



29-50-88-48
(38.4)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант _____

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Фаламеева Сергея Яковича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Время выполнения: 14:27

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
29-50-88-48	100	15	15	15	15	15	10	15	

Черновик.

$m, n \in \mathbb{Z} \quad m \neq n$

$a, b \in \mathbb{Z}$

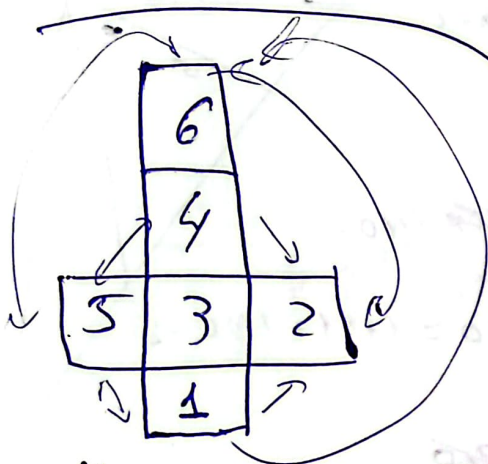
$(a+b-?)$

$\frac{1}{m} - 2 + \frac{1}{n} - 2 = -9$
 $(\frac{1}{m} - 2) / (\frac{1}{n} - 2) = b.$

100 Абу
(сто)

$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 4 - a$

$\frac{1}{mn} - 2(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}) = b - 4 \Rightarrow \frac{1}{mn} - 2(4 - a) = b - 4.$



$\frac{1}{m} \in \mathbb{Z}$

$m = 1$

$n = -1$

$a = 4$

$-1 - 2 \cdot 0 = b - 4.$

$b = 3 \Rightarrow \text{ответ: } 2.$

Камнями только с 4, 3, 2, 1

Таблицы так, что соседних $\neq 7$.

$1 \rightarrow 1? \rightarrow 3, 4, 6$

$13 \rightarrow 5, 6$

$14 \rightarrow 5, 6$

$15 \rightarrow 6$

$4 \rightarrow 45 \rightarrow 6, 7$

$46 \rightarrow 7$

$2 \rightarrow 23 \rightarrow 5, 6$

$24 \rightarrow 5, 6$

~~26~~ $26 \rightarrow 7$

~~34~~ $35 \rightarrow 6, 7$

$36 \rightarrow 7$

$85 - 17 \cdot 3 =$

$= 17 \cdot 2$

Черновик.

$$3 + \min \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c \right)$$

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b=c$$

$$bc = a^2$$

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c \geq \frac{bc}{a} + a - b - c \geq$$

$$\geq \sqrt{bc} - b - c = -(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2$$

~~$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c \geq \frac{bc}{a} + a - b - c \geq$$~~

~~$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \sqrt[3]{abc} \leq a+b-c$$~~

Для минимальных x =

$$\frac{100 \cdot 10^1}{1000} + \frac{100 \cdot 1000}{100} + \frac{1000 \cdot 10}{100} - 1110 =$$

$$7x \equiv 2 \pmod{11}$$

$$2 \leq x \leq 6$$

$$-x \equiv 6 \pmod{11}$$

$$x \equiv 5 \pmod{11}$$

$$= 1 + 1010 + 100 - 1110 = 1111 - 1110 = 1$$

~~$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - (a+b+c)abc \geq 0$$~~

~~$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 \geq 0$$~~

~~$$(1) abc(ab-c^2) + bc(bc-a^2) + ac(ac-b^2) \geq 0$$~~

$a \geq b \geq c$

$$b^2(c^2 + a^2 - ac) + b(-a^2c - ac^2) + c^2a^2 \geq 0$$

$$7x \equiv 1 \pmod{11}$$

$$2 \leq x \leq 3$$

(!!) $0 \leq 0$

$$(a^2c + ac^2)^2 \leq 4c^2a^2(c^2 + a^2 - ac)$$

~~$$ac + bc + ca$$~~

$$(ac + c^2)^2 \leq c^2(c^2 + a^2 - ac)$$

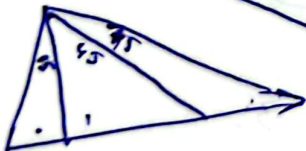
$$(a+c)^2 \leq 4(c^2 + a^2 - ac)$$

где

$$a^2 + c^2 + 2ac \leq 4c^2 + 4a^2 - 4ac$$

$$6ac \leq 3c^2 + 3a^2$$

что верно.



