0 518795 270008

51-87-95-27
(39.17)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Тушенцова Александра Максимовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
51-87-95-27	68	4	8	12	8	12	12	12	0

51-87-95-27 (39.17)

68 (Шестьдесят восемь) И. Ваганова

Черновик:

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=$$

$$=\frac{bc}{a}-a+1+\frac{ca}{b}-b+1+\frac{ab}{c}-c+1=\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc}-$$

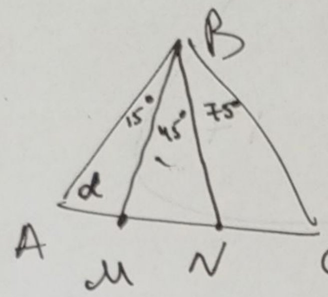
$-a-b-c+3$

$t=ab$

$a_1+a_2+\ldots+a_{100}=S$

$\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{100}}$

1 2 3 4



$S_{ABM}+S_{NBC}=5$

$S_{ABM}\cdot S_{NBC}=3$

$S_{ABC}-?$

$\frac{BM}{\sin\alpha}=\frac{AM}{\sin 15^\circ}$

$\frac{BN}{\sin(45^\circ-\alpha)}=\frac{CN}{\sin 75^\circ}$

$\frac{BN}{\sin(\alpha+15^\circ)}=\frac{BM}{\sin(120^\circ-\alpha)}$

$\frac{AB\cdot BM\cdot BN\cdot BC\sin 15^\circ\sin 75^\circ}{4}=3$

$\angle B=135^\circ$

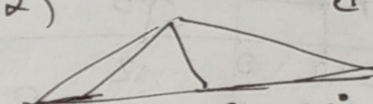
$\frac{h\cdot AM}{2}+\frac{h\cdot NC}{2}=\frac{h(AM+CN)}{2}=5$

$\frac{h\cdot AM}{2}\cdot\frac{h\cdot NC}{2}=\frac{h^2\cdot AM\cdot CN}{4}=3$

$\begin{cases}AM+CN=\frac{10}{h}\\ AM\cdot CN=\frac{12}{h^2}\end{cases}$

$x^2-\frac{10}{h}x+\frac{12}{h^2}=0.$

$\frac{CN\sin(45^\circ-\alpha)}{\sin 75^\circ\sin(\alpha+15^\circ)}=\frac{AM\sin\alpha}{\sin 15^\circ\sin(120^\circ-\alpha)}$



$BM=\frac{2S_1}{AB\sin 15^\circ}$

$BN=\frac{2S_2}{BC\sin 75^\circ}$

$AC=\cancel{BC}\,AB\sin\alpha+\cancel{AB}\,BC\sin(45^\circ-\alpha)$

$S=\frac{AB\cdot BC\sin 120^\circ}{2}$

$S=\frac{h\cdot AC}{2}$ $\quad S=\frac{AB\cdot BC\sin 135^\circ}{2}$ $\quad S_1=\frac{AB\cdot BM\sin 15^\circ}{2}$ $\quad S_3=\frac{4S_1S_2}{AB\cdot BC\cdot\sin 75^\circ\sin 15^\circ}$

$\cancel{\frac{AB\sin 15^\circ}{2}\ B}$

$S_1S_2=\frac{AB\cdot BC\sin 15^\circ\cos 15^\circ}{4}\cdot BM\cdot BN$ $\quad S_2=\frac{BN\cdot BC\sin 75^\circ}{2}$

$=\frac{AB\cdot BC\sin 15^\circ\cos 15^\circ}{\cancel{2}\sin 45^\circ\ 4}\cdot\frac{2BM\cdot BN\cdot\sin 45^\circ}{2}=\frac{S\sin 15^\circ\cos 15^\circ\cdot 4}{4\,\cancel{8}\sin 45^\circ\cdot 2\sin 120^\circ}\cdot S_3$

$|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|+\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=0.$ $\quad x\neq0,\ y\neq0$

$25+12\sqrt6$

$6\sqrt6$

$3\cdot2\cdot\sqrt2\cdot\sqrt3$

$\underbrace{|x^3+y^3-19|}_{\geq 0}+\underbrace{|x^2y+xy^2+6|}_{\geq 0}+\underbrace{\frac{|y|}{y}-\frac{|x|}{x}+2}_{\geq 0}=0$

