



*ДЕШИФР*

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 7

Место проведения Санкт-Петербург  
город

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

Олимпиада школьников Ломоносов  
наименование олимпиады

по Математике  
профиль олимпиады

Ульянова Александра Андреевна  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата  
« 25 » 02 2024 года

Подпись участника  
*[Signature]*

67-5787-81

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\Sigma$	Подпись	Расшифровка подписи
4	12	0	12	12	12	4	0	56		Костиков Г.Г.
										Мурсев Т.О.

1. Ответ неверный. Не учтены варианты, когда университет не выбирается.  $\ominus$

2. Ответ неверный вследствие арифметической ошибки.  
 $(\frac{3\bar{n}}{8} - \frac{\bar{n}}{8} = \frac{\bar{n}}{4})$   $\oplus$   
 Хотя решение верно. Ошибка вносилась  
 действительно

3. Ответ неверный.  
 $y = 13$  (верный) - отброшен.  
 Выбран корень, ~~который~~ не удовлетворяет  
 условиям равенства модулей.  $\ominus$

4. Ответ верный. Везде решение  
 верно  $\oplus$

---

5. Ответ верный. Решение верное

(+)

---

6. Ответ верный. Решение верное

(+)

---

7. Ответ верный. Недостаточное обоснование

(+)

---

8. Ответ неверный. Условие решения  
есть, но оно не реализовано  
до конца

(-)

---

67-57-87-31  
(43.6)

исходные черновики

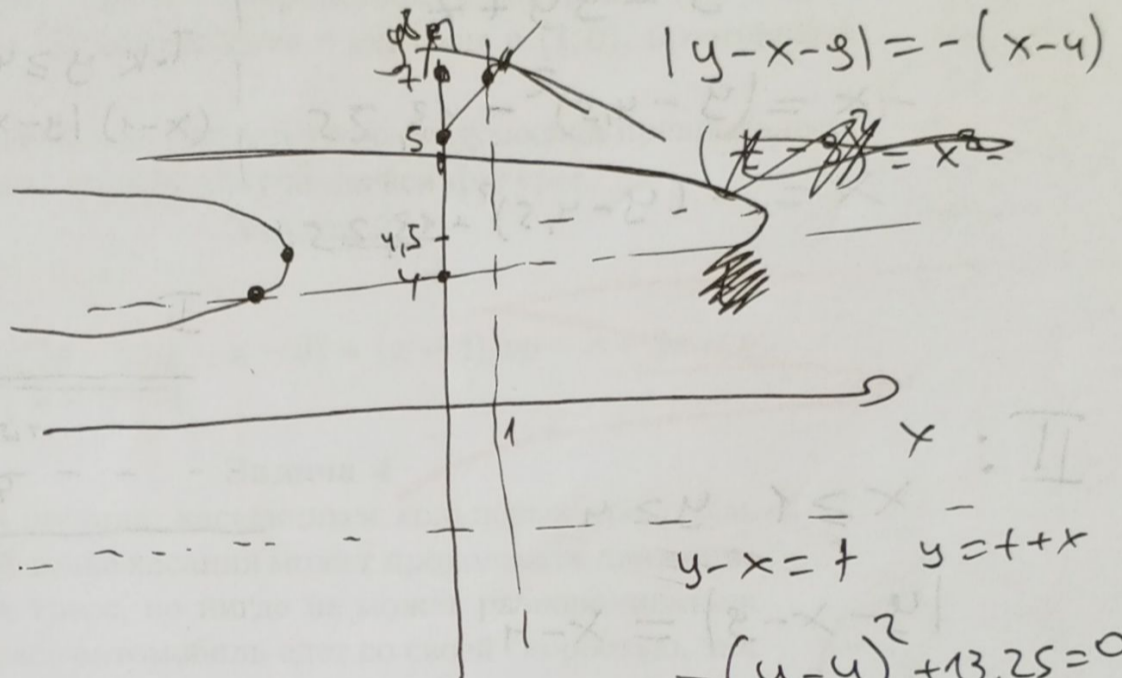
3

$$\begin{cases} (xy - 3 + 3x - y) |y - x - 9| = (x - 4) |xy - 3 + 3x - y| \quad (1) \\ \sqrt{y - x + 9} = y - 4 \end{cases}$$