$$-x \equiv 3 \pmod{11}$$

$$x \equiv 8 \pmod{11}$$

00

● 0.0000000000

00

5 девочек

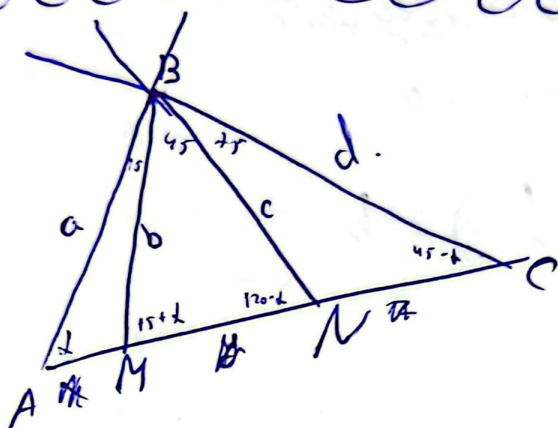
$P_1 = n$ девочек на стульях

$$P_2 = 2$$

$$P_{n+1} =$$

29-50-88-48
(38.4)

Чертежи:



$\angle ABC = 135^\circ$

$S_{ABM} = \frac{1}{2} h x$

$S_{NBC} = \frac{1}{2} h z$

$\Rightarrow \frac{1}{2} h(x+z) = 10 \Rightarrow h^2(x+z)^2 = 100$

$h^2 x z = 12$

$7 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 11 \rightarrow 5,5 \rightarrow 10,5 \rightarrow 7,25$

$\frac{(x+z)^2}{xz} = \frac{25}{3}$

$3x^2 + 3z^2 + 6xz = 25xz$

$3x^2 - 19xz + 3z^2 = 0$

$D = 361 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 361 - 36 =$

$= 325 = 5 \cdot 65$

$\frac{19 \pm \sqrt{325}}{6}$

$a_1 = 3,5$

$a_2 = \frac{a_1 + 7}{2}$

$a_1 = 6$

$a_2 = 5,5$

$a_i = \frac{a_{i-1} + 7}{2}$

$7 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 11 \rightarrow 5,5 \rightarrow 10,5 \rightarrow 7,25$

$7 \rightarrow 12 \rightarrow$

~~$7 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 11 \rightarrow$~~

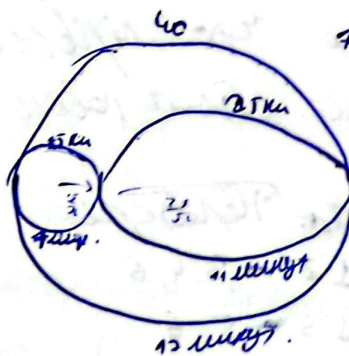
$7 \rightarrow 12 \rightarrow 17 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow$

$7x + 11y + 17z = 85$

$7x - 6y = 17$

$7x = 6y$

$12x = 12y \Rightarrow y = x$



$x = y$

$z = \text{кор.}$

\downarrow

$z =$

Числовик:

$N1.$

$m, n, a, b \in \mathbb{Z}$

$m \neq n$

$a+b=?$

по Δ Виета получаем:

$$\begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 4 = -a \\ \left(\frac{1}{m} - 2\right)\left(\frac{1}{n} - 2\right) = b \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 4 - a \\ \frac{1}{mn} - 2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = b - 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{1}{mn} - 2(4-a) = b-4$

~~$\frac{1}{mn} \in \mathbb{Z}$~~

\Downarrow
 $\frac{1}{mn} \in \mathbb{Z}$

\Downarrow
 $mn \in \{1, -1\}$

\Downarrow
 $m \in \{1, -1\}$

$n \in \{1, -1\}$

Т.к. $m \neq n \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-1 \end{cases}$



