0 444247 480001

44-42-47-48
(39.8)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________

Место проведения город Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Туровской Марии Георгиевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
44-42-47-48	68	4	4	12	12	12	12	0	12

44-42-47-48 (39.8)

68 (шестьдесят восемь)

1-ый лист

Черновик:

№1: $3\cdot C_8^2\cdot C_9^3 = 3\cdot\frac{8!}{2!\,6!}\cdot\frac{9!}{6!\,3!} = 3\cdot\frac{7\cdot 8}{2}^2\cdot\frac{7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3}^3 = (7\cdot 4\cdot 3)^2 =$

$= 84^2 = \cancel{6736}\ \underline{7056}$

$64\ 16$
$6\ 4$

$3\cdot C_5^2\cdot C_8^3$

$\begin{array}{r} \times 84 \\ 84 \\ \hline 336 \\ 672 \\ \hline 7056 \end{array}$

$3\cdot 5\cdot 8 + 3\cdot 3\cdot 7 =$

$= 15\cdot 8 + 9\cdot 7 = 120 + 63 = 183$

№3:

$x, y \geq 0 \Rightarrow$ противоречие

$x \leq 0, y \geq 0 \Rightarrow$ прот.

$y \leq 0, x \leq 0 \Rightarrow$ прот.

$\underline{y \leq 0,\ x \geq 0}$

$\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ x^2y+xy^2=-6 \end{cases}$

$x+y=1$

$y=1-x$

$3x^2y+3xy^2=-18$

$x^2(1-x)+x(x^2-2x+1)=-6$

$\Rightarrow x^2+x=-6$

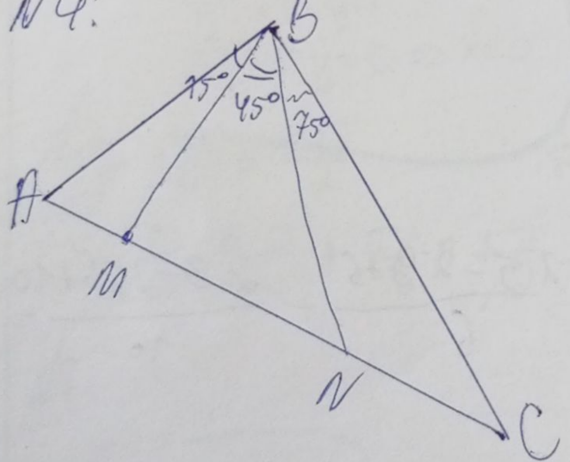
$x^2-x-6=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow \underline{(3;-2)}$

$25-12=13$

$a^2-5a+3=0$

№4:



$\begin{cases} x+y=5 \\ x\cdot y=3 \end{cases} \Rightarrow x, y = \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1-2\cdot\sin^2 15°$

$\cancel{4}\cdot\sin^2 15° = \frac{2-\sqrt{3}}{\cancel{2}4}$

$\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

$\begin{cases} AB\cdot BM\cdot\sin 15° + NB\cdot BC\cdot\sin 75° = 10 \\ \cancel{AB\cdot BM}\cdot\cancel{NB}\cdot BC\cdot\frac{1}{2}\sin 30° = \cancel{6}\ 12 \end{cases}$

$\frac{2S}{\sin 135°}\cdot\frac{2(S-5)}{\sin 45°} = 48$

$S^2-5S-6=0$

$\left[\begin{array}{l} S=-1 \\ S=6 \end{array}\right.$

2-ой лист

Черновик:

$5)\ \frac{bc}{a} - a + 1 + \frac{ca}{b} - b + 1 + \frac{ab}{c} - c + 1 = \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} - (a+b+c) + 3$

$\frac{(ab+bc+ac)^2}{abc} - 3(a+b+c) + 3$

$\frac{(ab+bc+ac)^2}{abc} \overset{?}{\geq} 3(a+b+c)$

$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2abc(a+b+c) \overset{?}{\geq} 3abc(a+b+c)$

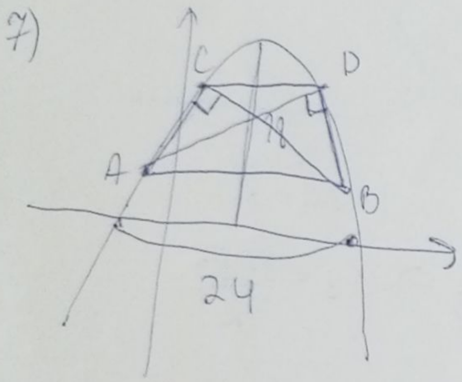
$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 - abc(a+b+c) \overset{?}{\geq} 0$

$(ab - bc + ac)^2 + abbc + acbc - 3abac \overset{?}{\geq} 0$

$\frac{ab}{c} - c + 1 \geq 1$

$\frac{ab}{c} \geq c \Rightarrow ab > c^2$

7)



