76-00-05-43
(40.23)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Выход в туалет:
14:11 – 14:15

Вариант 13

Место проведения город Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Худаева Артёма Цезаревича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
8	4	4	12	12	12	0	4	56

76-00-05-43
(40.23)

Черновик

~~x~~ ~~x~~ ~~x~~ ~~x~~ ~~x~~ ~~x~~ ~~x~~ ~~x~~

выбор вратаря

№1

1вр. 2защ. 3нап.

2вр. 4защ. 7нап.

3 уже в форме.

C_n – ?

2·

0 уж. защ. $C_4^2 \cdot C_{10}^3$

\+

1 уж. защ. $C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_9^3$

\+

2 уж. защ. $C_3^2 \cdot C_8^3$

Расч.

56 (пятьдесят шесть)

№3

$$\begin{cases}(xy+3x-2y-6)|y-x-8| = (x-5)|xy+3x-2y-6| \\ \sqrt{y-x+10} = y-4\end{cases}$$

$\boxed{y \geq 4}$

$y-x+10 = y^2-8y+16$

$y^2-9y+6 = -x$

$x = 9y - y^2 - 6$

$xy+3x-2y-6=0$

$x(y+3)-2(y+3)=0$

$(x-2)(y+3)=0$

$x=2$ или $y=-3$

$2 = 9y-y^2-6$

$y^2-9y+8=0$

$y=1$ или $\boxed{y=8}$

$AB = \pi r$

$BC = \pi R$

$AC = \pi(r+R) = AB+BC$

7 11 17

85 минут

28 39 50

$17+11+11+11+5\cdot7$

$85 = 5\cdot17$

$(x-2)(y$

Черновик!

№5

$y = f(x)$

$g(x) = \underbrace{f(f(f\ldots f(x))))}_{12}$

$f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$

$x=0 \quad f(-1) = -1$

$f\left(\frac{0}{-2}\right) = -\frac{1}{2}$

$\frac{x+2}{x-2} = 0$

$x=-2$

$\frac{x_1+2}{x_1-2} \quad \frac{x_2+2}{x_2-2}$

$f(f(x)) = x$

$f(x) = e^x$

$f(e^x) = e^{e^x} = f(f(x))$

$f(0) = 1$

$f(f(0)) = e$

$f(f(x)) = x$

$e^{e^x} = x$

$f(x) = x \quad x = e^x$

$x_1 < x_2$

$\frac{1+2}{1-2} < \frac{3+2}{3-2}$

$x = \frac{x+2}{x-2}$

$x^2 - 2x = x+2$

$x^2 - 3x - 2 = 0$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$f(-1) = -1$

$f(-1) = -1$

$\frac{x+2}{x-2} = -1$

$x+2 = -x+2$

$x = -x$

$x = 0$

$\frac{3!}{1!\,2!}$

$12 \cdot 16 = 72 + 12 \cdot 10 = 192$; $192 + 25 = 217$

$g(0) = f(f(\ldots f(-1)))$

$f(-1) = -1$

$g(0) = -1$

$13 \cdot 9 = 117$

$169 - 117 = 52$

$f(1) = \varnothing$

$f(-1) = -1$

$y_k = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$

$13 \cdot 9 - 169 - 6$

$117 - 169$

$g'(x_0) = f'(\ldots x_0) \cdot f'(\ldots x_0) \cdot f' \ldots \cdot f'(x_0)$

$f(x_0) = \frac{2}{\frac{x_0+1}{x_0-1} \cdot 2 - 2} = \frac{x_0-1}{x_0+1-x_0+1} = \frac{x_0-1}{2}$

$x_0 = \frac{x+2}{x-2}$

$(x-2)x_0 = x+2$

$x(x_0-1) = 2x_0+2$

$x = \frac{x_0+1}{x_0-1} \cdot 2$

76-00-05-43
(40.23)

Чистовик | №5 | ~~Конец~~ 1 страница

$y=f(x)$; $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=\frac{2}{x-2}$

Пусть x_0 - некий аргумент. Тогда $x_0 = \frac{x+2}{x-2} \Big| \rightarrow x=\frac{2(x_0+1)}{x_0-1}$ $(x\neq 2; x_0\neq 1)$

$f(x_0)=\frac{2}{\frac{2(x_0+1)}{x_0-1}-2}=\frac{x_0-1}{2}$ $(x_0\neq 1)$

$\underbrace{tg\alpha}_{\text{искомая величина}} = g'(x_1)$ $(x_1=0)$

$g'(x)=f'\Big(\underbrace{f(f(\ldots f(x_1)))}_{12}\Big)\cdot f\Big(\underbrace{\ldots f(x)}_{11}\Big)\cdot \ldots \cdot f'(x_1)$