$-2+2=0.$

$y<0$
$x>0.$

$\begin{cases}x^3+y^3=19\\ x^2y+xy^2=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)(x^2-xy+y^2)=19\\ xy(x+y)=-6.\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-xy+y^2=-\frac{19}{6}xy\\ xy(x+y)=-6.\end{cases}$

$S_1+S_2=5$

$S_1S_2=3$

$S_1=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$

$S_2=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$

$x^2-5x+3=0$

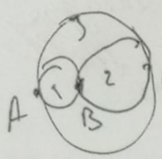
$D=25-12$

$x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}.$

$№2 - \frac{1}{2} \times 1$

Черновик

$\omega_1 = \frac{2\pi R_1}{2}$ $\omega_1 = \frac{15}{7}$

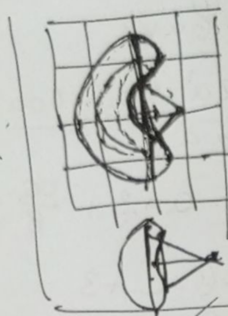


$\frac{2\pi R_1}{2} = 15$ $\omega_2 = \frac{25}{11}$

$\pi R_1 = 15$ $\omega_3 =$

$R_1 = \frac{15}{\pi}$

$R_2 = \frac{25}{\pi}$



$a^2 + b^2 \geq 2ab$.

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

$R_3 = \frac{2R_1 + 2R_2}{2} = R_1 + R_2 = \frac{40}{\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_3 = \frac{40}{17}$.

$T = 60 + 25 = 85$.   7   11   17

~~85 68 51 34 17 0~~

85   68

$t = abc$

61
54
47
40
33

$5 \cdot 7 + 3 \cdot 11 + 17$

$2b^2c^2 - 2a^2bc + 2abc$

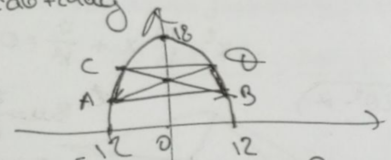
$2a^2c^2 - 2b^2ac + 2abc$

$2a^2b^2 - 2c^2ab + 2abc$

№1

8 В - 3

$(C_5^2 \cdot C_6^3) + (C_3^1 \cdot C_5^1 +$



$y = a - bx^2$

$-bx^2 + a$

$a = 18$

$\angle ACB = \angle ADB = 90°$

$\rho(AB; CD) - ?$

$\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 - abc(a+b+c) + 3abc}{abc}$

$y = 0$

$x = \pm 12$

$0 = 18 - 144b$

$b = \frac{18}{144} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

$y_C - y_A - 2$

$\frac{t}{a} + \frac{t^2}{bc}$

A: $y = -\frac{1}{8}x_1^2 + 18$ $(-x_1; y_1)$

B: $y_1 = -\frac{1}{8}x_1^2 + 18$ $(x_1; y_1)$

D: $y_2 = -\frac{1}{8}x_2 + 18$ $(x_2; y_2)$

$\vec{AD} \cdot \vec{DB} = (-x_1 - x_2)(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_2) = 0$.

$-(x_1^2 - x_2^2) + (y_1 - y_2)^2 = 0$.

$y_1 - y_2 = -\frac{1}{8}x_1^2 + 18 - (-\frac{1}{8}x_2^2 + 18) = \frac{1}{8}(x_2^2 - x_1^2)$

$t = x_1^2 - x_2^2$ $-t + \frac{1}{64}t^2 = 0$ $t = 1 \cdot 64$

$\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 64 \end{array}\right.$ $t = x_1^2 - x_2^2 = 64$.

