0 904484 630008

90-44-84-63
(40.10)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 13

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ульякина Михаила Юрьевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
∓	±	+	∓	±	+	+	0	60

4 8 12 4 8 12 12 0

60 (шестьдесят)

90-44-84-63 (40.10)

Чистовик

№1

вариантов выбрать вратаря – 2

для защитника три случая

1) универсалы, тогда вариантов для защитника C_3^2, а для нападающего C_8^3

2) защитники, тогда C_4^2 вариантов для защ.; C_{10}^3 для напад.

3) унив. и защ., тогда 3·4 и C_9^3.

$$2\cdot\left(3\cdot C_8^3+6\cdot C_{10}^3+12\cdot C_9^3\right)=$$

$$=6\left(\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}+2\cdot\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2}+6\cdot\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2}\right)=$$

$$=6\left(56+240+504\right)=6\cdot800=4800$$

Ответ: 4800

№4

длина дуги $AC=\pi\cdot R_{AC}=\pi\cdot(R_{AB}+R_{BC})=40$ км

$t=60+25=85$ мин

единственный вариант попасть из A в A за нечетное кол-во времени займет

$17+7+11=35$ мин и $15+25+40=80$ км.

$7\cdot4+11\cdot2=28+22=50$ мин.

$15\cdot4+25\cdot2=110$ км

$S=80+110=190$ км

путь: AC → CB → BA → AB → BC → CB → AB → AB → ABA.

Ответ: 190 км

~~черновик~~ чистовик

№ 5

$f(t) = \frac{2}{x-2}$ $\qquad t \neq 1$

$\frac{x+2}{x-2} = t$

$x+2 = t(x-2)$

$x(t-1) = 2(t+1)$

$x = \frac{2t+2}{t-1}$

$f(t) = \frac{1}{\frac{t+1}{t-1} - 1} = \frac{t-1}{2}$

$f(0) = -1/2$

$f(-1/2) = -3/4$

$f(f(t)) = \frac{t-1}{4} - \frac{1}{2}$

$f(f(f(t))) = \frac{t}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$

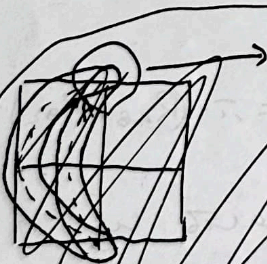
$\underbrace{f(f\ldots f(t))}_{12} = \frac{t}{2^{12}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \ldots - \frac{1}{2^{12}} =$

$= \frac{t}{2^{12}} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{12} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{t}{2^{12}} + \left(\frac{1}{2^{12}} - 1\right) = \frac{t}{2^{12}} - \frac{2^{12}-1}{2^{12}}$

$\frac{d f(f\ldots f(t))}{dt} = \frac{1}{2^{12}}$ тангенс наклона кас. – это производная в этой точке

Ответ: $1/2^{12}$

№ 2



$r_0 = 1$

$R_0 = \sqrt{2}$

$S_{б1} = \pi\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$ – т.к. половина окр.

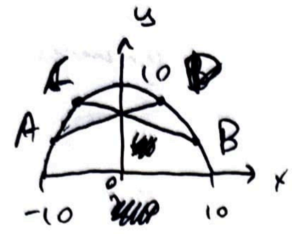
$S_{б2} = \pi\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$

$S_{м1} = \pi\cdot\left(\sqrt{2}+\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$

$S_{м2} = \pi\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$

3 из 6

черновик



$\Rightarrow y = 10 - \frac{x^2}{10}$

h - высота

$h = \Delta y$

$A_x = -B_x \qquad A_y = B_y$

$C_x = -D_x \qquad C_y = D_y$

отсчит. от $y=10$

$\angle ACB = \angle ADB = 90°$

$y = \frac{x^2}{10} \qquad x = \sqrt{10y}$

$\Rightarrow AC^2 + BC^2 = AB^2$

$(A_x - C_x)^2 + (A_y - C_y)^2 + (B_x - C_x)^2 + (B_y - C_y)^2 = 4B_x^2$

пусть $x_1 = B_x = -A_x \quad (A_x < 0)$

$y_1 = A_y = B_y$

$x_2 = -C_x = D_x \quad (C_x < 0)$

$y_2 = C_y = D_y$

$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4x_1^2 = 40y_1$

$(\sqrt{10y_1} + \sqrt{10y_2})^2 = 10y_1 + 10y_2 -$

$\overbrace{9\ldots9}^{n} = 10^n - 1$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 99 \\ 98 \\ \hline 792 \\ 891 \\ \hline 9702 \end{array}$$