№5: $a = 1, b = 3, c = 5 \Rightarrow \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 - 2 + 2}{2} + \frac{2 \cdot 5 - 2 \cdot 9 + 6}{6} + \frac{2 \cdot 3 - 2 \cdot 25 + 10}{10} =$

$= 15 - \frac{1}{3}\ 3{,}4$

$2bc - 2a^2 + 2a + 2ca - 2b^2 + 2b + 2ab - 2c^2 + 2c = -2(a+b+c)^2 + 6(ab+bc+ac)$

$-(a+1)^2 - (a+1)^2 - (b+1)^2$

$\cancel{= (a-1)^2 - (b-1)^2 - (c-1)^2 + 3} - (a-c)^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 + 2(a+b+c)$

$-a^2 + 2a - b^2 + 2b - c^2 + 2c - a^2 - c^2 + 2ac - a^2 - b^2 + 2ab - b^2 - c^2 + 2bc$

$\cancel{\frac{2b^2c^2 - 2a^2bc + 2abc + 2a^2c^2 - 2b^2ac + 2abc + 2a^2b^2 - 2abc^2 + 2abc}{2abc}} =$

$= \frac{2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 - 2abc(a+b+c)}{2abc} + 3$

44-42-47-48 (39.8)

3-ий лист

Черновик:

№5:

$(bc+ac)^2 + (ac+ab)^2 + (bc+ab)^2 = 2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 - 2abc(c+a+b)$

3

№6: $2\pi R = 15$

$R = \frac{15}{\pi} \Rightarrow R_1 = \frac{40}{\pi}$

$2 \cdot \pi \cdot R_1 = 80 \Rightarrow$ AC: 40км/17минут

$7x + 11y + 17z = 85$, $z \leq 5, y \leq 7, x \leq 12$

$7(x+y+z) + 4y + 10z = 85$

0 1 2 3 4 5 6
0 3 6 2 5 1 4

$11(x+y+z) + 6z - 4x = 85$

$(1 - 3z - 4y) \vdots 7$ 44+34

$(1 + 4z + 3y) \vdots 7$

$z = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 9$

$z = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 5$ $40 + 3 \cdot 25 + 5 \cdot 15 = 190$

$z = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 1$ $40 \cdot 2 + 4 \cdot 25 + 15 = 195$

$z = 3 \Rightarrow y = 5$

$z = 4 \Rightarrow y = 6$

$z = 5 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$ 540=200

$12000 - 120 = 880$

№2: $\frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\pi R^2}{4} - 1$

$9896 - 99 = 9801$

$\frac{\pi}{8} \cdot \frac{\pi\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{8} \cdot \pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} + \frac{\pi^2}{8} + 1$

№7:

$99(100-1) =$

$= 9900 - 99 =$

$= 9801$

120×99: 1080, 108, 11880

99^2 9801

8181
162

$m \cdot (10^{100} - 1) = m \cdot 10^{100} - m$

$m\underbrace{000\ldots00}_{100} - m$

4-ый лист

Чистовик

Задача №1:

Из условия задачи следует, что всего существует 3 варианта вратаря, 8 вариантов защитников и 9 вариантов нападающих ⇒ всего способов выбрать шестёрку: $3\cdot C_8^2\cdot C_9^3 = 3\cdot\frac{8!}{2\cdot 6!}\cdot\frac{9!}{6!\cdot 3!} = 3\cdot\frac{7\cdot 8}{2}\cdot\frac{7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3} = 42\cdot 56\cdot 3 =$
$= 2352\cdot 3 = 7056$.

Также ещё надо вычесть кол-во вариантов, в которых в качестве защитника и нападающего выбирается один и тот же „универсал". Если среди двух защитников только 1 „универсал", и этот же „универсал" есть среди нападающих, то всего таких случаев - $3\cdot 5\cdot C_8^2 = 15\cdot 28 = 420$. Если 2 защитника - 2 „универсала" и они же нападающие, то всего таких случаев - $3\cdot C_3^2\cdot C_7^1 = 63$ ⇒ итоговый ответ $= 7056-483 = 6573$.

Ответ: 6573 способа

Задача №3:

$$\underbrace{|x^3+y^3-19|}_{\geq 0} + \underbrace{|x^2y+xy^2+6|}_{\geq 0} + \frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy} = 0 \Rightarrow$$

Обл. доп. зн-ния: $x\neq 0;\ y\neq 0$

$\Rightarrow \frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}\leq 0$. Пусть это выражение $=A$.

1) Если $y\leq 0, x\leq 0 \Rightarrow A=2$ - не уд. условию, что $A\leq 0$.
2) Если $y\leq 0, x\geq 0 \Rightarrow A=0$.
3) Если $y\geq 0, x\leq 0 \Rightarrow A=4$ - не уд. условию, что $A\leq 0$.
4) Если $y\geq 0, x\geq 0 \Rightarrow A=2$ - см. п. 1.