$y_1 - y_2 =$

51-87-95-27
(39.17)

Чистовик (лист №1)

№3

$|x^3 + y^3 - 19| + |x^2y + xy^2 + 6| + \frac{x|y| - y|x| + 2xy}{xy} = 0$

$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

$\frac{x|y| - y|x| + 2xy}{xy} = \frac{|y|}{y} - \frac{|x|}{x} + 2$

$\frac{|y|}{y}$ и $\frac{|x|}{x}$ равны -1 или 1 (в зависимости от знака y и x). Тогда их минимальное значение $\frac{|y|}{y} - \frac{|x|}{x}$ будет равно (-2). Но тогда $\left(\frac{|y|}{y} - \frac{|x|}{x} + 2\right) \geq 0$

$|x^3 + y^3 - 19| \geq 0$

$|x^2y + xy^2 + 6| \geq 0$

$\Rightarrow$ т.к. их сумма 0 $\begin{cases} |x^3 + y^3 - 19| = 0 \\ |x^2y + xy^2 + 6| = 0 \\ \frac{|y|}{y} - \frac{|x|}{x} + 2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^3 + y^3 - 19 = 0 \\ x^2y + xy^2 + 6 = 0 \\ x > 0 \\ x < y \end{cases}$ (1)

1) $\begin{cases} x^3 + y^3 - 19 = 0 \\ x^2y + xy^2 + 6 = 0 \end{cases}$ (*)

$\begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 19 \\ xy(x+y) = -6 \end{cases}$

т.к. $x = -y$ не решение

$\begin{cases} \frac{x^2 - xy + y^2}{xy} = \frac{19}{-6} \\ xy(x+y) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6xy + 6y^2 = -19xy \\ xy(x+y) = -6 \end{cases}$ (2)

2) $6x^2 + \cancel{25}\,13xy + 6y^2 = 0 \mid : y^2$ т.к. $y \neq 0$

~~$6\frac{x^2}{y^2} - 25\frac{x}{y} + 6 = 0$~~

~~$D = 25^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6 = 25^2 - 12^2 = (25+12)(25-12) = 37 \cdot 13$~~

$6\frac{x^2}{y^2} + 13\frac{x}{y} + 6 = 0$

$D = 13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6 = 13^2 - 12^2 = 25$

$\frac{x}{y} = \frac{-13 \pm 5}{12}$

$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{y} = -\frac{2}{3} \\ \frac{x}{y} = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = -2y \\ 2x = -3y \end{array}\right.$

Чистовик (лист №2)

№3

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x=-2y \\ 2x=-3y \end{array}\right. \\ xy(x+y)=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cancel{xy} -1{,}5x^2(x-1{,}5x)=-6 \\ y=-1{,}5x \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1{,}5y \\ \cancel{y} -1{,}5y^2(-1{,}5y+y)=-6 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{3}{4}x^3=-6 \\ y=-1{,}5x \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1{,}5y \\ \frac{3}{4}y^3=-6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^3=-8 \\ y=-1{,}5x \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1{,}5y \\ y^3=-8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \end{array}\right. \\ x>0 \\ y<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$$

Ответ: $(3; -2)$

№6.

1час 25 мин = 85 мин

Начнем рассматривать случаи, при которых автомобиль проехал по дуге $\overset{\frown}{AC}$ хотя бы один раз. Начнем с одного раза. Тогда осталось $(85-17=68)$ мин.

Проверим, можем ли мы разложить 68 на сумму ~~ее~~ из 7 и 11.

$68 = \underbrace{7+7+7+7+7}_{5} + \underbrace{11+11+11}_{3}$. Разложить можем.

Тогда нужно проверить попадем ли

51-87-95-27
(39.17)

Чистовик (лист №3)

№6

мы в начальную точку А.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ A\to B \\ 2)\ B\to A \\ 3)\ A\to B \\ 4)\ B\to A \\ 5)\ A\to B \end{array}\right\} \text{по 7мин}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6)\ B\to C \\ 7)\ C\to B \\ 8)\ B\to C \end{array}\right\} \text{по 11мин}$$

$$9)\ C\to A \ \} \text{ по 17мин}$$

Поскольку все три окружности касаются, то радиус большей окр. равен

$R_3 = \frac{2R_1+2R_2}{2} = R_1+R_2$ (R_3 - радиус окр. с диаметром AC, R_1 - с диаметром AB, R_2 - с диаметром BC)

дуга AB равна 15 $\Rightarrow \frac{2\pi R_1}{2} = 15$

$R_1 = \frac{15}{\pi}$

аналогично $R_2 = \frac{25}{\pi}$

Тогда $R_3 = \frac{25}{\pi} + \frac{15}{\pi} = \frac{40}{\pi}$.