1) $0 = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 4 - a$

\Downarrow
 $a = 4$

2) $\frac{1}{1 \cdot (-1)} - 2 \cdot 0 = b - 4 \Rightarrow b - 4 = -1$

$b = 3$

$\Rightarrow a + b = 7$

Ответ: $a + b = 7$

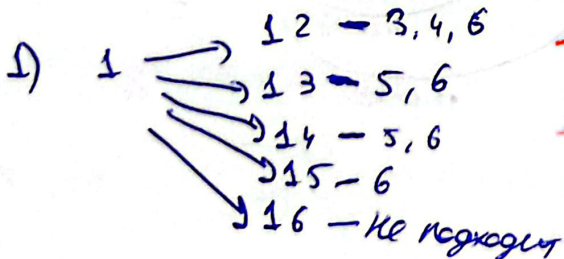


$N2.$

В суту 9-но найти все возможные возрастания последовательности из 3 человек, такие что сумма соседних $\neq 7$ (иначе мы переходим не на соседнюю сторону)

З-ч также что первый член последовательности не может быть равен 6, 5, 4 (тогда не смога бы быть возрастающей)

Первая серия Переберем первые члены:



(в первой колонке первый член, во второй первый и второй, в третьей возможные ~~члены~~ 3-и члены)



N 2
Продолжение

- 2) 2 → ~~23~~ - 5,6
 → 24 - 5,6
 → 25 - не подходит.
~~→ 26 - киево~~

- 3) 3 → 34 - не подходит.
 → 35 - 6
 → 36 - киево

- 4) 4 → 45 - 6.
 → 46 - киево

⇓
 Все варианты $3 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 =$
 $= 3 + 4 + 3 + 3 + 1 = 7 + 7 = 14$

Ответ: 14.

N 3
 $a, b, c > 0$
 min - ?

$$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ca - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c} =$$

$$= 3 + \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c \right)$$

Нужно найти минимум выражения в скобках.
 Д-ка, что оно не может быть отрицательным. Пусть
 произведем:

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - a - b - c < 0$$

$$b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 < 0$$

(т.к. $a, b, c > 0$)

$$a^2(c^2 + b^2 - bc) + a(-b^2c - bc^2) + b^2c^2 < 0$$

Для это как кв. трехчлен отн. а. З-ка, что $c^2 + b^2 - bc > 0$
 (т.к. некоторые квадрат)
 Если кв. трехчлен с положительными старшими коэффициентами
 принимает отр. значения, то $D_a > 0$.

Условие:

N 3 продолжение

$$(b^2c + bc^2)^2 > 4(c^2 + b^2 - bc) b^2c^2$$

$$b^2c^2 (b+c)^2 > 4(c^2 + b^2 - bc) b^2c^2 \quad | : b^2c^2 > 0$$

$$(b+c)^2 > 4(c^2 + b^2 - bc)$$

$$b^2 + 2bc + c^2 > 4c^2 + 4b^2 - 4bc$$

$$0 > 3c^2 + 3b^2 - 6bc$$

$$\Downarrow$$

$$0 > (b-c)^2 \quad \psi$$

Выражение в скобках неотрицательно.

Но, з-ч, это обращается в

ноль при $a=b=c \Rightarrow$ минимальное значение выражение в скобках равно 0 \Rightarrow

\Rightarrow минимальное з-ие исходного выражение равно 3 и достигается, к примеру, при $a=b=c=1$

Ответ: 3.

N 4.

Решим сначала вспомогательную задачу.

Пусть нужно рассадить n совершенно одинаковых девочек в ряд из $2n$ стульев так, чтобы любые 2 девочки не сидели рядом.

Пусть кол-во способов где n равно f_n

З-ч сразу, что $f_1 = 2$

Р/м число f_{n+1} з-ч, что ~~какая~~ какая-то девочка



$2n+2$ стульев.