(1):  $(x - 1)(y + 3) |y - x - 9| = (x - 4) |x - 1)(y + 3)|$

сравним

$$\begin{aligned} y &\geq 4 \\ y - x &\geq -9 \\ y &\geq -9 + x \\ x - 9 &\leq y \end{aligned}$$



~~Z~~

при  $y \geq 4 \Rightarrow y + 3 \geq 0$

(1):  $(x - 1) |y - x - 9| = (x - 4) |x - 1|$   $y - 4 = \pm \sqrt{13,25}$   
 $y = 4 + \sqrt{13,25}$

при  $x \geq 1$   
 $|y - x - 9| = (x - 4)$   
при  $y - x \geq 9$   
 $y - x - 9 = x - 4$   
 $y - 9 = 2x - 4$   
 $y = 2x + 5$

$9 = -(y - 4,5)^2 + 13,25$   
 $4,25 = y - 4,5$

~~Z~~

$y - x + 9 = (y - 4)^2$   
 $2x + 5 - x + 9 = (2x - 1)^2$   
 $2x + 5 - x + 9 = 4x^2 - 4x + 1$   
 $0 = 4x^2 - 5x - 13$   
 $x_1 = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 16 \cdot 13}}{8}$

при  $y \geq 4$   
 $y - x + 9 = (y - 4)^2 - y - 7$

$y - x + 9 = y^2 - 8y + 16$

~~###~~  $-x = y^2 - 8y + 25$

$x = (y - 4,5)^2 + 4,75$

$x = -(y - 4,5)^2 - 4,75$

$20,25(y - 4,5)^2 + 16 = 20,25(y - 4,5)^2 + 20,25$   
 $\times 13$   
 $\frac{16}{48} + \frac{20,25}{25}$   
 $\frac{20,25}{48} + \frac{20,25}{25}$   
 $\frac{20,25}{217}$

$\times 4,5$   
 $\times 4,5$   
 $20,25$

3) 
$$\begin{cases} (xy-3+3x-y)(y-x-9) = (x-4)(xy-3+3x-y) & (2) \\ \sqrt{y-x+9} = y-4 & (1) \end{cases}$$

(1) 
$$\sqrt{y-x+9} = y-4 \quad y \geq 4$$
  

$$y-x+9 = y^2 - 8y + 16$$
  

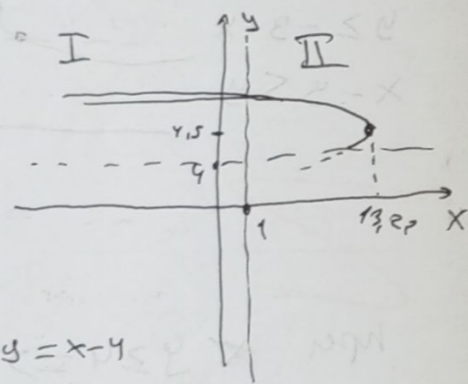
$$-x = y^2 - 9y + 7$$
  

$$-x = (y-4,5)^2 - 13,25$$
  

$$x = -(y-4,5)^2 + 13,25$$

(2) 
$$\frac{(x-1)(y+3)|y-x-9|}{|(x-1)(y+3)|} = (x-4)$$
  
 Т.к.  $y \geq 4$   

$$(x-1)|y-x-9| = (x-4)|x-1|$$



II: 
$$x \geq 1 \quad y \geq 4$$
  

$$|y-x-9| = x-4$$
  

$$y-x-9 = x-4$$

$$y+x+9 = x-4 \quad | \quad -y+x+9 = x-4$$
  

$$-y = -13 \quad | \quad -y = -13$$
  

$$y = 13$$
  

$$x = -(13-4,5)^2 + 13,25 = -8,25 + 13,25 = 5$$

$$x + \frac{14}{x} = (2x+1)^2$$
  

$$x + \frac{14}{x} = 4x^2 + 4x + 1$$
  

$$0 = 4x^2 - 3x - 13$$
  

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16 \cdot 13}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{217}}{4}$$
  