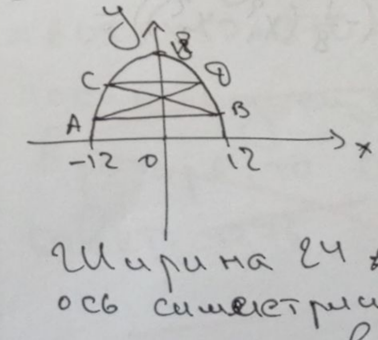
Тогда автомобиль проехал

$\cancel{4}\pi R_3 + 3\cdot\pi R_2 + 5\cdot\pi R_1 = \pi\left(\frac{40}{\pi} + 3\cdot\frac{25}{\pi} + \frac{15}{\pi}\cdot 5\right) =$

$= 40+75+75 = 190$

Ответ: 190км

№7



$y=-bx^2+a$

высота 18 $\Rightarrow$ парабола пересекает Oy в $(0;18) \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 18$

Ширина 24 $\Rightarrow$ }
ось симметрии параболы $x_0=0$ } $\Rightarrow$ парабола пересекает ось Ox в точках $(-12;0)$ и $(12;0)$.

Чистовик (лист №4)

$AB \parallel CD \parallel Ox$

$\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow \vec{DA} \cdot \vec{DB} = 0.$

~~$B(x_1;y_1)$, $A(-x_1;y_1)$, $D(x_2;y_2)$ $\Rightarrow \vec{DA} = \{-x_1-x_2; y_1-y_2\} = \{-x_1-x_2;$~~

$y = -bx^2 + 18$

при $y=0$, $\left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=-12 \end{array}\right. \Rightarrow 0 = -144b + 18$, $b = \frac{1}{8}$

$y = -\frac{1}{8}x^2 + 18$, $B(x_1;y_1)$, $A(-x_1;y_1)$, $D(x_2;y_2)$ $\Rightarrow \vec{DA} = \{-x_1-x_2; y_1-y_2\} =$

$= \{-x_1-x_2; -\frac{1}{8}x_1^2+18-(-\frac{1}{8}x_2^2+18)\} =$

$= \{-x_1-x_2; -\frac{1}{8}(x_1^2-x_2^2)\}$

$\vec{DB} = \{x_1-x_2; y_1-y_2\} = \{x_1-x_2; -\frac{1}{8}(x_1^2-x_2^2)\}$

скалярное умн. векторов в коорд.

$\vec{DA} \cdot \vec{DB} = 0 \Rightarrow (-x_1-x_2)(x_1-x_2) + (-\frac{1}{8}(x_1^2-x_2^2)) \cdot (-\frac{1}{8}(x_1^2-x_2^2)) =$

$= -(x_1^2-x_2^2) + \frac{1}{64}(x_1^2-x_2^2)^2 = 0.$

$\left[\begin{array}{l} x_1^2-x_2^2=0 \\ x_1^2-x_2^2=64 \end{array}\right.$

Но $|x_1| \neq |x_2| \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 64$

Поскольку $AB \parallel CD \parallel Ox$, расстояние между AB и CD равно $y_2 - y_1$.

$y_2 - y_1 = -(y_1-y_2) = -(-\frac{1}{8}(x_1^2-x_2^2)) =$

$= \frac{1}{8}(x_1^2-x_2^2) = \frac{1}{8} \cdot 64 = 8$

Ответ: 8

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик (лист №5)

№1

Вариантов выбрать вратаря 3.

Тогда нужно понять сколько вариантов выбрать 2 защитников и 3 нападающих. Но поскольку есть еще 3 универсала нужно рассмотреть случаи, когда берем или не берем их

Защитники	Нападающие
0	0
1	0
2	0
2	1
0	1
1	1
1	2
0	2
0	3

кол универсалов

Тогда вариантов набрать защитников и нападающих:

$C_5^2 \cdot C_6^3 + C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^3 + C_3^2 \cdot C_6^3 + C_3^2 \cdot C_6^2 + C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2 + C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_2^1 \cdot C_6^2 + C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1 + C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_6^1 + C_5^2 \cdot C_3^3 =$

