0 024606 040000

02-46-06-04
(40.23)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 14

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Хамитова Данила Ураловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
4	4	8	12	12	12	~~1~~8	0	60

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

02-46-06-04 (40.23)

Черновик:

60 (шестьдесят)

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{1}{x-1}$

$x : (x+1)$ $x : \frac{x-1}{x+1}$

f $\cancel{\frac{\frac{x-1}{x+1}+1}{\frac{x-1}{x+1}-1}=\frac{x-1+x+1}{x-1+x+1}}=\frac{2x}{2x}=1$

$\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{x+1+x-1}{x+1-x+1}=\frac{2x}{2}=x$

$f(x)=\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{1}{\frac{x+1-x+1}{x-1}}=\frac{x-1}{2}$

1) 1
2) 3
3) 7
4) 15
5) 31
6) 63
7) 127
8) 255
9) 511
10) 1023

$f(f($ $f(f(x))=\frac{\frac{x-1}{2}-1}{2}=\frac{x-3}{2}$

$f(f(f(x)=\frac{\frac{x-1}{2}-3}{2}=\frac{x-7}{2}$

$f^{*4}(x)=\frac{\frac{x-1}{2}-7}{2}=\frac{x-15}{2}$

$f^{*10}(x)=\frac{x-1023}{2}$ $y=\frac{x}{2}-\frac{1023}{2}$

$y=kx+b$ ~~$\frac{1023}{2}$~~

$y-f(x)=$ $y=f(x)+\cancel{f'(x_0)(x-x_0)}$

$(xy+4x-y-4)\,|y-x-8|=(x-4)\,|xy+4x-y-4|$

1) $xy+4x-y-4=0$

$x(y+4)-(y+4)=0$

$(x-1)(y+4)=0$

1.1 $x=1 \Rightarrow y:$

1.2 $y=4 \Rightarrow x$

$* \neq 0$

2) ~~1~~ $y-$

— защит или напад.

3 Врат 5 защит. 6 напад (3 Универсала)

C_3^1 — способов выбрать вратаря — донудают

1) C_3^2 (защит-универсал) 2 защитн — C_6^2; — C_6^3

2) $C_3^1 \cdot C_1^5$ — $2 \cdot C_6^1$; — $C_2^1 \cdot C_6^2$; — $\cdot C_6^3$

Стр 1

Черновик

C_3^1 -вратарь

зущив

1 защ.

1 защ   отс. защиты

$C_5^2 \cdot C_6^3$

$C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^3$ $C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2$

1) 3 врат, 0 защ, 6 нап $= C_3^1 \cdot C_8^2 \cdot C_6^3 = 3 \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4$

2) 3 врат ~~7 защ 7 нап~~ $= \boxed{C_8^2} \cdot C_3^1 \cdot C_7^2 \cdot C_7^3$

3) 3 врат 6 защ 8 нап $= \boxed{C_3^1} \cdot C_3^1 \cdot C_6^2 \cdot C_8^3$

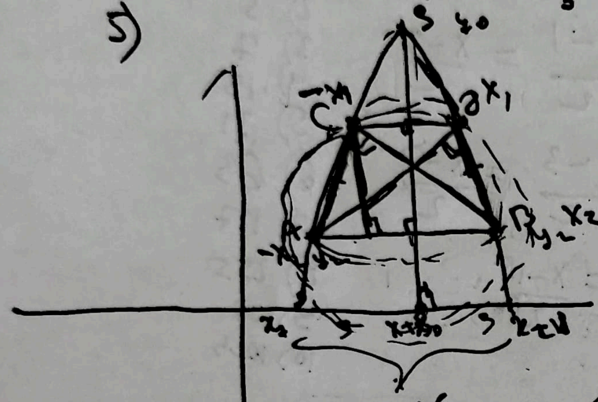
4) 3 врат 5 защ 5 напад. $= C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_5^3$

5)