$$x = \frac{3 + \sqrt{217}}{4} \quad y = \frac{3 + \sqrt{217}}{2} + 5 = \frac{13 + \sqrt{217}}{2}$$

I: 
$$y \geq 4 \quad x \leq 1$$
  
 (2): 
$$|y-x-9| = -x+4$$
  

$$y-x-9 = -x+4$$
  

$$y = 13$$
  

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{217}}{4} \Rightarrow x = \frac{3 - \sqrt{217}}{4} < 0$$
  

$$y = \frac{3 - \sqrt{217}}{2} + 5 = \frac{13 - \sqrt{217}}{2} < 0$$
  
 Ответ: 
$$\left( \frac{3 + \sqrt{217}}{4}, \frac{13 + \sqrt{217}}{2} \right)$$

67-57-87-31 (43,6)

1) 
$$\begin{matrix} \text{ком: } 1B & 2B & 3H \\ \text{прет } 2B & 5B & 6H & 3H \end{matrix}$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$$

• Пусть будут всею одно университет:  
 если эти ун зашифрованы:  $2 \cdot 5 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 3$   
 если эти ун не зашифрованы:  $2 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 3$   
 два университета:  
 если зашифрованы:  $2 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2}$   
 если не зашифрованы:  $2 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2}$   
 если зашифрованы:  $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2}$

три университета:  

$$2B+1H: 2 \cdot 3 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2}$$
  

$$2H+1B: 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6$$
  

$$3H+0B: 2 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!}$$

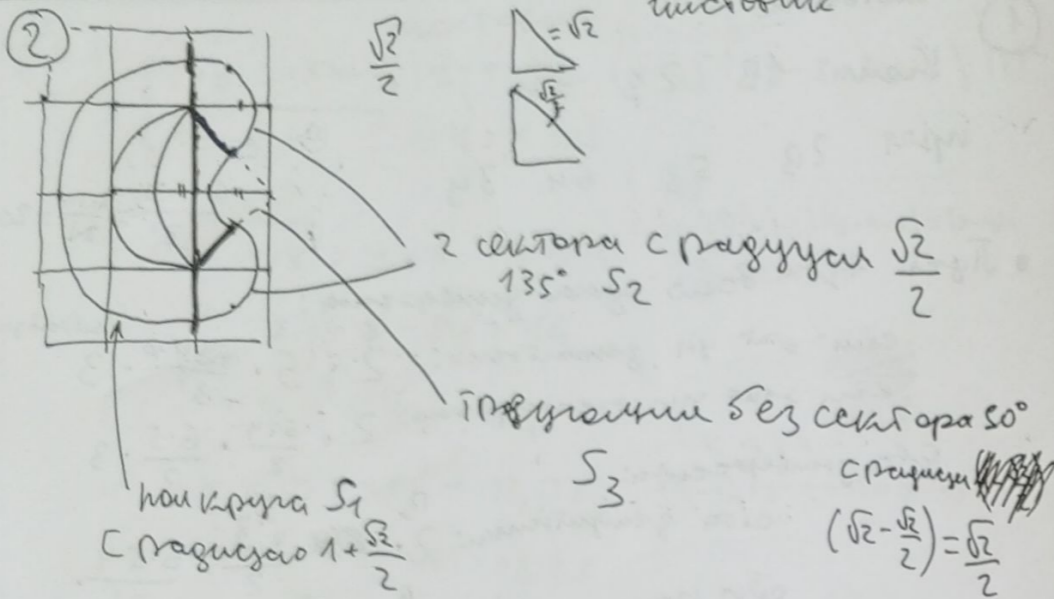
$$\sum = 10 \cdot 20 \cdot 3 + 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 20 + 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 15 + 2 \cdot 3 \cdot 15 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 + 2 \cdot 20 =$$
  

