0 189295 930008

18-92-95-93
(40.22)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 15

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ушакова Сергея Антоновича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» 02. 2024 года

Подпись участника
Ушаков

18 - 52 - 95 - 93

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
+	+	−	+	+	0	+	0	60
12	12		12	12		12		

60 (шестьдесят) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

18-92-95-93
(40.22)

Черновик

$C_3^1 + C_7^2 + C_8^3$ $\quad 79 + 72 = 158$ $\quad -34 = -6 \cdot 6 - 2($

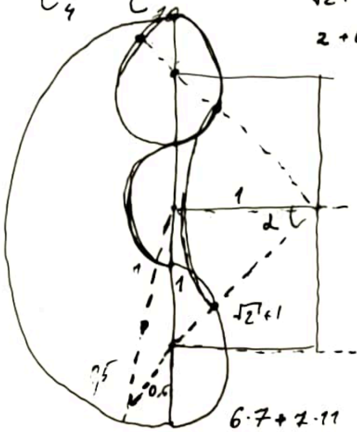
$C_9^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_9^3$ $\quad \frac{553}{5688}$ $\quad 34 \quad 51 = 7 \cdot 8$

$17 \; 7$

$C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{10}^3$ $\quad \sqrt{2} + 0,5 \quad -6 \quad 7 \quad 7 \cdot 5 + (7-6)$

$2 + 0,5$ $\sqrt{1 + \sqrt{2}^2 + 0,25 + \sqrt{2} - 2\cos\alpha(\sqrt{2}+0,5)}$

$\sqrt{1 + 3 + 2\sqrt{2} - 2\cos\alpha(\sqrt{2}+1)}$



$4 + 2\sqrt{2}(1 - \cos\alpha)$ $\quad 8 \cdot 7 + 11$

$(4 + 2\sqrt{2} - 2(\sqrt{2}+0,5)\cos\alpha)$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$4 + 2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$

$2 + \sqrt{2} \vee (1,5)^2$

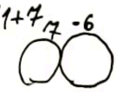
$6 \cdot 7 + 7 \cdot 11$

$18 \quad 85 = 5 \cdot 17 \quad 4(-6) + 1 \cdot 7 \quad 0,25 \vee \sqrt{2}$ $\quad 44 + 7 = 51$ $+ 34$

$11 + 7 \quad 7 \; -6$

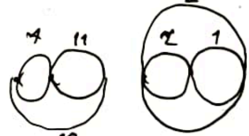
$3,25 + \sqrt{2} - 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$1 + \cancel{4,25} \; \frac{1}{4}\left(4,5 - \cancel{2,25} - \sqrt{2} + \cancel{0,75}\right)$ $\quad 1,25 + \frac{1}{\sqrt{2}} \vee (1,5)^2$



$\frac{1}{\sqrt{2}} \vee 1$ $\quad 5 \cdot 7 + 3 \cdot 11$ $\quad 35 + 35 = 78 + 17$

$\frac{3 - \sqrt{2}}{4}\pi$



$17 = 2 \cdot 7 + 3(7-6)$

$y^2 - 10y + 5 = y - x + 8$

$(xy + 2x - y - 2)\,|y - x - 10| = (x-4)\,|xy + 2x - y - 2|$ $\quad y^2 - 11y + x - 3 = 0 \quad 8,25$

$(x-1)(y+2)\,|y - x - 10| = (x-4) \cdot |(x-1)(y+2)|$ $\quad D = 121 - 4x + 12$ $\quad 133 - 4x$

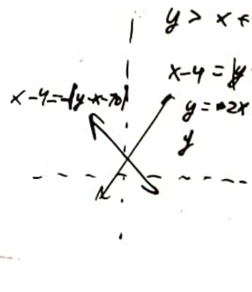
$y - x + 8 > 0$

$\sqrt{y - x + 8} = y - 5$ $\quad y > x + 10 \quad y > x - 8$

$y = \frac{11 \pm \sqrt{133 - 4x}}{2} =$

$x - 4 = |y - x - 10|$

$= 5,5 \pm \sqrt{33,25 - x}$



$\cdot \; -10$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Чистовик 1/6

№ 1

выбрать вратаря — 1 из 3 C_3^1

выбрать 2-х защитников:

I 2 из 3 (универсалов) $C_3^2 = C_3^1$

II 1 из 3 (унив.) и 1 из 4 (защ.) $C_3^1 \cdot C_4^1$

III 2 из 4 (защ.) C_4^2

выбрать 3-х нападающих:

если I, то 3 из 8 (1 ост. унив. и 7 напад.) C_8^3

если II, то 3 из 9 (2 ост унив и 7 напад.) C_9^3

если III, то 3 из 10 (3 унив и 7 напад.) C_{10}^3

$S = C_3^1 \left(C_3^1 \cdot C_8^3 + C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_9^3 + C_4^2 \cdot C_{10}^3\right) =$

$= 3\left(3 \cdot \frac{8\cdot7\cdot6}{6} + 12 \cdot \frac{9\cdot8\cdot7}{6} + \frac{4\cdot3}{2} \cdot \frac{10\cdot9\cdot8}{6}\right) =$

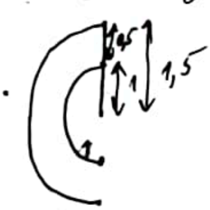
$= 3(7\cdot3\cdot8\cdot7 + 8\cdot3\cdot30) = 8\cdot9\cdot79 = \cancel{8865}$ 5688

Ответ: 5688 вар.

№ 2

Рассмотрим левую дугу,

её верхняя ~~гр~~ граница — ~~окр~~ дуга окр рад. 1,5 с ц. в (0;0),



т.к. для ~~любой точки из дуги~~ 1 точка, с наибольшим расстоянием на перп. к кас. в этой точке равна 0,5

если бы была точка вне этой окр., то мин расст до изн. дуги было бы больше 0,5, т.к. соотв окр рад. больше чем 1,5, а точки между дуг сущ окр рад $\in [1,5; 1]$ с ц. в (0;0) кот. прин. эта точка $\Rightarrow$ мин. расст. до изн. дуги $\leq 0,5$

Чистовик 2/6

аналогично внутр граница – дуга с рад. 0,5 с ц. в $(0,0)$,
т.к. если расст до $(0;0) < 0,5$, то расст до дуги рад 1 $\geq 0,5$
а если расст. до $(0;0) \geq 0,5$, то расст до дуги рад 1 $\leq 0,5$

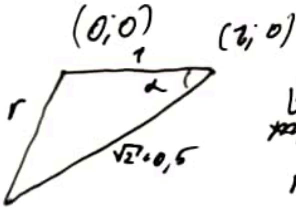
изм.
т.к. это дуга а не окр, то в т. $(0;1)$ и $(0;-1)$ ~~Един~~ закрашены
также полукруги при $x \geq 0$ $r=0,5$

в итоге:

– 1-я фигура

для второй дуги – аналогично дуги радиусов $\sqrt{2}-0,5$ и $\sqrt{2}+0,5$
и окр рад. 0,5 в $(0;1)$ и $(0;-1)$
докажем, что внешняя дуга второй ~~окр~~ дуги лежит в области
1-й:

рассмотрим напр $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$



тогда $r^2 = 3,25 + \sqrt{2} - 2\cos\alpha(\sqrt{2}+0,5)$

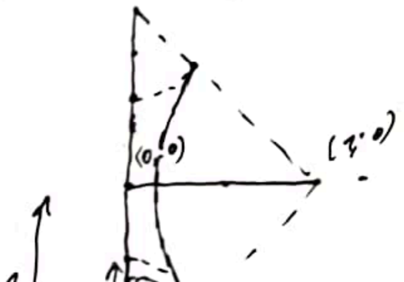
$\Rightarrow$ r – max, когда $\cos\alpha$ – min
r – min, когда $\cos\alpha$ – max
$\cos\alpha_{max} = 1$ $\cos\alpha_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$r^2_{min} = 3,25 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 0,5 = 2,75 - \sqrt{2} > (0,5)^2$