$\times\frac{35}{21}$, 35, 70, 735

$\times\frac{56}{15}$, 280, 56, 840

$\times\frac{7765}{3}$, 23295



$y = a - 6x^2$

$9 = a - 6x^2$

$6x^2 + 9 - a = 0$

$x = \pm\sqrt{\frac{9-a}{6}}$

$\sqrt{\frac{9-a}{6}} + \sqrt{\frac{9-a}{6}} = 18$

$\sqrt{\frac{9-a}{6}} = 9$

$\frac{9-a}{6} = 81 \Rightarrow 9 - a = 816$

$a = 9 - 816$

$y = 9 - 816 - 6x^2$

$CB = \sqrt{(y_1-y_2)^2 + (x_1-x_2)^2}$

$AC = \sqrt{}$

$CB = \sqrt{(y_2-y_1)^2 + (x_1-x_2)^2}$

$AC = \sqrt{(y_2-y_1)^2 + (x_1+x_2)^2}$

$\frac{x_1}{x_2}$

$y = a - 6x^2$

$\Rightarrow$

$y = -6x^2 + a = 0$

$x_1 + x_2 = 0$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{a}{6}$

$2x_1 + 18 = 0 \Rightarrow x = -9$

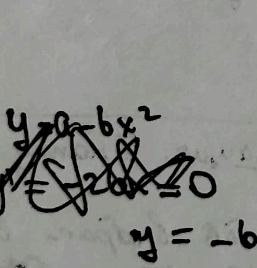
$-\frac{a}{6} = -9 \cdot 9 = \frac{a}{6} = 81 \Rightarrow$

$\frac{\cancel{x_1}}{2x_2} =$

$a = 816$

$\boxed{a = 9}$

$b = \frac{1}{9}$



$y = 9 - 6x^2 \Rightarrow$

$y = \frac{1}{9}x^2 + 9$

$H = \frac{1}{9}x_1^2 - \frac{1}{9}x_2^2 = \frac{1}{9}(x_1^2 - x_2^2)$

Стр 2

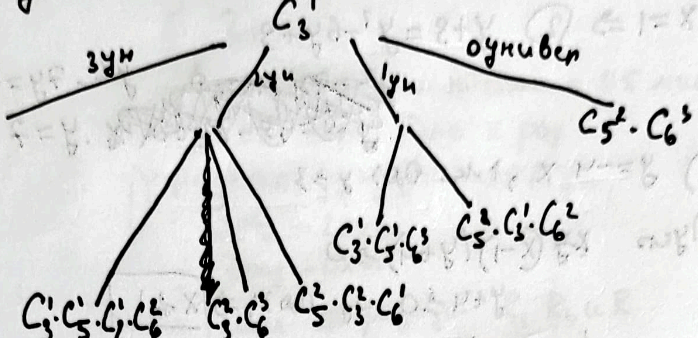
Чистовик

Задача 1

Нужно 1 враг; 2 защ; 3 напад.

Есть 3 враг; 5 защ; 6 напад.

1) так универсал не может быть вратарем, то он определяется C_3^1 способами.



Для 3 универс отдельно, мы можем просто добавлять универсалов к защитникам или нападающим при этом учитывая кол-во способов их выбрать

2) 1) 3 враг 8 защ 6 нап $- C_3^1 \cdot C_8^2 \cdot C_6^3$
2) 3 враг 7 защ 7 нап $- \boxed{C_3^2} \cdot C_3^1 \cdot C_7^2 \cdot C_7^3$
3) 3 врат 6 защ 8 нап $- C_3^2 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2 \cdot C_8^3$
4) 3 враг 5 защ 9 нап $- C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_9^3$

$C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} =$
$C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 4 \cdot 5$
$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$
$C_8^3 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56$ | $C_9^3 = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{6} = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 84$