$$= 600 + 900 + 120 + 360 + 900 + 90 + 180 + 40 =$$
  

$$= 1500 + 480 + 1080 + 130 = 1980 + 1080 + 130 =$$
  

$$= 3060 + 130 = 3190$$

Ответ: 3190 способов



$$S_1 = \pi R_1^2 = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$S_2 = 2 \cdot \frac{135^\circ}{360^\circ} \pi R_2^2 = 2 \cdot \frac{45 \cdot 3}{45 \cdot 8} \pi R_2^2 = 2 \cdot \frac{3}{8} \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} \pi$$

$$S_3 = S_D - S_{\text{сектора}} = \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{\pi}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_\Sigma = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) + \frac{3}{8} \pi + 1 - \frac{\pi}{8} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) + 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} + 1$$

Ответ:  $\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1$

67-57-87-31  
(43.6)

$y = f(x)$   $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$  (5) численно

$$f\left(\frac{t-1}{t+1}\right) = f\left(\frac{t-1-1}{t-1+1}\right) = f\left(\frac{t-2}{t}\right) = f\left(\frac{t-1+t-1}{2t}\right) =$$

$$= f\left(-\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t+1} = -\frac{t+1}{t+1+t+1} = -\frac{t+1}{2t+2}$$

$$-\frac{1}{t} = k \Rightarrow t = -\frac{1}{k}$$

$$f(k) = -\frac{-\frac{1}{k}+1}{-\frac{1}{k}+1-1} = \frac{1+k}{2}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = t \Rightarrow x-1 = t(x+1) \Rightarrow -1-t = tx+1 \Rightarrow x = \frac{-1-t}{t-1}$$

$$f(t) = -\frac{1}{\frac{t+1}{t-1} + 1} = -\frac{1}{\frac{t+1+t-1}{t-1}} = -\frac{t-1}{2t}$$

$$f(t) = \frac{t+1}{2}$$

$$f(f(t)) = \frac{\frac{t+1}{2} + 1}{2} = \frac{t+1+2}{4} = \frac{t+3}{4}$$

$$f(f(f(t))) = f\left(\frac{t+3}{4}\right) = \frac{\frac{t+3}{4} + 1}{2} = \frac{t+3+4}{8} = \frac{t+7}{8}$$

$$f(f(f(f(t)))) = f\left(\frac{t+7}{8}\right) = \frac{\frac{t+7}{8} + 1}{2} = \frac{t+7+8}{16} = \frac{t+15}{16}$$

$$f\left(\frac{t+2^n-1}{2^n}\right) = \frac{\frac{t+2^n-1}{2^n} + 1}{2} = \frac{t+2^n-1+2^n}{2^{n+1}} = \frac{t+2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$$

$$g(x) = f(f(f \dots f(x))) = \frac{t+2^{n+1}-1}{2^{n+1}} = \frac{t+511}{512} = \frac{1}{512} + \frac{511}{512}x$$

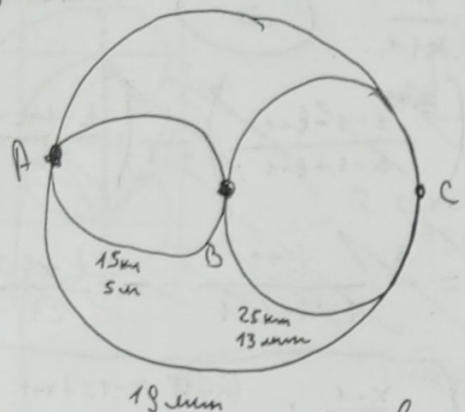
$$g'(x) = \frac{1}{512}$$

$$g'(0) = \frac{1}{512}$$

или  $t=0$   
 $x=1$   $\cos 3$   
все хорошо

Ответ:  $g' = \frac{1}{512}$

4



исходные  
Цель: найти минимальную  
длину маршрута

85 минут  
85 - километры  
5, 13, 19 - километры

Всего будет три маршрута  
минимального пути

пройдем по всем фигурам  
хотим бы 1 раз  
(иначе как бы путь был не миним.)

