 29; 18; 7 \Rightarrow есть 1 бор
7+4=11

но все равно не смогли т.к. 2 раза AC \Rightarrow отб от к. можно поменять местами
и тут просто выкинув их \Rightarrow 1 AB и 4 BC это очень нельзя т.к. нем.

BA Если 1 прог $\Rightarrow 85 - 17 = 68$

нч прогнум
 68; 57; 46; 35; 24; 13; 2
 только 35 : 7 $\Rightarrow 7 \cdot 5 + 11 \cdot 3 + 17 \cdot 1 = 85$
 СТР 4 уг 7

Малой маршрут есть: ABA BAB CB CA \leftarrow это от

$\Rightarrow 5 \cdot 13 \text{ км} + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 34 \text{ км} = 65 \text{ км} + 63 \text{ км} + 34 \text{ км} = 162 \text{ км}$

Если 0 прог $\Rightarrow 85; 74; 63; 52; 41; 30; 19; 8$

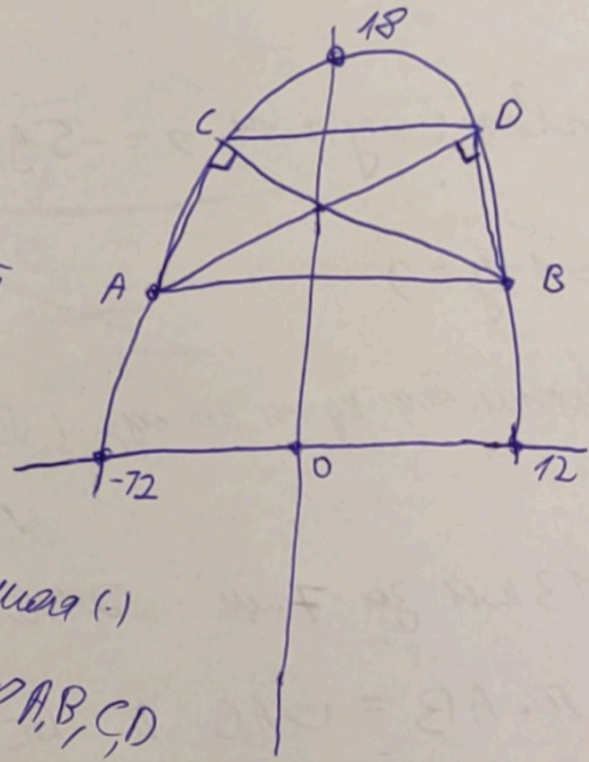
только 63 : 7 $\Rightarrow 2 \cdot 11 + 9 \cdot 7$ а это очень не верно

т.к. всего 11 прог мы проведем а это не так чтобы 1 у нас нет прог А так, что не меньше

Ответ: 162 км

N 6

~~сделать параллель перпендикуляр~~
~~параллельная~~



ответили точки корни -12 и 12
 т.к. ширина = 24 0 это радиусная (-)

($f(0) = 18$) Теперь заметим что A, B, C, D лежат на одной окруж. т.к. углы ACB и ADB опираются на одну дугу и равны а т.к. ~~это диаметр~~ \rightarrow они по $90^\circ \Rightarrow$ AB это диаметр

\Rightarrow пусть A имеет координаты $(k; l) \Rightarrow (-k; l)$
 \Rightarrow центр окруж это $(0; l)$ а ее радиус это k т.к. AB - диаметр \Rightarrow уравнения $(x-k)^2 + (y-l)^2 = k^2$

а уравнение параболы $y = 18 - x^2 \cdot b$ т.к. $f(0) = 18$
 а т.к. $f(-12) = 0 \Rightarrow b = \frac{18}{12^2} = \frac{18}{144} = \frac{1}{8} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} f(12) = 18 - \frac{1}{8} \cdot 144 = 18 - 18 = 0$
 $\Rightarrow f(x) = 18 - \frac{x^2}{8}$ теперь найдем пересечение