Всего вар:

$$C_3^1\Big(\underbrace{C_5^2 \cdot C_6^3}_{\frac{5\cdot4}{2}\cdot 5\cdot4 = 200} + \underbrace{C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_6^2}_{\frac{5\cdot4}{2}\cdot3\cdot\frac{5\cdot6}{2} = 450} + \underbrace{C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^3}_{3\cdot5\cdot20 = 300} + \underbrace{C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_6^1}_{10\cdot3\cdot6 = 180} + \underbrace{C_3^2 \cdot C_6^3}_{3\cdot20 = 60} + \underbrace{C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_2^1 \cdot C_6^2}_{3\cdot5\cdot2\cdot15 = 450}$$
$$+ \underbrace{C_8^2 \cdot C_6^3}_{28\cdot20 = 560} + \underbrace{C_3^2 \cdot C_7^2 \cdot C_7^3}_{3\cdot21\cdot35 = 2205} + \underbrace{C_3^2 \cdot C_6^2 \cdot C_8^3}_{3\cdot15\cdot56 = 2520} + \underbrace{C_5^2 \cdot C_9^3}_{10\cdot84 = 840}\Big) =$$

650 950 1130 1180 1640 2200 4405 6925 7765

$$= 3 \cdot (200 + 450 + 300 + 180 + 60 + 450 + 560 + 2205 + 2520 + 840) = 23295$$

Ответ: 23.295

Стр 3

Задача 3 Чистовик

① $(xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4|$

② $\sqrt{y-x+10} = y-3$

$\boxed{ОДЗ: y \geq 3}$

① $xy+4x-y-4=0$

$(x-1)(y+4)=0$

1) $x=1 \Rightarrow$ ② $y+9=y^2-6y+9$

$y^2-7y=0$

$y=7$ $(y\neq 0 \times)$

2) $y=-4$ ×, т.к. ОДЗ $y\geq 3$

2) Пусть $(x-1)(y+4)\geq 0$

$y+4\geq 0$ из ОДЗ; $\Rightarrow \boxed{x\geq 1}$

$|y-x-8| = x-4 \Rightarrow x\geq 4$

$x-4\geq 0$

1) $y-x-8\geq 0$

$y-x-8=x-4$

$y-8=2x-4$

$y=2x+4$

②: $\sqrt{x+14} = 2x+1$

$x+14 = 4x^2+4x+1$

$0=4x^2+3x-13$

$D=9+208=217$

$x_1 = \frac{-3+\sqrt{217}}{2}$ ① $\Rightarrow y=-1+\sqrt{217}$ ✓

$x_2 = \frac{-3-\sqrt{217}}{2} < 4$ ×

$-1+\sqrt{217} - \frac{-3+\sqrt{217}}{2} - 8 \geq 0$

$2+2\sqrt{217}$

$\frac{-3+\sqrt{217}}{2} - 4 \geq 0$?

$\frac{-11+\sqrt{217}}{2} > 0$ ✓

$|y-x-8| =$

2) $y-x-8\leq 0$

$-y+x+8=x-4$

$-y+12=0 \Rightarrow y=12$

② $\sqrt{22-x} = 9$

$22-x=81$

$x=-59$ ×, т.к. $x\geq 4$.

2) $(x-1)(y+4)\leq 0$

$x\leq 1$

$|y-x-8| = 4-x \Rightarrow x\leq 1$

1) $y-x-8\geq 0$

$y-x-8=4-x$

$y-8=4 \Rightarrow y=12 \Rightarrow x=-59$ ✓

2) $y-x-8<0$

$x+8-y=4-x$

$2x+4=y \Rightarrow x=\frac{-3+\sqrt{217}}{2} \geq 1$ ×

$x=\frac{-3-\sqrt{217}}{2}\leq 1$ $y=1-\sqrt{217}<3$ ×

Стр 4

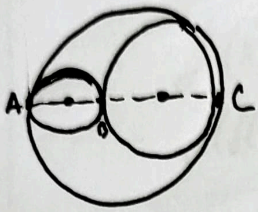
02-46-06-04 (40.23)