19 38 57 76 95  
13 26 39 52 65 78 91

80  
-13  
-77  
-19  
58

$$5n + 13b + 19c = 85$$

если всего пройдем по AC было бы не миним. => по AB и по BC  
тогда путь миним. и тогда путь не миним.

$$5n + 13b + 19c = 85$$

но AB и по BC  
тогда путь миним.  
и тогда путь не миним.

если по какой то дуге автомобиль проедет  
миним. количество раз то и по другим он  
проедет миним. количество раз не будет миним.

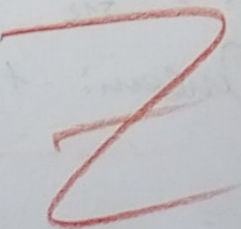
при этом по какой то дуге автомобиль проедет  
хотим бы 1 раз значит  $n \geq 1$   $b \geq 1$   $c \geq 1$   
 $n, b, c$  - целые

$$5(n-1) + 13(b-1) + 19(c-1) = 58$$

если  $c = 3$   
 $5(n-1) + 13(b-1) = 20$

$b = 1$   $n = 5$  - решение есть  
или  $c \geq 3$   $19(c-1) \geq 58$  или  $c = 4$

$$5(n-1) + 13(b-1) = 58$$



5

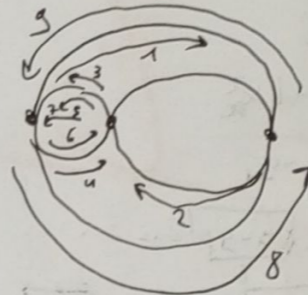
$$5(n-1) + 13(b-1) = 58$$

исходные

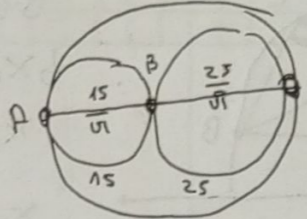
$b \neq 1$  делится на 5  
 $b = 3$   
 $5(n-1) = 58 - 26 \cdot 5$   $b \neq 3$   
 $b = 5$

$5(n-1) = 58 - 13 \cdot 5 < 0$   $b \neq 5$   
Большее решение нет

$b = 1$   $n = 5$   $c = 3$



пример  $\sum dist = 5 \cdot 15 + 25 + 3 \cdot AC$



$AC = \frac{40}{5}$   
 $AC = 40$

$$\sum dist = 75 + 25 + 3 \cdot 40 = 100 + 120$$

Ответ: 220 км

7

$$S(n) = S(mn)$$

и

при  $m = 9$

$$S(mn) : 9 \Rightarrow S(n) : 9$$

$$n : 9$$

$999 \cdot 2 = 1998$   
 $999 \cdot 3 = 2997$   
 $999 \cdot 9 = 8991$   
 $h = 9999$

Ответ:  $n = 9999 \dots 999$

$$10^{100} - 1$$

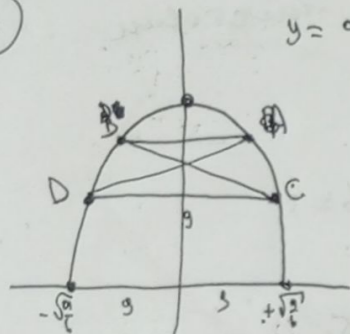
$9999 \dots 9999$   
 $+ 9999 \dots 9999$   
 $+ 19999999999$   
 $+ 99999999999$   
 $\frac{29999999999}{9} = 3333333333$   
если  $m < 9$   
тогда