$f'(x_1)=+\frac{1}{2}$; ~~$x_1=0$; $x_2=f(x_1)=-\frac{1}{2}$~~

т.е. производная $f(x)$ не зависит от точки x, значит

$g'(x)=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}}_{12}=\frac{1}{2^{12}}=tg\alpha$

Ответ: $\frac{1}{2^{12}}$

№7

вратарь, защитники, нападающие

$\_\,|\,\_\;\_\,|\,\_\;\_\;\_$

6 конкурсантов

2 претендента

В - вратарь
З - защитник
Н - нападающий
У - универсал.

Используются следующие сокращения

Для начала, нужно выбрать кол-во универсалов, которых выберут как защитников (оставшиеся будут выбираться с нападающими). Т.е.

1) 0 универсалов-защитников

$\underbrace{C_4^2}_{\text{выбор лучших З}}\cdot \underbrace{C_{10}^3}_{\text{7 Н и 3 У, выбор лучшего Н}}$

2) 1 У-З: $\underbrace{C_3^1}_{\text{выбор лучшего У}}\cdot \underbrace{C_4^1}_{\text{выбор оставшегося У}}\cdot C_9^3$

3) 2 У-З (аналогично п. 2)

$\underbrace{C_3^2}_{\text{выбор 3 из У}}\cdot\underbrace{C_8^3}_{\text{выбор Н}}$

Итого: $\underbrace{2}_{\text{выбор вратаря}}\cdot\left(C_4^2\cdot C_{10}^3+C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_9^3+C_3^2\cdot C_8^3\right)$

(см. продолжение на стр. 2)

Чистовик

Страница 2

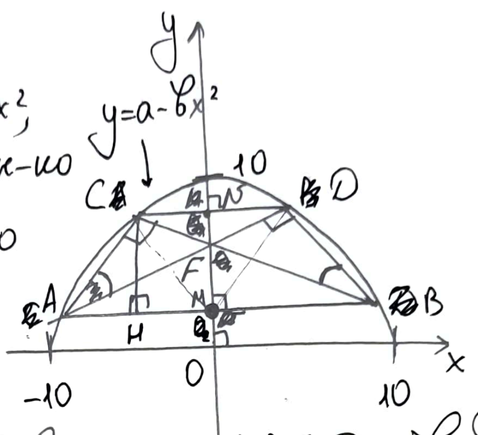
№1 (продолжение)

$$2\left(\frac{4!}{2!\,2!}\cdot\frac{10!}{7!\cdot 3!}+3\cdot 4\cdot\frac{9!}{6!\,3!}+\frac{3!}{2!}\cdot\frac{8!}{3!\,5!}\right)=$$

$$=2\left(720+1008+168\right)=3812$$

Ответ: 3812.

№6



1) Т.к. парабола вида $y=a-bx^2$, то она симметрична отн-но OY, сл-но т.к. AB∥CD∥OX, то ~~AB~~ AM = MB и CN = ND (см. рисунок).

~~Если расположить AB~~

получается фигура, образованная т. A, B, C, D – равнобедренная трапеция (т.к. $MN \perp AB, CD$).

Расположим точки, как на рисунке (от другого возможного расположения ответ не зависит)

Надо найти высоту трапеции (пусть CH).

2) Из условия $y=a-bx^2$; $a=10$

$bx^2=a$ при $x=\pm 10$ (парабола симметрична отн-но OY)

$100b=a$

$b=\frac{1}{10}$; $\boxed{y=10-\frac{x^2}{10}}$

3) Т.к. трапеция равнобедренная, то около нее можно описать окружность, радиус – AM = MB; центр: M.

$B\left(x_1; 10-\frac{x_1^2}{10}\right)$; $A\left(-x_1; 10-\frac{x_1^2}{10}\right)$; $D\left(x_2; 10-\frac{x_2^2}{10}\right)$; $C\left(-x_2; 10-\frac{x_2^2}{10}\right)$ (искомое: $\frac{x_1^2-x_2^2}{10}$)

$N\left(0; 10-\frac{x_2^2}{10}\right)$; $M\left(0; 10-\frac{x_1^2}{10}\right)$

4) $MD = MB$ как радиусы описанной около трапеции окружности

$MD=\sqrt{(x_2-0)^2+(y_2-y_1)^2}$; $MB = x_1$

см продолжение на странице 4

76-00-05-43 (40.23)