N 6 продолжим

$$x^2 + (y-1)^2 = k^2$$

$$18 - \frac{x^2}{8} = y$$

$$\Rightarrow 18 \cdot 16 - y = x^2$$

$$\Rightarrow k^2 - (y-1)^2 = 18 \cdot 16 - y$$

(берем первое к.т.к. это никак не вылезет из уолд. и все вым.)
Пусть $k = 12 \Rightarrow l = 18 - \frac{12^2}{8} = 0$ (т.к. мы нашли пересек $\Rightarrow 0$)

$$\Rightarrow A = -12; 0 \quad B = 12; 0 \Rightarrow \text{уравн окр.: } x^2 + y^2 = 12^2$$

$\rightarrow \&$ \Rightarrow ущем еще пересечения $\rightarrow y = 18 - \frac{x^2}{8}$

$$8y = 12^2 - x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 12^2 - y^2 = 12^2 - 8y \Rightarrow y^2 = 8y = y = 8 \Rightarrow \text{радиус}$$

в высоте нем 0 и 8 это 8 ч.т.д.

Ответ: высота 8.

N 5

$$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2} \quad \text{подставим } x=0$$

$$f(0) = \left(\frac{2-2}{2+2}\right) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\frac{2}{3}-2}{\frac{2}{3}+2}\right) = \frac{2}{\frac{2}{3}+2} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

(Handwritten notes: $3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$)

$$x-2 = \left(\frac{1}{2^n} - 1\right)(x+2) \Rightarrow x+x = 2+2 + \frac{x}{2^n}$$

$$\Rightarrow x\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 4$$

$$\frac{2}{x+2} =$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{2 - \frac{1}{2^n}}$$

n 7

Заметим что таким числом является $10^{90} - 1$
(очев что наиб 90 значное число т.к. больших таких не существует)

давайте докажем по индукции база: $9^n = 9 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a \cdot 9 = \overline{(a+1)(10-a)} \Rightarrow (a+1) + (10-a) = 9 \text{ ч.т. } 9$

теперь переход от n к n+1

пусть $f(10^n - 1, a) = f(10^n - 1) = 9n = f(a-1) + f(10^n - a)$
↓ разделим на 2 части т.к. $a \leq 10^n$

берем $(10^{n+1} - 1) \cdot a = 10^{n+1} \cdot a - 1 \cdot a$ от.к. $a \leq 10^{n+1}$

это будет выследить так $f(a-1) + f(10^{n+1} - a) =$
 $= f(a-1) + f(10^n - a) + f(9) = 9n + 9 = 9(n+1) \text{ ч.т. } 9$

Заметим что когда к какому-то числу мы прибавляем $10^n - 1$ то цифра цифр не меняется

\Rightarrow мы доказали что для a_n с 10^{n+1} все верно \rightarrow теперь докажем что a_{n+1} все ок: заметили что после цифры на 0 \Rightarrow это ~~факт~~ будет как для a_n т.к. 0 включается в 10^{n+1} и 10^{n+1}

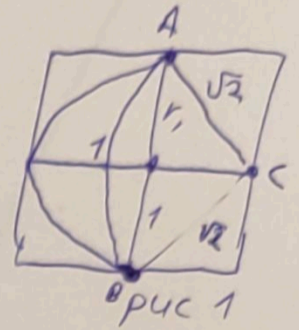
в конце итогов и выследить не будет теперь добавим a -ую цифру a_n \odot для 10^{n+1} , дает нам то, что нужно т.к. мы доказали это выше для \odot только меньших a \odot $\cdot 10^{n+1}$ \odot $\cdot 10^{n+1} - 1 = x \overline{999 \dots 9} y$ или то $9y = f(x)$