$$9999999999 \cdot 9 = 89999999991$$

проверяем по последней цифре

6

$y = a - bx^2$  *методом*

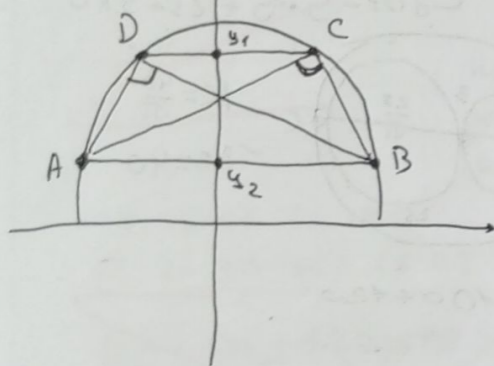


$a = 9$   
 $2\sqrt{\frac{a}{b}} = 18$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = 9$

$\frac{a}{b} = 81$

$b = \frac{1}{9}$   $y = 9 - \frac{1}{9}x^2$



$y_1 = a - bx^2$

$bx^2 = a - y_1$

$x_{DC} = \pm \sqrt{\frac{a-y_1}{b}}$

$x_D = -\sqrt{\frac{a-y_1}{b}}$   $x_A = -\sqrt{\frac{a-y_2}{b}}$

$x_C = +\sqrt{\frac{a-y_1}{b}}$   $x_B = +\sqrt{\frac{a-y_2}{b}}$

$AD = CB \iff \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_D - x_A)^2} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_C - x_B)^2}$

равно беденней тригонометрии

$\vec{AC} = \left\{ \sqrt{\frac{a-y_1}{b}} + \sqrt{\frac{a-y_2}{b}}; y_1 - y_2 \right\}$   $\vec{BC} = \left\{ \sqrt{\frac{a-y_1}{b}} - \sqrt{\frac{a-y_2}{b}}; y_1 - y_2 \right\}$

$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$  т.к.  $\angle ACB = 90^\circ$

$\frac{a-y_1}{b} - \frac{a-y_2}{b} + (y_1 - y_2)^2 = 0$

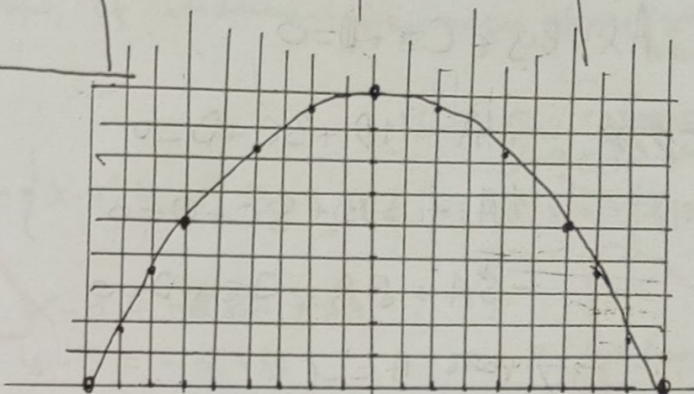
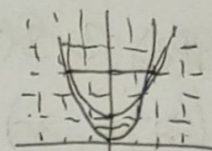
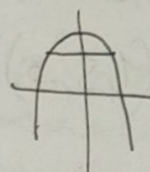
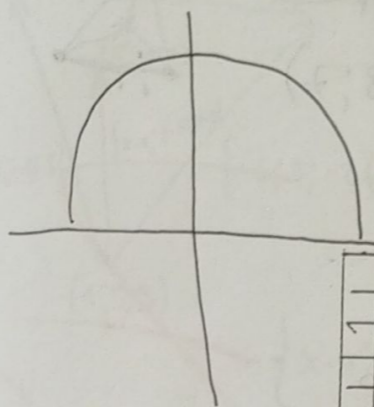
$\frac{a}{b} - \frac{y_1}{b} + \frac{a}{b} - \frac{y_2}{b} + (y_1 - y_2)^2 = 0$