Черновик

$\frac{4\cdot 3}{2}$ · $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}$

6

720

$\frac{3\cdot 2}{2}$

$3\cdot\frac{8\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2}$

$12\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}$

$\frac{4\cdot 7\cdot 6}{42}$

$2\cdot 9\cdot 8\cdot 7$

168

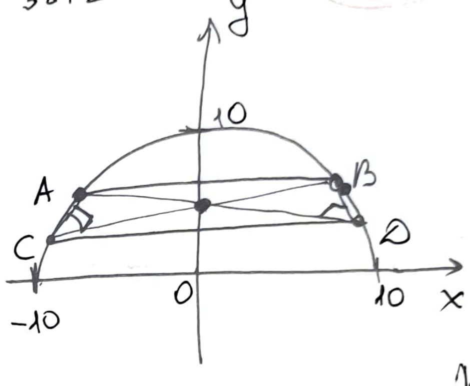
$72 \times 7 = 504$

$1008 + 168 = 1176$

$1176 + 720 = 1896$

$1896 \times 2 = 3812$

2



$$\begin{cases} y - x + 10 = y^2 - 8y + 16 \\ y \geq 4 \end{cases}$$

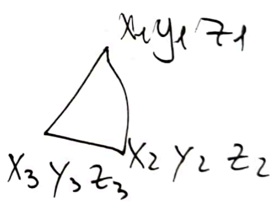
$$\boxed{-y^2 - 6 + 9y = x}$$

$$(-y^3 + 9y^2 - 6y + 27y - 18 - 3y^2 - 2y - 6)\,|y^2 - 8y - 2| = (-y^2 - 11 + 9y).$$

$$\frac{x - x_1}{-x_2 - x_1} = \frac{x^2 - x_1^2}{x_2^2 - x_1^2}$$

$$-\frac{1}{1} = \frac{x + x_1}{x_2 - x_1}$$

$x = -x_2$



$$-x_2 + x_1 = x + x_1$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{h_2}{h_1}$$

$\cancel{8 + \sqrt{16+8}}$

$$\frac{8 + \sqrt{24}}{2} = 4 + \sqrt{6}$$

$$S(n) = a_{79}\cdot\ldots + \ldots + a_0 \cdot$$

$$S(mn) = S(n)$$

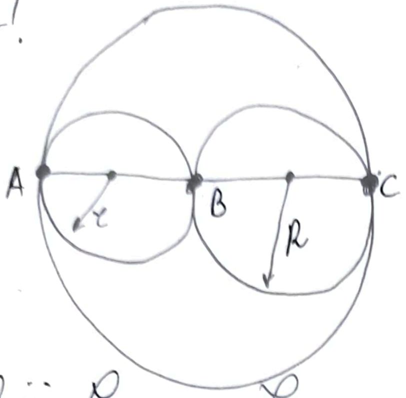
$$\sqrt{(x_2 - 0)^2 + \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{10}\right)^2} = x_1$$

Чистовик

Страница 3

№4

$S = ?$



Т.к. все 3 окр-сти попарно касаются, то ABC – линия центров всех этих трёх окружностей.

$\overset{\frown}{AB} = 15$ (км) $= \pi \cdot r$

$\overset{\frown}{BC} = 25$ (км) $= \pi R$

~~$\overset{\frown}{AC} = \pi(r+R) \cdot 2$~~

$AC = 2r + 2R$; $\overset{\frown}{AC} = \pi\left(\frac{AC}{2}\right) = \pi(r+R) = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = 40$ км.

Всё время движения: 85 минут.

$85 = 17 \cdot 5$.

~~Рассмотрим возможные~~ ~~$(x, y, z \in \mathbb{Z})$~~

$85 = \underbrace{x}_{\text{кол-во раз по } \overset{\frown}{AB}} \cdot 7 + \underbrace{y}_{\text{кол-во раз по } \overset{\frown}{BC}} \cdot 11 + \underbrace{z}_{\text{кол-во раз по } AC} \cdot 17$

$(x, y, z \in \mathbb{Z};\ x, y, z \geqslant 0)$

$z \neq 4$, $z \neq 5$ (нельзя так ездить, чтобы попасть в A)

искомый путь $S = 40z + 15x + 25y$

1) $z = 0$

$85 = 7x + 11y$

Решение в $\mathbb{Z}^+$: $x = 9$, $y = 2$ → не подходит по смыслу задачи

2) $z = 1$

$68 = 7x + 11y$

Реш. в $\mathbb{Z}^+$: $x = 5$; $y = 3$

Длина пути: 190 км

3) $z = 2$; $x = 1$; $y = 4$ (Решение в $\mathbb{Z}^+$)

$51 = 7x + 11y$

Не подходит по смыслу задачи

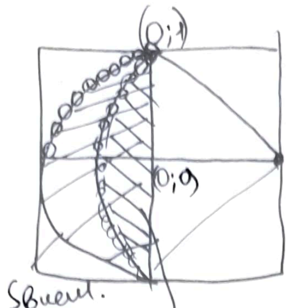
4) $z = 3$; $34 = 7x + 11y$

Решение в $\mathbb{Z}^+$: нет решений.