$x = 0 - 1 \Rightarrow \text{Ответ: } (7 \text{ градусов})$
 $n = 10 - 1$

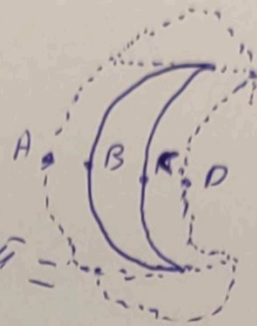
N2

Заметим что фигура перешла из рис 1 в рис 2

Заметим что $AB + CD = 0,5 + 0,5$ т.к.
 r конч окру $> 0,5$ (длина ≥ 1)



\Rightarrow площадь искомая
 это кольцевая $S_{\text{мек}} +$
 $+ 2 \cdot (0,5 + 0,5) + 2 S_{\text{торч частей}}$
 $= S_{\text{мек}} + 2 + 2 S_{\text{торч частей}}$



$$S_{\text{мек}} = \pi \cdot r_1^2 - S_{\text{сегм}} = \pi \cdot 1^2 - \left(\frac{1}{4} \pi r_2^2 - S_{ABC} \right)$$

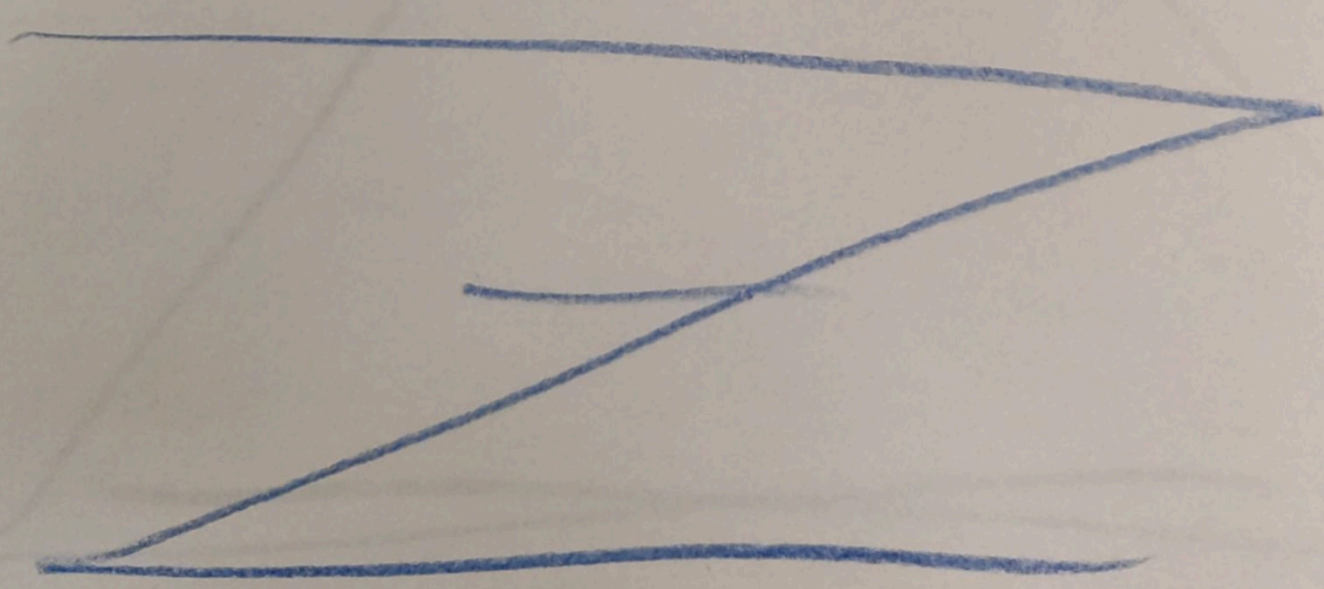
$$S_{\text{мек}} = \pi - \left(\frac{1}{2} \pi - 1 \right) = \frac{\pi}{2} + 1$$