$\frac{y_2 - y_1}{b} + (y_1 - y_2)^2 = 0$   $t^2 - 9t = 0$

$t = 0$   
 $t = 9$

ответ: 9

методом



$y = 9 - \frac{1}{9}x^2$

$y_4 = 9 - \frac{7}{9}$

$9 - 1,8$

$7,2$

$y_6 = 9 - \frac{36}{9}$

$9 - 4$

$y_7 = 9 - \frac{49}{9}$

$9 - 5,444$

$3,555$

$y_8 = 9 - \frac{64}{9}$

$9 - 7,111$

$1,888$

$1 + \frac{65}{4} + \frac{45}{8}$

$\frac{130}{8} + \frac{45}{8}$

$\frac{265}{8} + 1$

$\frac{273}{8}$

$\frac{273}{8}$

$\frac{90}{105}$

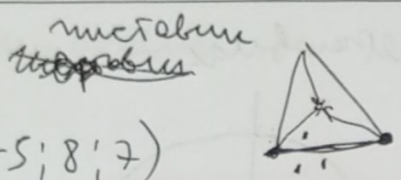
$-5 \cdot 8 + 26 \cdot 8 + 15 \cdot 7 - 273$

$21 \cdot 8$

$168 + 105 - 273$



⑧  $S(AB) \cap S(AM) \cap S(MA)$   
 $(-7; 4; 3) \quad (1; 5; 9) \quad (-5; 8; 7)$



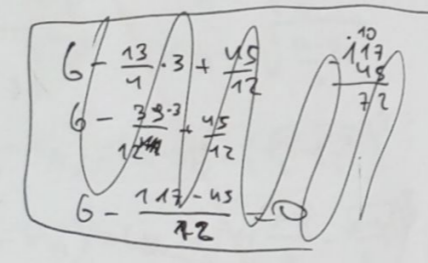
$Ax + By + Cz + D = 0$

~~-7A + 4B + 3C + D = 0~~  
 $-7A + 4B + 3C + D = 0$   
 $1A + 5B + 9C + D = 0$   
 $-5A + 8B + 7C + D = 0$

Положим  $A = -1$

$-7 + 4B + 3C + D = 0 \Rightarrow 4B + 3C + D = 7$   
 $1 + 5B + 9C + D = 0 \Rightarrow 5B + 9C + D = -1$   
 $-5 + 8B + 7C + D = 0 \Rightarrow 8B + 7C + D = 5$

$\frac{8+B}{6} = C$

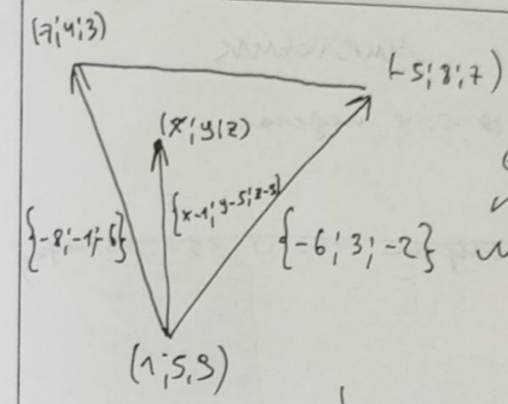


$6 - 3B + \frac{8+B}{3} = 0$   
 $18 - 9B + 8 + B = 0$

$26 = 8B$   
 $B = \frac{13}{4} \Rightarrow C = \frac{8 + \frac{13}{4}}{6} = \frac{32 + 13}{24} = \frac{45}{24} = \frac{15}{8}$   
 $D = -1 - 5 \cdot \frac{13}{4} - 9 \cdot \frac{45}{24} = -1 - \frac{65}{4} - \frac{8 \cdot 45}{24} = -\frac{273}{8}$