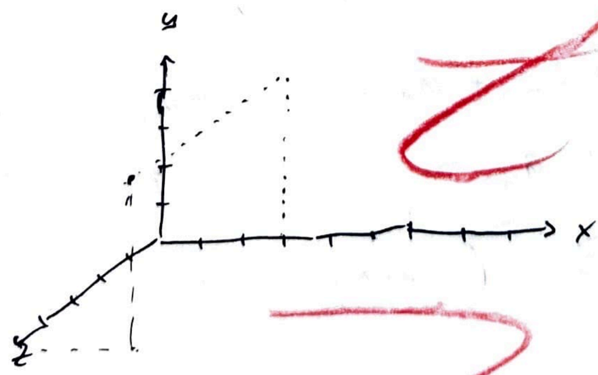
$99 \cdot 2 = 198$

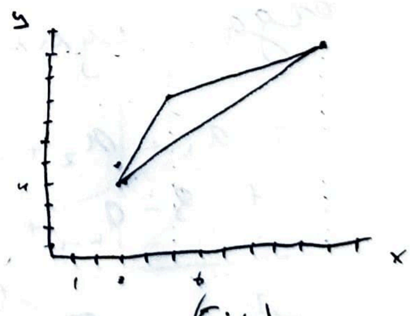
$99 \cdot 11 = 1089$

$99 \cdot 22 = 1980 + 198 = 2178$

$y \geq \frac{3}{4}(x-3) + 4 = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

число - 75 девяток





точки - (5; 4)

6;

чисто вик

число вида $\overbrace{99\ldots9}^{n} = 10^n - 1$ при умнож. на меньшее число m, ~~[illegible]~~ можно представить в виде

$m \cdot 10^n - m$. в m ~~меньше~~ не больше n разрядов.

Заметим, что число, которое оканчивается на 0 не влияет на сумму цифр, поэтому будем считать, что m не оканчивается на 0.
(т.е. число $m \cdot 10$ и m будут одинаково влиять на число, разница в 0 в конце числа).

Тогда пусть $m = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$

$a_1 > 0$, $a_n > 0$ $\quad a_i \le 9$ для всех чисел, и хотя бы одно строго меньше.

Тогда $m \cdot 10^n - m$ можно представить как $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots (a_n - 1)(9 - a_1)(9 - a_2)\ldots(10 - a_n)}$.

Тогда сумма $S(m \cdot \overbrace{99\ldots9}^{n}) =$

$= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n - 1 + 9 - a_1 + 9 - a_2 + \ldots + 9 - a_{n-1} + 10 - a_n = 9 \cdot n$, чтд.

Ответ: $\overbrace{99\ldots9}^{75}$ (число из 75 девяток)

90-44-84-63 (40.10)

чистовик

$$\begin{cases}(xy+3x-2y-6)\,|y-x-8| = (x-5)\,|xy+3x-2y-6| & (1)\\ \sqrt{y-x+10} = y-4 & (2)\end{cases}$$

$y-4 \geq 0 \Rightarrow y \geq 4$

$xy+3x-2y-6 = (x-2)(y+3)$

из (2) $y+3>0 \Rightarrow$

$\mathrm{sgn}(x-2) = \mathrm{sgn}(x-5) \Rightarrow x \in (-\infty; \boxed{2}] \cup (5;+\infty)$

$x=2$ ~~[illegible]~~ – всегда реш.!!

$y=-3$ не подходит из-за ур. (2)