Чистовик Задача 3 продолжение

Итого ответы:
$x=1$ $y=7$; $x=\frac{-3+\sqrt{217}}{2}$; $y=1+\sqrt{217}$
$x=-59$; $y=12$

Ответ: $(1;7)$; $(-59;12)$ $\left(\frac{-3+\sqrt{217}}{2}; 1+\sqrt{217}\right)$

Задача 4



Всего времени 1ч 15мин = 85 мин
Пусть Автомобиль x раз
1) проехал дугу длиной 15км,
y раз – 25км
z раз – 19мин

Также, если ~~AD~~ радиусы R_1 R_2 и R
То $15=\pi R_1 \Rightarrow R_1=\frac{15}{\pi}$
$25=\pi R_2 \Rightarrow R_2=\frac{25}{\pi}$
$R=R_1+R_2 \Rightarrow R=\frac{40}{\pi} \Rightarrow AC=\frac{40}{\pi}\cdot\pi=40$км

Из 1) $5x+\cancel{25}\,13y+19z=95$ – ур-е в целых числах
$z=5$ ✗
$z=4$ ✗
$\boxed{z=3 \Rightarrow x=5; y=1}$ – ед. решение.
$z=2 \Rightarrow$ ✗ $5x+13y=57$ ~~y=...~~ 3 $y=4$ $x=1$
$z=1$ ✗ $5x+13y=76$ $y=2$; $x=14$

При этом, при этом решении автомобиль действительно попадет в нужную точку, при других же (т.к там есть четные решения) автомобиль не попадет обратно в точку A.

$x=5$; $y=1$; $z=3 \Rightarrow$ Общее расстояние:
$5\cdot15+1\cdot25+3\cdot40=75+25+120=220$км.

Ответ: 220км

Черновик

1 час 35 мин = 95 мин

57

38

13

$5x+13y+19z=95$

$13+5\cdot5+19\cdot3=95$

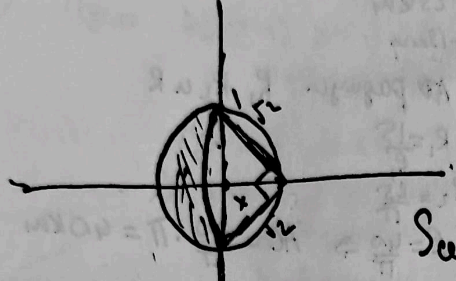
$l_1=\pi R_1=15 \quad R_1=\frac{15}{\pi}$

$l_2=\pi R_2=25$ км $\quad R_2=\frac{25}{\pi}$

$2R_1+2R_2=2R$

$R_1+R_2=R \Rightarrow R=\frac{40}{\pi}\to$

$l=\pi\cdot\frac{40}{\pi}=40$



$4=2+2-2\cdot2\cdot\cos\alpha \Rightarrow$

$\cos\alpha=0 \Rightarrow \alpha=90^\circ$

$S_{сект}=\frac{1}{4}S_{круга\ радиуса}$

$R=\sqrt2, \ S_{кр}=\pi R^2=2\pi$

$S_{сект}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt2^2}{2}=\boxed{\frac{\pi}{2}-1}$

$S=\cancel{\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}-1)}\ \frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}-1)=1\to$

$1\cdot\frac{\sqrt2}{2}=\boxed{\frac{\sqrt2}{2}}$

$\frac{\pi\cdot2}{4}=\frac{\pi}{2}$

$S(mn)=S(n)$

$99\cdot2=198$

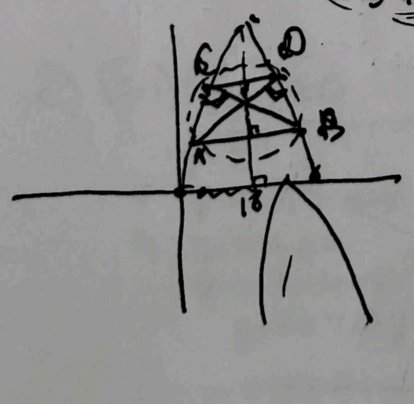
$\cancel{999}\cdot2= \quad 99\cdot98=$

$$\begin{array}{r} 99\\ \times\ 98\\ \hline 792\\ 891\ \ \\ \hline 9702 \end{array}$$