$\Rightarrow y<0, x>0$ (и $A=0$)

$$\Rightarrow \underbrace{|x^3+y^3-19|}_{\geq 0} + \underbrace{|x^2y+xy^2+6|}_{\geq 0} = 0$$

$$\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ x^2y+xy^2=-6 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^3 = 1 \Rightarrow x+y=1 \Rightarrow y=1-x \Rightarrow:$$

$3x^2y+3xy^2=-18$

$x^2(1-x)+x(x^2-2x+1)=-6$

$x^2-x-6=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-2 \text{ - не уд. условию, что } x\geq 0. \\ x=3 \Rightarrow y=-2. \end{array}\right.$

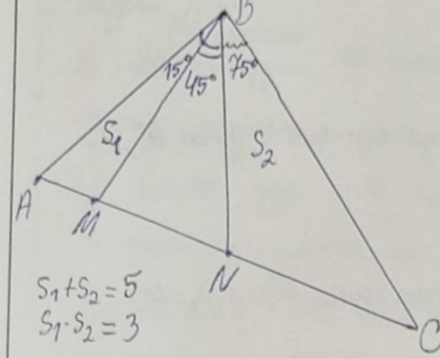
Ответ: $(3;-2)$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

44-42-47-48
(39.8)

5-ый лист

Задача №4 (Чистовик):



$S_1+S_2=5$

$S_1\cdot S_2=3$

Найти: $S_{\triangle ABC}$ - ?

Решение.

1) Пусть $S_{\triangle ABM}=S_1$; $S_{\triangle NBC}=S_2$; $S_{\triangle ABC}=S$.

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = \frac{AB\cdot BM\cdot \sin 15°}{2} \\ S_2 = \frac{BN\cdot BC\cdot \sin 75°}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow S_1\cdot S_2 = \frac{AB\cdot BC\cdot BM\cdot BN\cdot \sin 15°\cdot\cos 15°}{4} = 3$$

$AB\cdot BC\cdot BM\cdot BN\cdot\frac{1}{2}\sin\overset{\frac12}{30°} = 12$

$AB\cdot BC\cdot BM\cdot BN = 48$

2) $$\left.\begin{array}{l} S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin 135° \Rightarrow AB\cdot BC = \frac{2S}{\frac{\sqrt2}{2}} \\ S_{\triangle BMN} = S-S_1-S_2 = S-5 = \frac12 MB\cdot BN\cdot \sin 45° \Rightarrow MB\cdot BN = \frac{2(S-5)}{\frac{\sqrt2}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ на основе п. 1: $\frac{2S}{\frac{\sqrt2}{2}}\cdot\frac{2(S-5)}{\frac{\sqrt2}{2}} = 48 \Rightarrow S^2-5S-6=0$

$\left[\begin{array}{l} S=-1 \text{ - не имеет смысла, т.к. } S>0 \\ S=6 \end{array}\right.$

Ответ: 6

Задача №5:

$$\frac{2b^2c^2-2a^2bc+2abc+2a^2c^2-2b^2ac+2abc+2a^2b^2-2c^2ab+2abc}{2abc} =$$

$$= \frac{2b^2c^2+2a^2c^2+2a^2b^2-2a^2bc-2b^2ac-2c^2ab}{2abc}+3 = \cancel{(bc-ac)^2+(ac-ab)^2+}$$

$$+ = \underbrace{\frac{\overset{\geq 0}{(bc-ac)^2}+\overset{\geq 0}{(ac-ab)^2}+\overset{\geq 0}{(bc-ab)^2}}{\underbrace{2abc}_{>0}}}_{\geq 0}+3$$

$\geq 3 \Rightarrow$ выражение достигает своего миним. значения, если $bc=ac; ac=ab$ и $bc=ab \Rightarrow a=b=c \Rightarrow$ миним. знач. выражения $=3$.

Ответ: 3

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

6-ой лист.

Чистовик

Задача №6:

Пусть r_1 – радиус окр-сти с дугой $\overset{\frown}{AB}$, r_2 – радиус окр-сти с дугой $\overset{\frown}{BC}$, r_3 – радиус окр-сти с дугой $\overset{\frown}{AC}$

$$\left.\begin{aligned} \pi \cdot r_1 = 15 \Rightarrow r_1 = \frac{15}{\pi} \\ \pi \cdot r_2 = 25 \Rightarrow r_2 = \frac{25}{\pi} \end{aligned}\right\} r_1 + r_2 = r_3 = \frac{40}{\pi} \Rightarrow \text{длина дуги } \overset{\frown}{AC} = \pi \cdot r_3 = 40$$

Пусть x, y, z – кол-во раз, которое автомобиль проехал по любой из дуг $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{AC}$ соответственно; $x, y, z \in \mathbb{N}_0$

$7x + 11y + 17z = 85 \Rightarrow y \leq 7$.