$= \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 1} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 6}{2} + 3 \cdot 5 \cdot 6 + \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 3 \cdot 6 + \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 1 =$

$= 10 \cdot 20 + 15 \cdot 20 + 3 \cdot 20 + 45 + 450 + 90 + 90 + 180 + 10 =$

$= 200 + 300 + 60 + 45 + 450 + 180 + 180 + 10 =$

$= 605 + 450 + 370 = 605 + 820 = 1425$

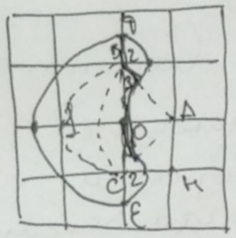
Поскольку еще 3 варианта выбрать вратаря, то всего вариантов $1425 \cdot 3 = 4275$

Ответ: 4275

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик (лист №6)

№2



Краска растечется за точку O (поскольку $R_2=\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-\frac{1}{2}<1$)

Поделим получившуюся фигуру на части 1, две части 2 и часть 3. Площадь части 1 будет считаться, как площадь полукруга с радиусом $(1+\frac{1}{2}=1,5)$. Площадь 2 частей будет считаться, как $\frac{90+45}{360}=\frac{3}{8}$ площади круга с радиусом $\frac{1}{2}$ (т.к. $\angle ФBA=90^\circ+45^\circ$). Площадь третьей части будет равна площади $\triangle ACB$ без площади $\frac{1}{4}$ круга радиуса $(\sqrt{2}-\frac{1}{2})$. ($\frac{1}{4}=\frac{90^\circ}{360^\circ}$, т.к. $\angle BAC=\angle BAO=\angle CAO=45^\circ$ ($\angle OAC=\angle CAH=45^\circ$, $\angle OAC+\angle CAH=90^\circ$)

Тогда площадь получившейся фигуры равен $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot1,5^2+2\cdot\frac{3}{8}\cdot\pi\cdot(\frac{1}{2})^2+\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4}\pi\cdot(\sqrt{2}-\frac{1}{2})^2=\frac{9\pi}{8}+\frac{3\pi}{16}+1-\frac{1}{4}\pi(1,5-\sqrt{2})=$ $(AB=AC=\sqrt{2})$

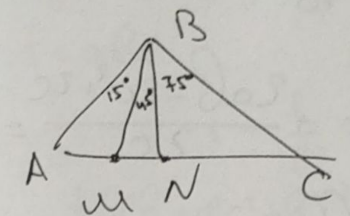
$=\frac{21\pi}{16}+1-\frac{3\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}\pi}{4}=\frac{\pi(21-6+4\sqrt{2})}{16}+1=$

$=\frac{\pi(15+4\sqrt{2})}{16}+1$

Ответ: $\frac{\pi(15+4\sqrt{2})}{16}+1$

Чистовик (лист №7)

№4



$S_{\triangle ABM}=S_1$, $S_{\triangle NBC}=S_2$, $S_{\triangle MBN}=S_3$, $S_{\triangle ABC}=S$

$S_1+S_2=5$, $S_1S_2=3$, $S-?$

$\begin{cases}S_1+S_2=5\\ S_1S_2=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}S_1=5-S_2\\ 5S_2-S_2^2=3 \ (1)\end{cases}$

1) $S_2^2-5S_2+3=0$

$D=25-12=13$

$S_2=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

$\left[\begin{array}{l}S_2=\frac{5+\sqrt{13}}{2}\\ S_2=\frac{5-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$

Так как если $S_2=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$, то $S_1=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$ и наоборот, пусть $S_1=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$, $S_2=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

$S_1=\frac{AB\cdot BM\sin15^\circ}{2} \Rightarrow BM=\frac{2S_1}{AB\sin15^\circ}$

$S_2=\frac{BN\cdot BC\sin75^\circ}{2} \Rightarrow BN=\frac{2S_2}{BC\cdot\sin75^\circ}$

$S_3=S-S_1-S_2=S-5$

$S_3=\frac{BM\cdot BN\sin45^\circ}{2}=\frac{4S_1S_2\sin45^\circ}{2\cdot AB\sin15^\circ\cdot BC\cdot\sin75^\circ}=$