какая-то девочка должна сидеть на стуле $2n+1$ или $2n+2$ (иначе все не поместится) или она сидит на стуле $2n+1$, то это з-т, что n -ая девочка сидит

Число: n продолжение

на стуле камерой не больше $n-1$. И так далее девочка с камерой \perp должна сидеть на стуле с камерой $\perp \Rightarrow$ равно \perp вариант.
 Если она сидит на $n+2$ стуле, то задача сводится к n стульям и n девочкам
 (т.к. $n+2$ только занят)

$$\begin{aligned} \Downarrow \\ g_{n+2} &= g_n + 1 \\ \Downarrow \\ g_2 &= 2 + 1 = 3 \\ g_3 &= 4 \\ g_4 &= 5 \\ g_5 &= 6. \end{aligned}$$

~~То есть для раскладки 5 девочек на 6 стульях P_6 одинаковых~~

То есть кол-во способов расставить 5 одинаковых девочек на 6 стульях равно 6. \Rightarrow Т.к. девочки разные это кол-во способов равно $6 \cdot P_5 = 6 \cdot 5!$

Кроме того, на оставшиеся 5 мест необходимо ~~распределить~~ распределить 3 мальчика, учителя и воздух \leftarrow все эти объекты разные попарно.

\uparrow
по сути это означает не посадить никого.

\Downarrow
 На каждый вариант расстановки девочек приходится $P_5 = 5!$ расстановки остальных объектов

\Downarrow
 Общее кол-во равно $6 \cdot 5! \cdot P_5 = 6(5!)^2$

Ответ: $6(5!)^2$

Черновик.

$$7 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 11 \rightarrow 5,5 \rightarrow 10,5 \rightarrow 5,25 \rightarrow 10,25 \rightarrow$$

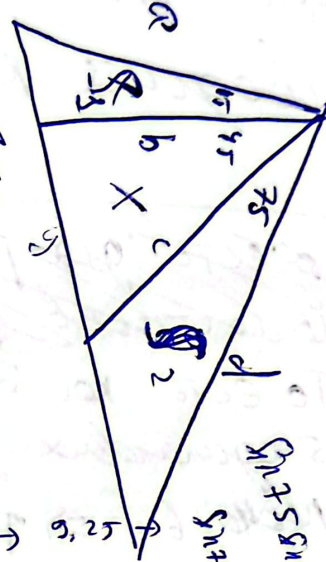
$$7 \rightarrow 12 \rightarrow 17 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 7,5 \rightarrow 12,5 \rightarrow 4,5 \rightarrow 9,5 \rightarrow$$

$$7 \rightarrow 12 \rightarrow 8,5 \rightarrow 13,5 \rightarrow 7,5 \rightarrow 12,5 \rightarrow 5,75$$

$$-12,5 - 6,75 = 12,75 - 7 = 5,75$$

$$S_1 + S_2 = 5$$

$$S_1 S_2 = 3$$



$$S_1 + S_2 = 5$$

$$S_1 S_2 = 3$$

$$7 \rightarrow 3,5 \rightarrow 8,5 \rightarrow 4,25 \rightarrow 9,25$$

$$a_1 = 3,5$$

$$a_2 = \frac{a_1 + 5}{2}$$

$$7 + 17$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + 5}{2}$$

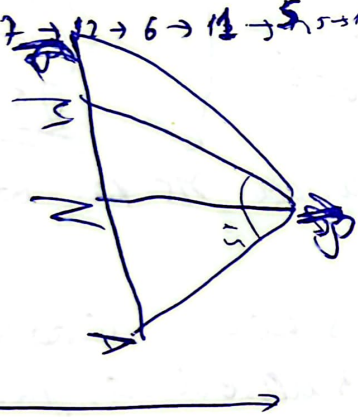
$$= \frac{a_{n-2} + 5}{2} + 5 =$$

$$= \frac{a_{n-3} + 5}{2} + 5 + \frac{5}{2} =$$

$$= \frac{a_{n-4} + 5}{2} + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} =$$

$$\frac{1}{2} \text{abs} S_{15} \cdot \frac{1}{2} \text{abs} S_{15} = 3$$

$$\text{abs} S_{15} = 24$$



$$x + 3 = ad$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} k$$

$$k = 5$$

$$3,5 + 10 \cdot \frac{1}{2} = 8,5$$

$$a_1 = 7$$

$$2a_2 = a_1 + 10$$

$$2a_3 = a_2 + 10$$

$$2a_4 = a_3 + 10$$

$$2a_5 = a_4 + 10$$

$$\dots$$

$$2a_n = a_{n-1} + 10$$

$$a_{k+2} = \frac{a_k}{2} + 5$$

$$a_{k+2} \vee a_k$$

$$\frac{a_k}{2} + 5 \vee a_k$$

$$10 \vee a_k$$

$$S_{15} = \frac{6+12}{2}$$

$$S_{30} = 4S_{15}$$

$$S_{15} = S_{11}(15 - 10) =$$

$$2a_2 + 2a_3 + \dots + 2a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + 10(n-1)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + 2a_n = 10n + 4$$

Числовая.