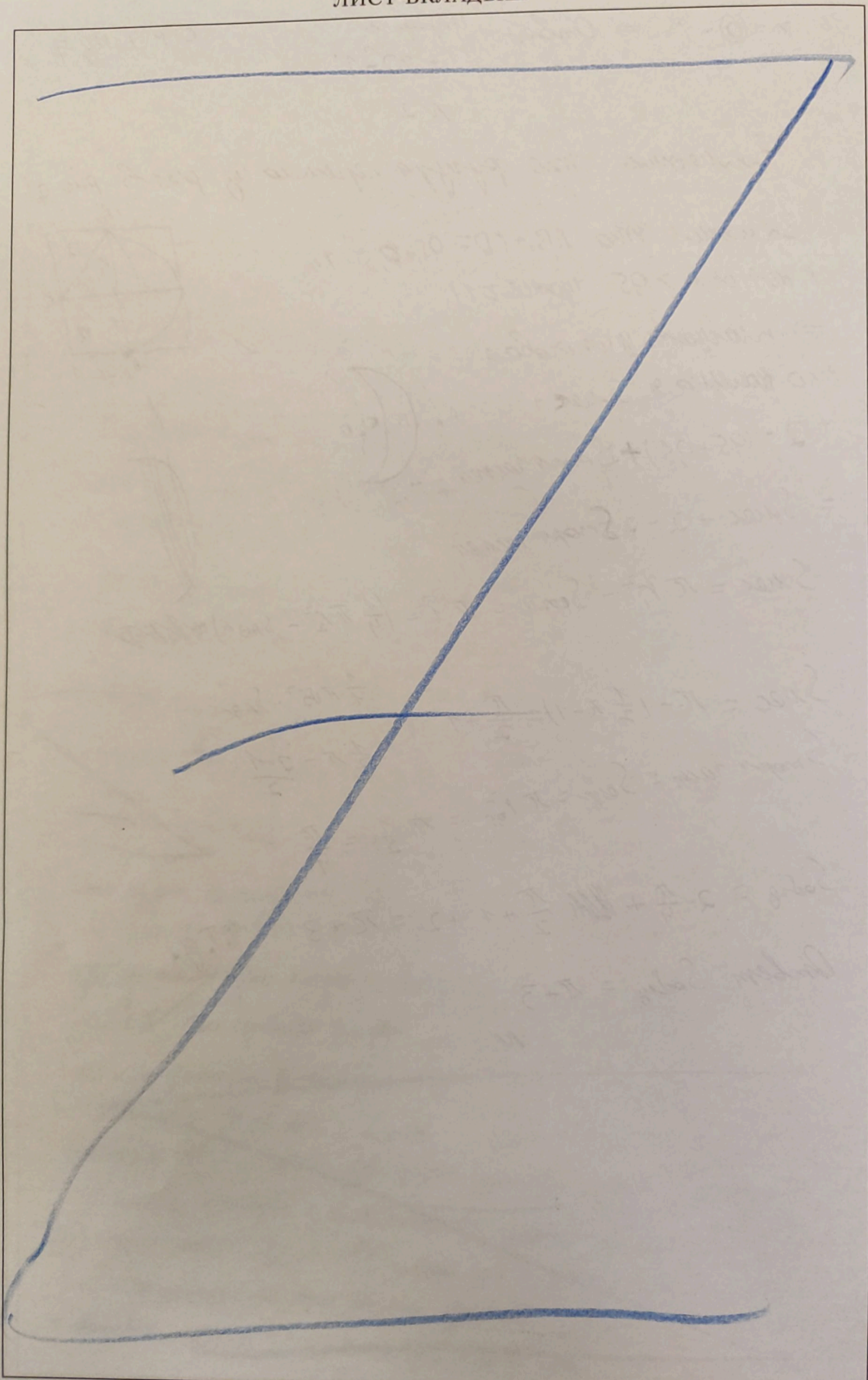
$$S_{\text{торч част}} = S_{\text{сегм}} = \pi r_{0,5}^2 = \pi \cdot \frac{1}{2}^2 = \frac{\pi}{4}$$