$r^2_{max} = 3,25 + \sqrt{2} - 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1,25 - \frac{1}{\sqrt{2}} < (1,5)^2$

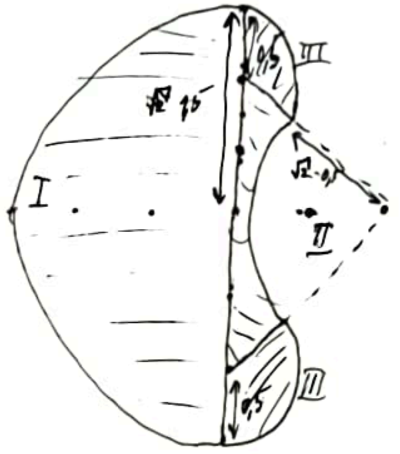
$\Rightarrow$ лежит в 1-й фигуре

внутренняя дуга 2-й:



Чистовик 3/6

в результате фигура:



$$S=\left(\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot1{,}5^2\right)+\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}-\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot(\sqrt{2}-0{,}5)^2\right)+\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\cdot0{,}5^2\right)=$$

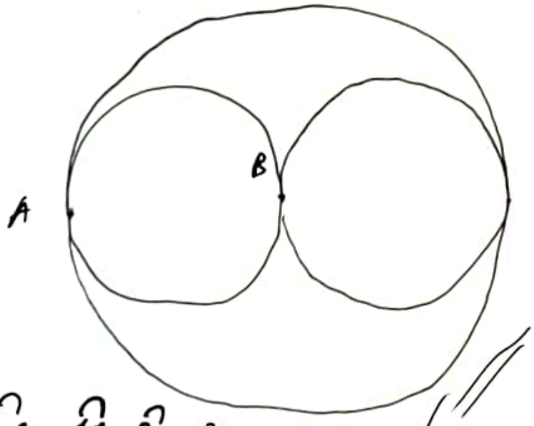
$$=1+\frac{3-\sqrt{2}}{4}\pi$$

Ответ: $\frac{3-\sqrt{2}}{4}\pi+1$

№4

т.к. вернулся в т. A то либо все количества чётные или все не чётные

1 ч 25 мин = 85 мин = $= 5\cdot17$



C

$t_{AC} \overset{17}{\equiv} 0$

$t_{AB} \overset{17}{\equiv} \boxed{7}$ $[t_{AB}]=7$

$t_{BC} \overset{17}{\equiv} \boxed{-6}$ $[t_{BC}]=-6$

$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=34$

$m_1[t_{AB}]+m_2[t_{BC}] \vdots 17$

если $m_1[t_{AB}]+m_2[t_{BC}]>0$:

$\checkmark\, n\cdot 7+k(1)=17$

$n=2$ $k=3$ n и k одинак. чётности если n - нечёт, то

$\times\, n\cdot7+k\cdot1=34$

$n=4$ $\underline{k}=6$ много

$\times\, n\cdot7+k\cdot1=51$

$n=8$ $\underline{k}=5$ много

$\times\, n\cdot7+k=68$

$n=9$ $k=4$ $44+9\cdot7>85$

$\times\, n\cdot7+k=85$

$n=12$ $k=1$ $13\cdot7+11>85$

$t_{AB}+t_{BC}=1$

т.к. $5(t_{AB}+t_{BC})$ - слишком много, то

$k(t_{AB}+t_{BC})$ k - ~~не более~~ менее 5

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

18-92-95-93 (40.22)