№.

Пусть a_n - кол-во миров в кубике в n -ый день.
(числовые сутки)

$a_0 = 7 \Rightarrow a_1 = \frac{a_0}{2} + 5$

Аналогично получаем $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 5$.

а) Или тогда n -го $a_0 = 7$; $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 5$, $n \geq 0$ и исследуем её сходимость.

1) Д-и, что $a_i \leq 10 \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Тогда $i=0$. $7 \leq 10 \checkmark$
индукции.

Переход: $a_i \leq 10$ для a_{i+1} имеем:

$a_{i+1} = \frac{a_i}{2} + 5 \leq \frac{10}{2} + 5 \leq 10$.
т.е.г.

2) Д-и, что $a_{i+1} \geq a_i \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

~~Тогда $i=0$
индукции
Переход~~

Имеем $a_{i+1} = \frac{a_i}{2} + 5$.

$a_{i+1} \geq a_i$

$\frac{a_i}{2} + 5 \geq a_i$.

$10 \geq a_i \Rightarrow$ по $a_{i+1} \geq a_i$.

$a_i \leq 10$
 \Downarrow
 $a_{i+1} \geq a_i$
т.е.г.

Тогда эта последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху

\Downarrow
она сходится по Вейерштрасса.

Итак тогда пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Rightarrow$ по рекуррентному

соотношению имеем $\frac{A}{2} + 5 = A \Rightarrow A = 10$.

\Downarrow
а) Ответ: 10 миров.

Условие. № 6 предложение

$$b) a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + 5 = \frac{\frac{a_{n-2}}{2} + 5}{2} + 5 = \frac{a_{n-2}}{2^2} + 5 + \frac{5}{2} =$$

$$= \frac{a_{n-3}}{2^3} + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} = \frac{a_{n-4}}{2^4} + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} = \frac{a_{n-4}}{2^4} + 5 + \dots + \frac{5}{2^{i-1}} =$$

$$= \frac{a_{n-i}}{2^i} + 5 + \frac{5}{2} + \dots + \frac{5}{2^{i-1}}$$

Положим $i=n$

$$a_n = \frac{a_0}{2^n} + 5 + \frac{5}{2} + \dots + \frac{5}{2^{n-1}} = \frac{7}{2^n} + 5 \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) =$$

$$= \frac{7}{2^n} + 5 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{7}{2^n} + 5 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{2^n} + 10 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = \frac{7}{2^n} + 10 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{7}{2^n} + 10 - \frac{10}{2^n} = 10 - \frac{3}{2^n}$$

\Downarrow
99,9% от 10 метров - 9,99 метра

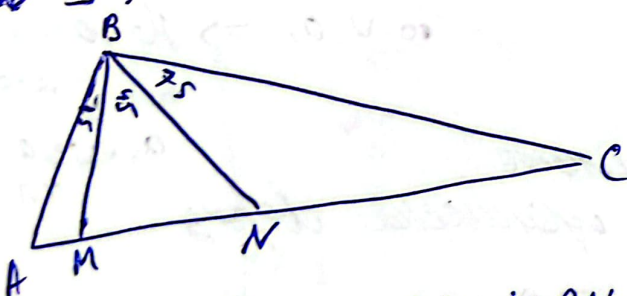
$$10 - \frac{3}{2^n} > 9,99$$

$$0,01 > \frac{3}{2^n} \Rightarrow 2^n > 300$$

↑
наименьшее n , удовлетворяющее
этой равно $n=9$

б) Ответ: на 9-ый день.

№ 5.