$999\cdot2=$

$$\begin{array}{r} 999\\ \times\ 2\\ \hline 1998 \end{array}$$

$y=\frac{9}{2}-6x^2$



Стр 6

Задача 5 Чистовик

$y=f(x)$

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$ $\quad g(x)=\underbrace{f(f(f\ldots f(x)))}_{10}$

1) $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{1}{x-1}$ $\quad \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{2x}{2} = x$

$x: \frac{x+1}{x-1}$

$$f(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{1}{\frac{2}{x-1}} = \frac{x-1}{2}$$

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2}-1}{2} = \frac{x-3}{4}$$

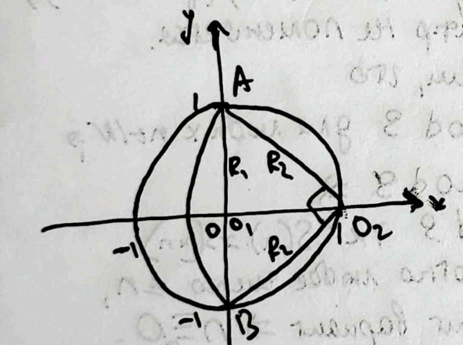
$$f(f(f(x))) = \frac{\frac{x-1}{2}-3}{4} = \frac{x-7}{8}$$

$\vdots$

$\underbrace{f(f(f\ldots f(x)))}_{10} = \frac{x-1023}{2^{10}}$ - прямая, как я понимаю, касательная к ней - сама прямая, ее tg наклона $= \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$

Ответ: $\frac{1}{1024}$

Задача 2



Сначала найдем площадь полумесяца до уменьшения.

радиус окр с центром $(0;0) = R_1 = 1$

радиус окр с центром $(1;0) = R_2 = \sqrt{2}$

$AB=2$; $AO_2 = BO_2 = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\angle BO_2A = 90^\circ$ т.к. $(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2=2^2$

Заметим, что т.к. $\angle BO_2A = 90^\circ$, то Сектор ABO_2 равен $\frac{1}{4}$ от площади круга с центром O_2.

$$S_{кр2} = \pi R^2 = \pi\cdot(\sqrt{2})^2 = 2\pi \Rightarrow$$

$$S_{ABO_2} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$$S_{\triangle ABO_2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$S_{сегмента\,AB} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$S_{полумесяца} = \frac{S_{окр1}}{2} - S_{сегмента\,AB}$$

$$S_{окр1} = \pi R_1^2 = \pi$$

Задача 2 продолжение Чистовик

$S_{полумесяца} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1$

Так как каждая точка превратилась в круг радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ~~то фак~~ (фактически, точка - круг нулевого радиуса) то мы по сути изменили масштаб картинки.

Теперь каждая точка стала кругом площадью $\frac{\pi \cdot 2}{4} = \frac{\pi}{2}$, а значит множество точек, являющее собой $S_{полумесяца}$ увеличилось в $\frac{\pi}{2}$ раза.

Значит $S_{полумесяца}$ после изменения $= 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$

Задача 7

n - 85 значное

$S(mn) = S(n)$

$1 \leq m \leq n$

— ~~2. Доп~~ Условие $S(mn) = S(n)$ означает, что на какое бы мы число не умножили n, (до самого n), его сумма цифр не поменяется.

Также мы знаем, что

$S(n) \equiv n \mod 9$ для любых $n \in \mathbb{N}$, ⇒

$S(mn) \equiv mn \mod 9$ ⇒

$n \equiv mn \mod 9$ т.к $S(n) = S(mn)$.

Т.к m - абсолютно любое число $\leq n$, то единственный вариант ⇒ $n \underset{9}{\equiv} 0$.