Автомобиль, выехав из т. A, оказался в ней же $\Rightarrow$ x, y и z одинаковой чётности $\Rightarrow$ $x, y, z \overset{\text{mod } 2}{=} 1$, т.к. $85 \not\vdots\, 2$.

$17z = 85 - 7x - 11y$

$(85 - 7x - 11y)_{max} = 85 - 7 - 11 = 67 \Rightarrow$ (т.к. x и $y \not\vdots\, 2$) $z_{max} = 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = 3 \end{array}\right.$ (т.к. $z \not\vdots\, 2$).

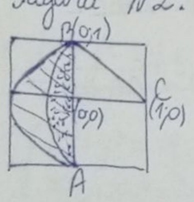
1) Если $z = 1 \Rightarrow 7x + 11y = 68$
$7x = 68 - 11y \Rightarrow (68 - 11y) \vdots 7 \Rightarrow (5 + 3y) \vdots 7 \Rightarrow y = 3$ (т.к. $y \not\vdots\, 2$ и $y \leq 7$) $\Rightarrow x = 5$.

2) Если $z = 3 \Rightarrow (34 - 11y) \vdots 7$ (на основе п.1) $\Rightarrow (3y - 1) \vdots 7 \Rightarrow y = 5$ (т.к. $y \not\vdots\, 2$ и $y \leq 7$) $\Rightarrow x < 0$ – не удовл. характеру задачи.

Из п.1 и 2 $\Rightarrow$ автомобиль проехал $5 \cdot 15 + 3 \cdot 25 + 1 \cdot 40 = 190$ км.

Ответ: 190 км

Задача №2:



Найти:
S – ?

Решение.

1) $S_{\text{самого полумесяца}} = S_{▨} - S_{▨} = \frac{\pi \cdot r_1^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot r_2^2}{4} - S_{\triangle ABC}\right) =$

т.к. $\angle ACB = 90°$

$= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1$ (т.к. $r_2 = AC = BC = \sqrt{2}$ по т. Пифагора)

7-ой лист

Задача №2:
(Чистовик)

2) Длина дуги $\overset{\frown}{AB}$ ~~малой~~ окр-сти с ц. в т. (1;0) $= \frac{2\pi r_2}{4} = \frac{\pi \cdot r_2}{2} = \frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{2}$ (п.1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ после распыления краски S увеличилась на $\frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16}$

3) Длина дуги $\overset{\frown}{AB}$ окр-сти с ц. в т. (0;0) $= \frac{2\pi r_1}{2} = \pi \cdot r_1 = \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow$ после распыления краски S увеличилась на $\pi \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi^2}{8}$

Из п. 1, 2 и 3 $\Rightarrow S = 1 + \frac{\pi^2 \cdot \sqrt{2}}{16} + \frac{\pi^2}{8}$.

Ответ: $1 + \frac{\pi^2 \cdot \sqrt{2}}{16} + \frac{\pi^2}{8}$

Задача №8:

Наиб. 100-значное число $= 10^{100} - 1$. Докажем, что оно удовлетворяет условию задачи. $S(n) = 9 \cdot 100 = 900$.

$m \cdot n = m \cdot (10^{100} - 1) = 10^{100} \cdot m - m$

$m \cdot 10^{100} = m\underbrace{000\ldots00}_{100}$

$$\begin{array}{r} -\; m\overset{99\ldots10}{\underbrace{000\ldots0}_{100}} \\ m \\ \hline \end{array}$$

Т.к. $m \leq n \Rightarrow m < 10^{100}$.

Если последние цифры $m = 0$, то из 0 вычитается $0^{*} \Rightarrow$ сумма цифр не меняется (при произведении $m \cdot n$ на конце просто добавляется 0 и у $m000\ldots$ и у m).

Если у m цифры не 0, то мы занимаем у ~~какого-либо~~ меньшего разряда $m \neq 0$, который не равен 0, тем самым сумма цифр разности становится $= S(m) - 1$. Потом из 9 и крайней 10 вычитается поочерёдно каждая цифра $m \Rightarrow$

$\Rightarrow$ конечная сумма цифр $= S(m) - 1 + 9 \cdot 100 - S(m) + 1$ (т.к. на конце стоит 10) $= 900 \Rightarrow S(m \cdot n) = S(n) = 900$.

Ответ: $\underbrace{999\ldots99}_{100}$ $(10^{100} - 1)$

* кол-во 0 увеличивается на одинаковое кол-во, если посл. цифры $m = 0$ и у $10^{100} \cdot m$ и у m по сравнению с m без 0 на конце $\Rightarrow$ логика решения не меняется