$x + \frac{13}{4}y + \frac{15}{8}z - \frac{273}{8} = 0$

$8x + 26y + 15z - 273 = 0$



Если  $(x; y; z)$  лежит в плоскости то ее можно выразить через сумму векторов

$\{x-1; y-5; z-9\} = \alpha \{-8; -1; -6\} + \beta \{-6; 3; -2\}$

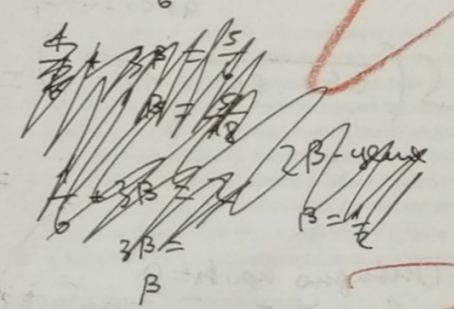
$x-1 = -8\alpha - 6\beta$   
 $y-5 = -\alpha + 3\beta$   
 $z-9 = -6\alpha - 2\beta$

$1 > \alpha > 0 \quad 1 > \beta > 0$   
 $\alpha + \beta \leq 1$  - условие  
 на границе  
 За третьей стороны

$6\alpha + 2\beta = \text{целое}$   
 $8\alpha + 6\beta = \text{целое}$   
 $\alpha + 3\beta = \text{целое}$

$2\alpha + 6\beta = \text{целое}$   
 $6\alpha = \text{целое}$   
 $\alpha = \frac{k}{6}$

$\frac{k}{6} + 3\beta = \text{целое}$   
 $k + 2\beta = \text{целое}$   
 $\frac{4}{3}k + 6\beta = \text{целое}$



$4k + 18\beta$   
 $k + 18\beta$   
 $k + 2\beta$

$\beta + \alpha = \frac{k}{6} + \frac{t}{2} \leq 1$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{18\beta}{2} + \frac{1}{2}$   
 $\beta = \frac{t}{2}$   

$k$	$t$
0	0
1	1
2	2

 $\Rightarrow k=1, 2, 3$   
 $k=0$

Ответ: ~~...~~ 12

листовик

$$\begin{array}{r} 1 \\ 99999 \dots 990 \\ + 999 \dots 999 \\ \hline 1099999999 \end{array}$$

$\Rightarrow m < 99$  и др.

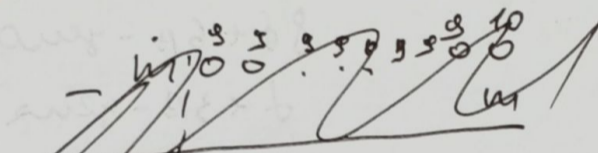
~~Становится очевидным то  $999 \dots 990$  по~~

$$m \cdot 10^{100} - 1$$

$$m \cdot 10^{100} - m$$

$$- m \underbrace{0000000000}_{100 \text{ zeros}}$$

Т.к  $m < 10^{100}$   
~~м~~  $m$  размещается  
раньше этого



Цифры  $m = \overline{abc \dots fgh}$

$$\begin{array}{r} \overline{abc \dots fgh} \cdot 10^0 \\ - \overline{abc \dots fgh} \cdot 10^{-h} \\ \hline \overline{abc \dots fg} \cdot 10^{(h-1)} \end{array} \begin{array}{r} 99999999 \\ \overline{abc \quad fgh} \\ \hline 9-9 \quad 9-9 \quad 9-9 \quad 10-h \end{array}$$

$$\sum (\overline{abc \quad fgh} \cdot 10^{100-h}) = a + b + c + \dots + f + g + h + \dots + 1 + 9 - a + 9 - b + 9 - f + 9 - g + \dots + 9$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{100 \text{ раз}}$

Очевидно при  $h=0$

все те же буквы работают,  $= 9 \cdot 100 = \text{const} \Rightarrow S(m) = S(h)$

Ответ:  $n = 10^{100} - 1$