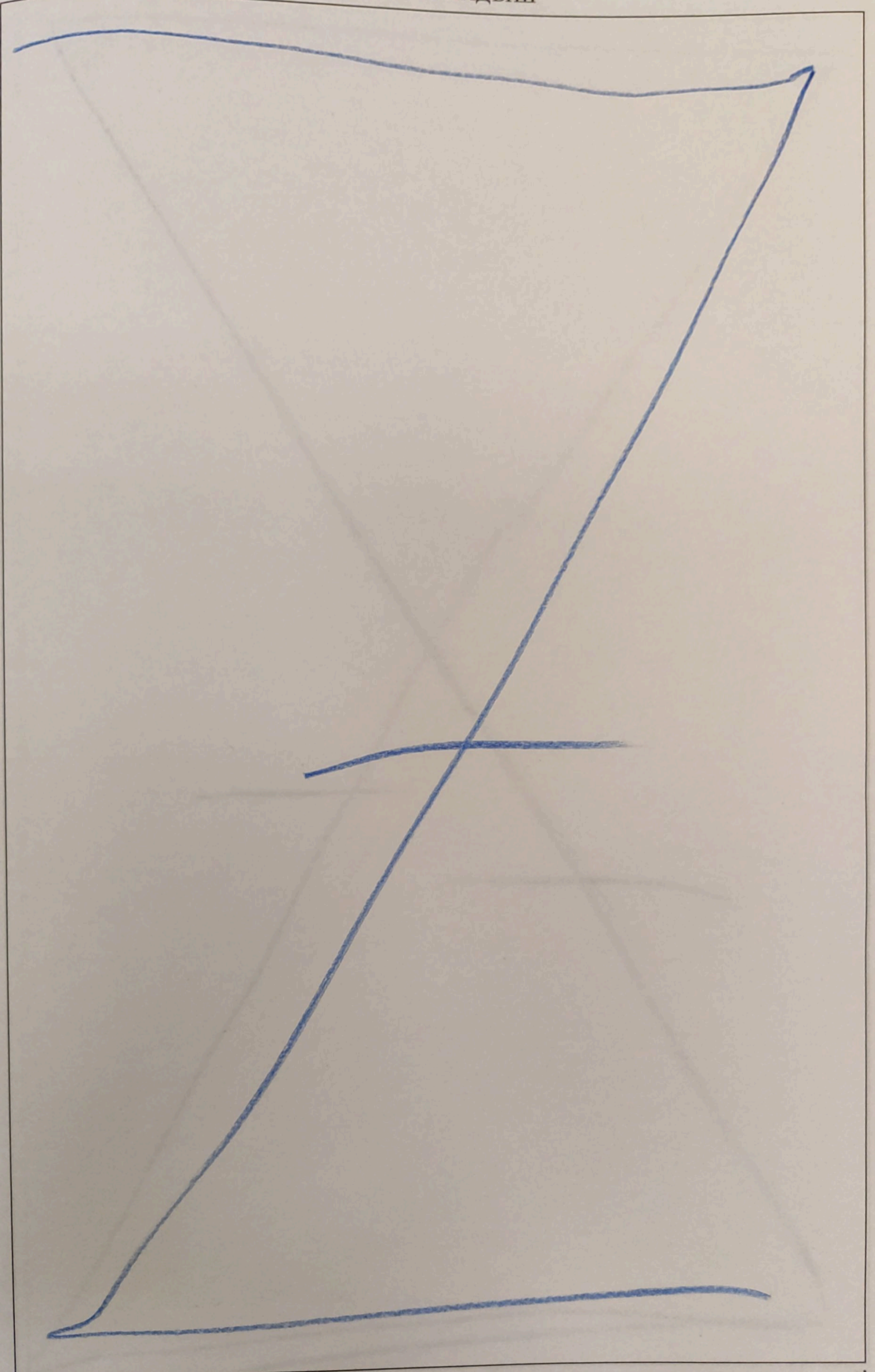
$$S_{\text{обш}} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 1 + 2 = \pi + 3$$