если $m_1[t_{AB}]+m_2[t_{BC}]>0$, то подходит только чистовик 4/6

$m_1=n+k=5$

$m_2=k=3$

$5\cdot 7+11\cdot 3=68$

$\Downarrow$

1. t_{AC} остается

т.к. все неч., а сумма $t=85$, то подходит

$S=5\cdot 13+3\cdot 21+34=65+63+34=162$ км

если $m_1[t_{AB}]+m_2[t_{BC}]\le 0$

при -6 n - менее 8, т.к. $8\cdot 11=88>85$

$-6n+k=0$
$n=1$ $k=6$ много

$-6n+k=-17$
$n=3$ $k=1$ ~~много~~
$n+k=4$ - чёт $k=1$ - неч $\Rightarrow$ неподх.

$-6n+k=-34$
$n=6$ $k=2$ $88+14>85$

$-6n+k=-51$
$n=9$ $k=3$ много

больше нет смысла рассм.
т.к. n уже будет больше 7
$\Downarrow$

~~только 1 вар. $\Rightarrow$~~
~~0 вар при $m_1 t_{AB}+m_2 t_{BC}$~~
0 вар если $m_1[t_{AB}]+m_2[t_B]<0$
$\Downarrow$
1 ответ

Ответ: 162 км

№5

$f(0)=-1$

$x=\frac{y-2}{y+2}\Rightarrow y=\frac{-2(x+1)}{x-1}$

$f(x)=\frac{-2}{\frac{-2(x+1)}{x-1}+2}=\frac{-1(x-1)}{-x-1+x-1}=\frac{x-1}{2}$ $f(-2)$ - не сущ.

$f(f(x))=\frac{\frac{x-1}{2}-1}{2}=\frac{x-1}{2^2}-\frac{1}{2}\Rightarrow \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n}=\frac{x-1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-2}}\dots-\frac{1}{2}$

Черновик

$2x+6=x+10$

$f(0)=-1 \quad x=16$

$1\overbrace{0000000}^{90}\overset{1}{0}$

$f(-x)=\frac{2\cdot(x-1)}{2(-x-1+x-1)}=\frac{x-1}{-2}$

$\frac{y-2}{y+2}=x$

$f(f(x))=\frac{\frac{x-1}{-2}-1}{-2}=\frac{x-1}{(-2)^2}+\frac{-1}{-2}$

$yx+2x=y-2$

$y(x-1)=-2-2x$

$f(f(f(f(x))))=\frac{x-1}{(-2)^2}$ $k+1$ $\overbrace{\quad}^{88}$

$y=\frac{x-1}{-2(x+1)}$ $\frac{-2(x+1)}{x-1}$

$f(0)=-1$ $k\cdot10^{89}$

$f(-1)=-1$

$\overbrace{\quad}^{89}$ $\cdot10\overbrace{00000}^{89\,max}$

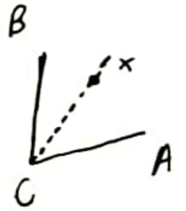
$\overbrace{99\quad0}^{89}$

99999999

$\bar{A}=(-1;-3-1)$

$\bar{B}=(1;3;-4)$

$\bar{C}=(-5;-5-5)$



10000...

1

$CX\times CA>0$

1

$\overline{CA}=(4;2;4)$

$\overline{CB}=(6;8;1)$

$\underbrace{10(10)01}\,\underbrace{0000000000}_{88}$

~~$\overline{CA}\times\overline{CB}=\begin{vmatrix}4&2&4\\6&8&1\end{vmatrix}$~~ $2-$

$CB\times CA=\begin{vmatrix}6&8&1\\4&2&4\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot30+\bar{j}\cdot(-20)+\bar{k}\cdot(-20)$