Максимальное 85 значное число $\underset{9}{\equiv} 0$ = $\underbrace{999\ldots999}_{85}$ (больше него чисел нету). Действительно, умножая его на любое число меньше n сумма цифр не изменится.

Ответ: $\underbrace{999\ldots999}_{85}$

Черновик

$AD = \sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2+x_1)^2}$

$BD = \sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}$

$AD^2+BD^2 = (2x_2)^2$

$2(y_2-y_1)^2 =$

$2(y_2-y_1)^2+2x_2^2+2x_1^2 = 4x_2^2 \Rightarrow$

$(y_2-y_1)^2 = x_2^2-x_1^2$

$\left(\frac{1}{9}(x_1^2-x_2^2)\right)^2 = x_2^2-x_1^2$

$\frac{1}{9}(a-b)^2 = a-b$

$\frac{1}{9}(a-b) = 1$

$a-b = 9$

Чистовик
Задача 6

Перед тем как нарисовать нужно примерно понять как выглядит парабола

$y = a - bx^2$. $y = -bx^2 + a$

т.к. коэф при x равен нулю, и коэф при ~~x~~ x^1, то то max достигается в точке $\frac{-0}{b} = 0 \Rightarrow$

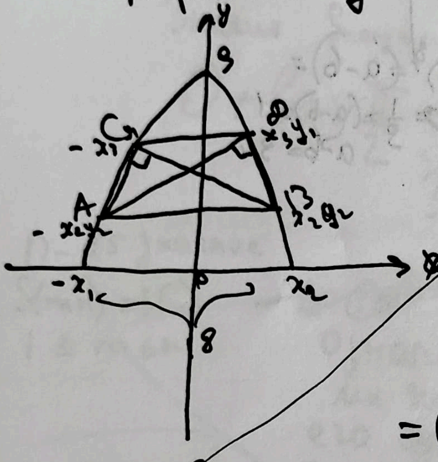
$9 = a - 0 \Rightarrow a = 9$.

Применим Т. Виета:

$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 + 18 = 0 \Rightarrow x_1 = -9;\ x_2 = 9$

$x_1 \cdot x_2 = -\frac{a}{b} \Rightarrow -\frac{9}{b} = -81 \Rightarrow b = \frac{1}{9}$. $\left(\frac{9}{b} = 81 \Rightarrow b = \frac{1}{9}\right)$

Парабола $y = 9 - \frac{1}{9}x^2$



Парабола симметрична относительно Oy:

пусть D $(x_3; y_1)$

C $(-x_3; y_1)$

B $(x_2; y_2)$

A $(-x_2; y_2)$

Так как $CD \parallel AB$, то Расстояние между AB $\rho(AB, CD) =$ и CD это $|y_2 - y_1| =$

$= \left(9 - \frac{1}{9}x_3^2\right) - \left(9 - \frac{1}{9}x_2^2\right) = \frac{1}{9}\left(x_2^2 - x_3^2\right)$

Мы знаем координаты точек, $\Rightarrow$ можем записать Т. Пифагора для $\triangle ADB$:

$AD^2 + DB^2 = AB^2$

$AD = \sqrt{(x_3 + x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$BD = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$AB = \cancel{\sqrt{4x_2^2}}$ $2x_2$

$\Rightarrow 2(y_2 - y_1)^2 + 2x_3^2 + 2x_2^2 = 4x_2^2$

$(y_2 - y_1)^2 = x_2^2 - x_3^2$

$\frac{1}{9^2}\left(x_2^2 - x_3^2\right)^2 = x_2^2 - x_3^2 \Rightarrow$

$\frac{1}{81}\left(x_2^2 - x_3^2\right) = 1 \rightarrow$

$x_2^2 - x_3^2 = 81 \Rightarrow$

$\rho(AB, CD) = \frac{1}{9}\left(x_2^2 - x_3^2\right) = \frac{1}{9} \cdot 81 = 9$

Ответ: $\rho(AB, CD) = 9$