Ответ: $S_{\text{обш}} = \pi + 3$

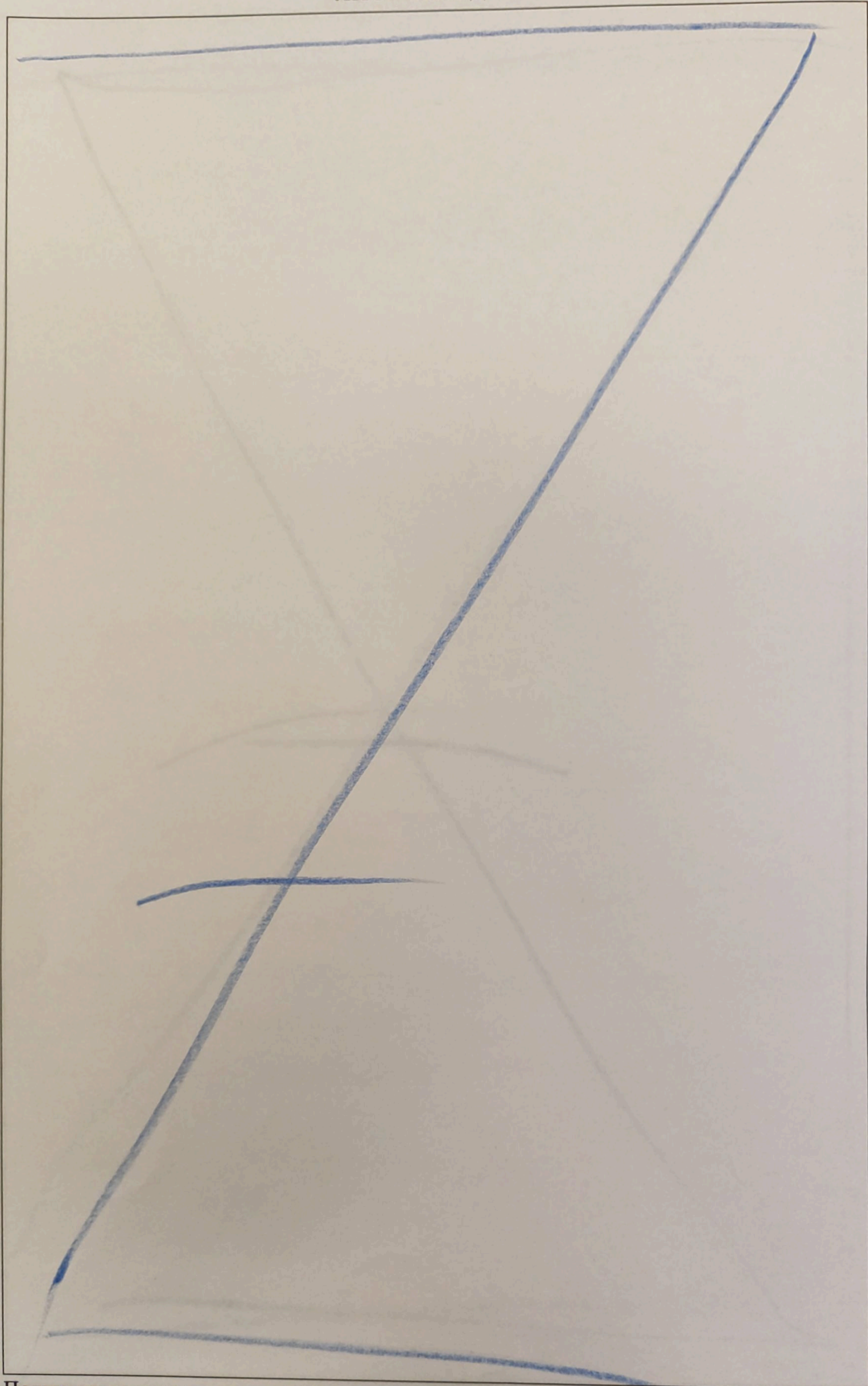