19

$3x-2y-2z=0$ $\underbrace{9000000}_{989}$ $(2\cdot10^{90}-2)\cdot10$

90

180

189

198

204

$1\underbrace{\quad}_{89}8$

$(k\cdot10^{90}-k)\cdot10^{89}$

2 7

3 6

$k\cdot10$

$k_p+a_{bc}\cdot10^{90}-$

8 1

9 0

10 89

11 88

Чистовик 5/6

$g(x) = \frac{x-1}{2^{11}} - \frac{1}{2^{10}} - \frac{1}{2^9} \dots - \frac{1}{2}$

$g'(x) = \frac{1}{2^{11}} \quad x \neq -2$

$g'(0) = \frac{1}{2^{11}}$, а ~~ту~~ тангенс угла как - это и есть ~~тур~~ производная

Ответ: $\frac{1}{2^{11}}$

№7

это число $n = \underbrace{9 \dots 9}_{90 \ 9\text{-к}}$

~~сумму~~ ~~$m \cdot n = \sum_{i=0}^{90} \underbrace{9 \dots 9}_{90} \cdot m_i \cdot 10^i = m_i \sum_{i=0}^{90} m_i \cdot 10^{90+i} - m_i \cdot 10^i$~~

~~пусть m_i - число~~ на i позиции ~~в~~ с конца

m_i - цифра на i поз. с конца в m

~~Т.е.~~ $m \cdot n = 10^{90} \cdot m - m$ в число m - не более 90 порядков $\Rightarrow$ разность будет выглядеть вот так:

$$\begin{array}{r} \overline{m_{89} \dots m_0 \overbrace{00 \dots 00}^{90}} \\ - \quad \overline{m_{89} \dots m_0} \\ \hline m_{89} \dots (m_0-1) \end{array}$$

пусть m_0 без нулей вначале ведь если не так, то m можно представить как $m' \cdot 10^k$, $k \in \mathbb{N} \cup 0$ где m' - число без нулей вначале, и $S(m) = S(m')$, т.к. $m'_i = m_{i+k}$, а $m_{k-x} = 0$, $x \in \mathbb{N}$ и можно вместо m рассматривать m'

$$\begin{array}{r} m'_{89} \dots m'_0 \overbrace{00 \dots 0}^{90} \\ m_0 \dots m_0 \\ \hline \end{array}$$

$\forall m \in \{1; \dots n\} \ S(mn) = S(n)$

$mn = \overline{m_{89} \dots m_1 (m_0-1) (9-m_{89}) \dots (10-m_0)}$

$S(mn) = m_{89} + \dots m_0 - 1 + (9 - m_{89}) + \dots (9-m_0) + 1 = 90 \cdot 9 = S(n)$