~~[illegible]~~

$|y-x-8| = |x-5|$

$x = \frac{y-3}{2}$

1) $y-x-8 = x-5$ $\quad y = 2x+3$

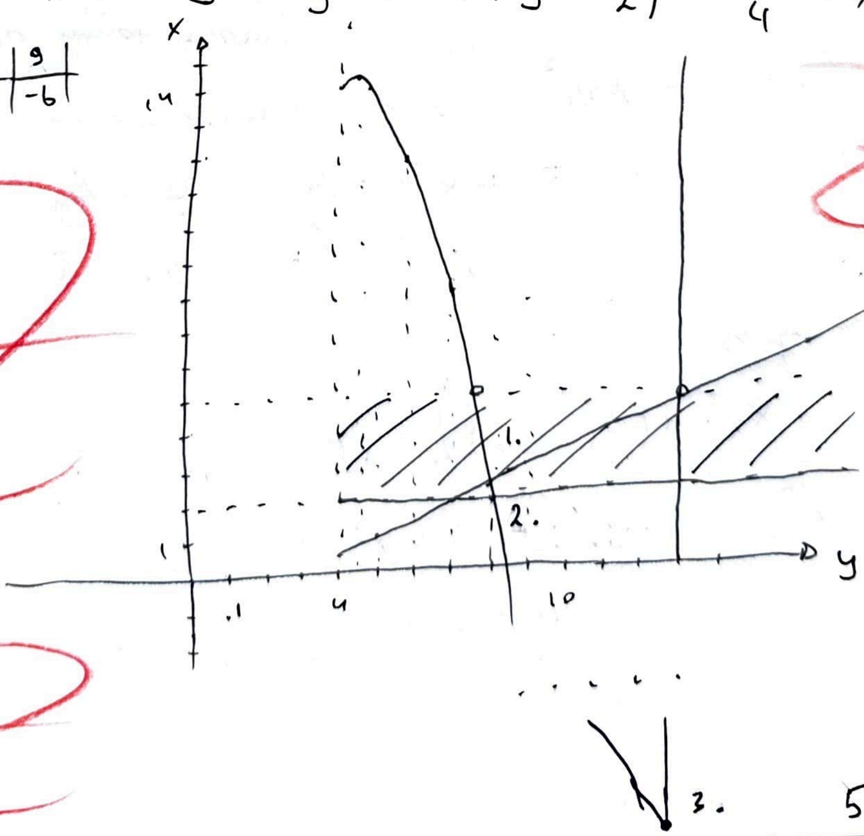
2) $y-\cancel{x}-8 = 5-\cancel{x}$

$y = 13$

(2) $y-x+10 = y^2-8y+16$ $\quad y>4$

$x = -y^2+9y-6 = -\left(y-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{57}{4} = 14{,}25-(y-4{,}5)^2$

y	5	6	7	8	9
x	14	12	8	2	-6



5 из 6

чистовик

1. $-y^2+9y-6=\frac{y-3}{2}$

$2y^2-17y+9=0$

$D=17^2-8\cdot 9=289-72=217$

$\Rightarrow \emptyset$

$2 < y = \frac{17+\sqrt{217}}{4} < 5$ $\cancel{x_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{217}}{8}\cdot 3\cdot 4=\frac{51\pm\sqrt{217}}{8}}$

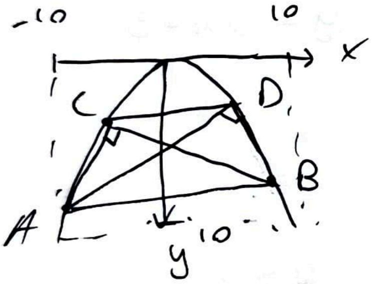
2. $(x;y)=(2;8)$

3. $x=-13^2+9\cdot 13-6=\cancel{-118}\ -4\cdot 13-6=-58$

$(x;y)=(-58;13)$

Ответ: $(-58;13)$ и $(2;8)$

№6



~~из~~ возьмем систему координат так, чтобы парабола была ветвями вверх.

$y=\frac{x^2}{10}$ $x=\sqrt{10y}$

высота точки отн. пола: $10-y$

$AC^2+BC^2=AB^2$ по т. Пифагора

пусть $x_1=B_x=-A_x$ $y_1=A_y=B_y$

$x_2=D_x=-C_x$ $y_2=D_y=C_y$

тогда

$((x_1+x_2)^2+(y_1-y_2)^2)+((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)=(2x_1)^2$

$(\sqrt{10y_1}+\sqrt{10y_2})^2+(\sqrt{10y_1}-\sqrt{10y_2})^2+2(y_1-y_2)^2=40y_1$

$20y_2-20y_1+2(y_1-y_2)^2=0$

$h=y_1-y_2$

$2h(10-h)=0 \Rightarrow h=10$

Ответ: 10

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

чистовик

$S_c = \frac{1}{8}\pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{72}$

$S_Д = \frac{\pi}{24}$

$(x-0)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

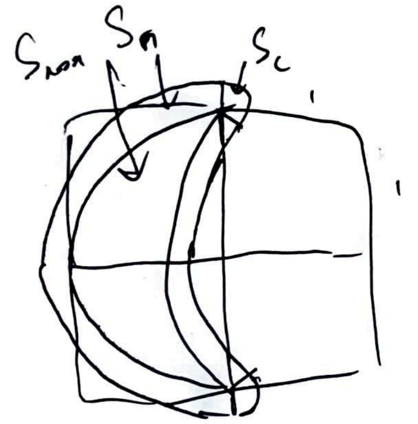
$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{3}\right)^2$

$S_1 = \pi h \left(r - \frac{h}{2}\right)$

$S_4 = S_2 - S_1$

$S_{общ} = S_{Б_1} - S_{Б_2} + S_{M_1} - S_{M_2} + S_Д - S_4 - S_c$

№2



$S_{пол.} = \frac{\pi \cdot 1}{2} - \frac{\pi \cdot 2}{4} + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$S_{пол.}$ – до частей.

$S_п$ – после, кроме S_c и $S_{пол.}$

$S_c = \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{24}$

$S_п = \frac{\pi \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2}{2} - \frac{\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot \left(\left(\sqrt{2} + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2\right)$

$= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\pi}{3}\left(2 + \sqrt{2}\right)$

$S = S_п + S_{пол.} + 2S_c = 1 + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}(2 + \sqrt{2}) =$

$= 1 + \frac{\pi}{12}(9 + 4\sqrt{2}) = 1 + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

Ответ: $1 + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi\sqrt{2}}{3}$