N



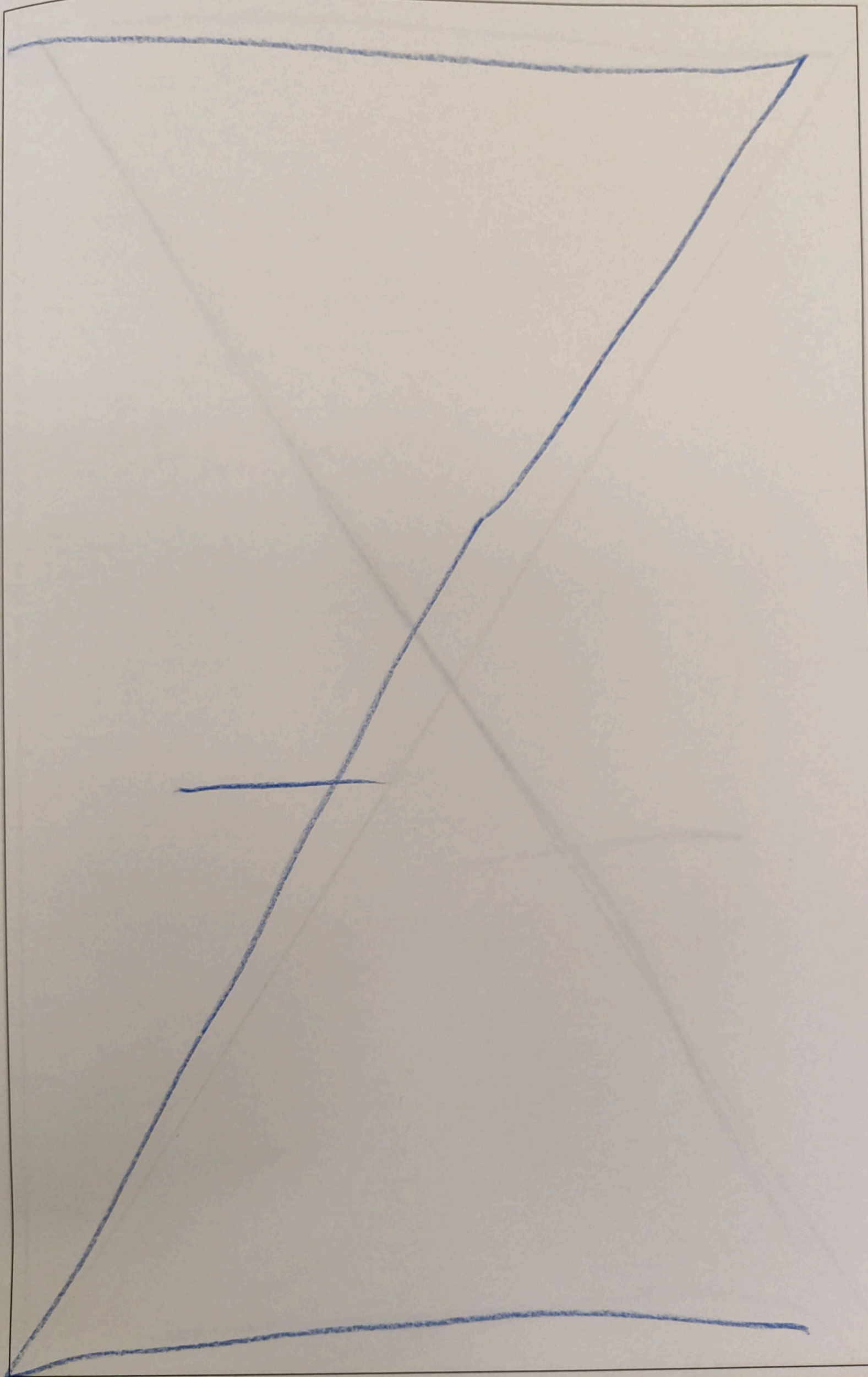




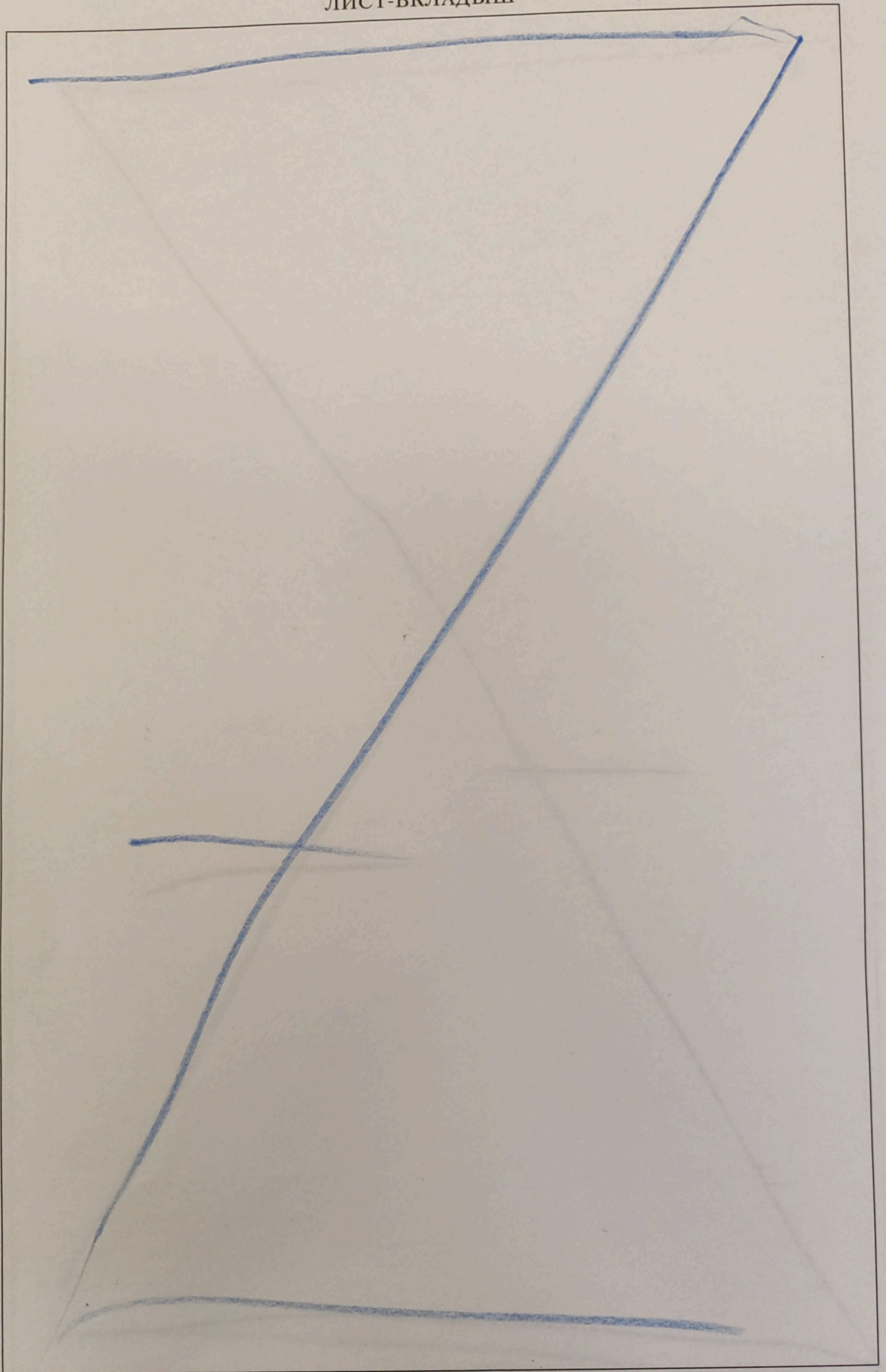
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!