$=\frac{2S_1S_2\sin45^\circ}{AB\cdot BC\cdot\sin15^\circ\cdot\sin75^\circ}$

$S=\frac{AB\cdot BC\sin\angle ABC}{2}=\frac{AB\cdot BC\sin120^\circ}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_3=\frac{2S_1S_2\sin45^\circ\cdot\sin120^\circ}{\frac{AB\cdot BC\sin120^\circ}{2}\cdot\sin15^\circ\cdot\sin75^\circ\cdot2}=\frac{S_1S_2\sin45^\circ\sin120^\circ}{S\sin15^\circ\sin75^\circ\cdot 2}=$

$=\frac{2S_1S_2\sin45^\circ\sin60^\circ}{S\sin30^\circ}=\frac{2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{S\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{S}=S-5$

$S^2-5S-3\sqrt{6}=0$

$D=25+12\sqrt{6}$

$S=\frac{5\pm\sqrt{25+12\sqrt{6}}}{2} \Rightarrow S=\frac{5+\sqrt{25+12\sqrt{6}}}{2}$ т.к. $\begin{cases}S>0\\ 5<\sqrt{25+12\sqrt{6}}\end{cases}$

Ответ: $\frac{5+\sqrt{25+12\sqrt{6}}}{2}$

Чистовик (лист №8)

№5 $a>0,\ b>0,\ c>0$

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=$$

$$=\frac{bc}{a}-a+1+\frac{ac}{b}-b+1+\frac{ab}{c}-c+1=$$

$$=\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc}-(a+b+c)+3$$

т.к. $x^2+y^2+z^2\geq xy+xz+yz$

$$\underbrace{\underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(x-z)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(y-z)^2}_{\geq 0}}_{\geq 0}=2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz\geq 0$$

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+xz+yz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2\geq ab\cdot bc+ac\cdot bc+ab\cdot ac=$$

$$=a^2bc+ab^2c+abc^2 \Rightarrow \text{т.к. } a>0,\ b>0,\ c>0$$

$$\Rightarrow \frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc}\geq a+b+c$$

$$\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc}-(a+b+c)+3\geq a+b+c-a-b-c+3=3\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ мин. значение − 3 (достигается при $a=b=c$)

Ответ: 3.

Черновик

$$\frac{bc}{a}-a+1+\frac{ac}{b}-b+1+\frac{ab}{c}-c+1$$

$t=abc$

$$\frac{t}{a^2}-a+1+\frac{t}{b^2}-b+1+\frac{t}{c^2}-c+1=$$

$$=\frac{t(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{t^2}-(a+b+c)+3$$

$$a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$$

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\geq a^2bc+ab^2c+abc^2$$

$$\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{abc}\geq a+b+c$$

$n=\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{100}}$ $\quad S(n)=a_1+a_2+\ldots+a_{100}$

$mn=$

~~10000~~ $100\cdot 9=900$

$10000\cdot 1=10000$

100 $\quad$ 100

$10^{99}\cdot 10^{99}=10^{198}$ $\quad 198$

10^{99} $\quad$ ~~101~~

$10^{99}+1$

$10^3+1.$

~~$1001\cdot 1001=1002001.$~~

~~$10^{100}-1$~~

$(a_1+a_2+\ldots+a_{100})\ \vdots\ 3$

$10^{99}\leq 3^k<10^{100}$

8

Чистовик (лист №8)

№8

$S(mn) = S(n)$ $1 \le m \le n$

Пусть $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{100}}$

Минимальное 100-значное число это 10^{99}

Давайте рассмотрим число n.

~~по моду~~

Если оно не кратно 3, то $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}) \not\vdots 3$. Но если мы умножим n на 3 ($1 \le 3 \le n$), то $3n \vdots 3 \Rightarrow$ ~~$(a_1 + a$~~ $S(3n) \vdots 3 \Rightarrow S(n) \ne S(3n) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~нет~~ $n \vdots 3$. Но поскольку признак кратности работает для любой степени 3, то $n = 3^k$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$n = 3^{\log_3 10}$~~

~~$k = \lfloor \log_3 10^{99} \rfloor$~~, т.к.

~~к.г~~

$k = \lfloor \log_3 10^{100} \rfloor$ - округл.

$n = 3^{\lfloor \log_3 10^{100} \rfloor}$