1) Пусть $AB=a; BM=b; BN=c; BC=d.$

$$S_{ABM} = S_1; S_{NBC} = S_2 \Rightarrow S_1 + S_2 = 3$$

$$S_1 + S_2 = 5.$$

$$S_{MBN} = X.$$

Условие

и 5 предложение

2) З-м, что $\sin(15) \cdot \sin(75) = \sin(15) \cdot \cos(15) = \frac{\sin 30}{2} = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{2} ab \sin 15 = S_1$$

$$\frac{1}{2} cd \sin 75 = S_2 \Rightarrow \frac{1}{4} abcd \cdot \underbrace{\sin 15 \cdot \sin 75}_{\frac{1}{4}} = S_1 S_2 = 3$$

\parallel
abcd = 48

3) $x = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{4} bc$

$$x + S_1 + S_2 = S_{ABC} = \frac{1}{2} ad \sin 135 = \frac{1}{2} ad \cdot \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{4} ad$$

$$\begin{cases} abcd = 48 \\ x = \frac{\sqrt{2}}{4} bc \\ x + 5 = \frac{\sqrt{2}}{4} ad \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x+5)x = \frac{2}{16} abcd = \frac{2}{16} \cdot 48 = 6$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+6) = 0$$

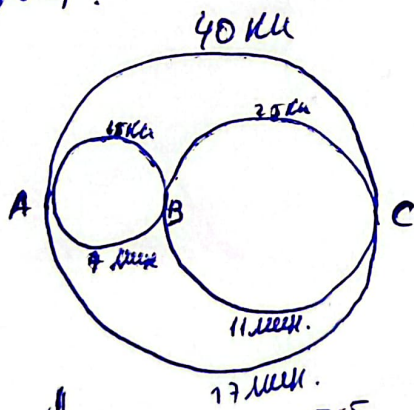
$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -6 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

(x < 0 - не подходит)

$$S_{ABC} = x + S_1 + S_2 = 1 + 5 = 6$$

Ответ: 6.

№7.



З-м, что $15 \text{ км} \cdot 2 = \pi \cdot AB$

$$25 \text{ км} \cdot 2 = \pi \cdot BC$$

$$40 \text{ км} \cdot 2 = \pi \cdot AC$$

\parallel
дуга AC = 40 км.

$$7x + 17y + 17z = 85 \quad \text{З-м, что } x \equiv y \pmod{2} \text{ Т.к. вершине в А.}$$

(x, y, z - кол-во пройденных путей)

По той же причине z ≠ 5.

z-кол. ⇒ z ∈ {1, 3}

x, y, z ∈ N ∪ {0} т.к. не было поворота на 180°

Умножить:
N7 предложение

$$1) z=1 \Rightarrow 7x+11y=68 \Rightarrow$$

$$y \leq -1 \Rightarrow y \notin \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ w}$$

$$y=0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \text{ w}$$

$$y=1 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \text{ w}$$

$$y=2 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \text{ w}$$

$$y=3 \Rightarrow x=5$$

$$y=4 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \text{ w}$$

$$y=5 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \text{ w}$$

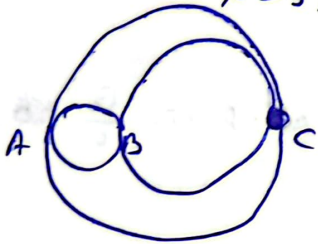
$$y=6 \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \text{ w}$$

$$y > 7 \Rightarrow x \notin \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ w}$$

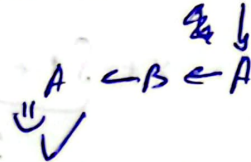
~~7~~

подходит

$$x=5; y=3; z=1$$



Пример: $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B$



$$\# \text{ км} = 15x + 25y + 40z = 75 + 75 + 40 = 190 \text{ км.}$$

$$2) z=3 \Rightarrow 7x+11y=34$$

$$y \leq -1 \Rightarrow y \notin \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ w}$$

$$y=0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \text{ w}$$

$$y=1 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \text{ w}$$

$$y=2 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \text{ w}$$

$$y=3 \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \text{ w}$$

$$y > 4 \Rightarrow x \leq -1 \text{ } x \notin \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ w}$$

↓
Ответ: 190 км.

~~7~~