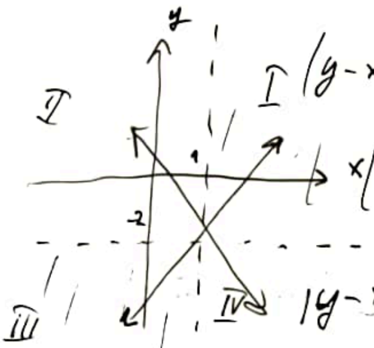
Чистовик 6/6

Ответ: $n = \underbrace{9\ldots9}_{90}$

№ 3

$(xy+2x-y-2)|y-x-10| = (x-4)|xy+2x-y-2|$

$(x-1)(y+2)|y-x-10| = (x-4)|(x-1)(y+2)|$



I $|y-x-10| = (x-4)$

IV $|y-x-10| = -(x-4)$

I и III

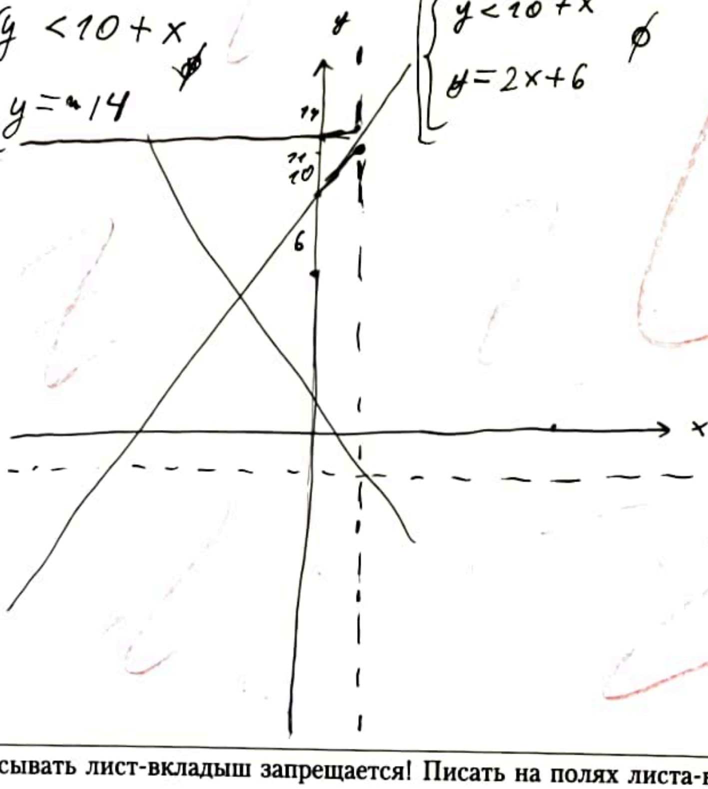
$y-x-10>0$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \ge 10+x \\ y = 2x+6 \end{cases} \\ \begin{cases} y < 10+x \\ y = 14 \end{cases} \ \varnothing \end{array}\right.$

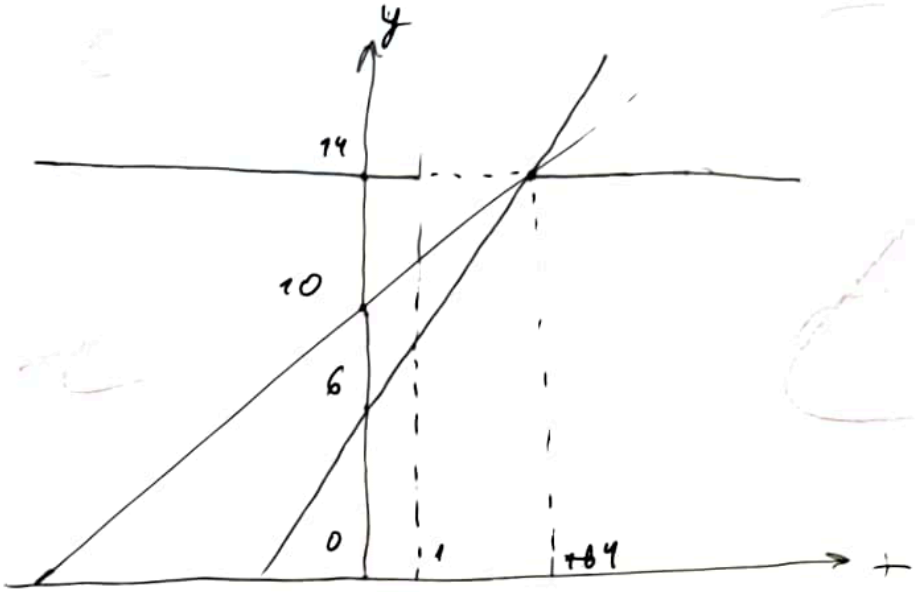
II и IV

~~$y-x-10>0$~~

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \ge 10+x \\ y = 14 \end{cases} \\ \begin{cases} y < 10+x \\ y = 2x+6 \end{cases} \ \varnothing \end{array}\right.$



Чистовик 7



$$\sqrt{y-x+8}=y-5$$

$$y^2-11y+x+17=0$$

$$D=121-68-4x=53-4x$$

$$y=5{,}5\pm\sqrt{13{,}25-x}$$