Ответ: 190 км.

Чистовик | Страница 4

№2

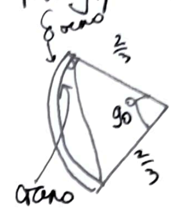


$S_{полумесяца} = S_{внеш} - S_{внутр}$.

Каждая точка новой внешней дуги удалилась от центра на $\frac{1}{3}$, т.е. получилась дуга с радиусом на $\frac{1}{3}$ больше (т.е. $R_{внеш} = \frac{4}{3}$)

Аналогично с внутренней дугой (только в ней радиус уменьшился на $\frac{1}{3}$; т.е.: $R_{внутр} = \frac{2}{3}$)

$$S_{внеш} = \pi \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$



$$S_{внутр} = \frac{\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2} - \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

$$S_{полумесяца} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{16}{9}\pi - \frac{4}{18}\pi + \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{14}{9}\pi + \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{9}(7\pi+2)$$

Ответ: $\frac{7\pi+2}{9}$

№6 (продолжение)

$$y_2 = 10 - \frac{x_2^2}{10};\ y_1 = 10 - \frac{x_1^2}{10}$$

$$\sqrt{x_2^2 + (y_2 - y_1)^2} = x_1$$

$$x_1^2 = x_2^2 + \frac{1}{100}(x_1^2 - x_2^2)^2$$

$$\frac{1}{100}(x_1^2 - x_2^2)^2 = x_2^2 - x_1^2$$

$$(x_1^2 - x_2^2)\left(\frac{1}{100}(-x_1^2 + x_2^2) + 1\right) = 0$$

$x_1 \neq x_2$, т.е. $x_1^2 - x_2^2 = +\cancel{\frac{1}{100}}\ 100$

т.е. искомое: $\frac{100}{10} = 10$

Ответ: 10.

Чистовик

Страница 5

№3

$$\begin{cases}(xy+3x-2y-6)|y-x-8|=(x-5)|xy+3x-2y-6| \\ \sqrt{y-x+10}=y-4\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-2)(y+3)|y-x-8|=(x-5)|x-2||y+3| \\ \sqrt{y-x+10}=y-4\end{cases}$$ ОДЗ: $y \geq 4$ *

Сүч *:

$$\begin{cases}((x-2)|y-x-8|-(x-5)|x-2|)(y+3)=0 \quad (1) \\ \sqrt{y-x+10}=y-4 \quad (2) \longrightarrow \text{сүч *}: \boxed{x=9y-y^2-6} \; ** \end{cases}$$

$y \geq 4$

(1) $y=-3$ → не удовл *.

или $(x-2)|y-x-8|=(x-5)|x-2|$

I $x \geq 2$

$(x-2)(|y-x-8|-(x-5))=0$

$x=2$

y **: $y^2+8-9y=0$

$y=8$ (сүч *)

$|y-x-8|=x-5$

$x \geq 5$

$\begin{cases}y-x-8=x-5 \\ \cancel{y-x-8 \geq 0}\end{cases}$

$\boxed{y=2x+3}$

~~y **: $x=18x-4x^2$~~

$x=18x+27-4x^2-12x-9-6$

или $\begin{cases}y-x-8=5-x \\ \cancel{y-x-8<0}\end{cases}$

$y=13$

$x=-58$

~~$y-x-8>0$ т.е. нет действ. решений~~

но $x \geq 2$, т.е. нет действ. реш. (НДР)

II $x<2$

$|y-x-8|=-x+5$

$y-x-8=5-x$ НДР (см п I)

$y-x-8=x-5$ (см п I)

~~т.е. нет действ. решений.~~

$4x^2-5x-12=0$

$x_{1,2}=\frac{5 \pm \sqrt{25+192}}{8}$; $x_{1,2}=\frac{5 \pm \sqrt{217}}{8}$ т.к. $x \geq 2$, то $x=\frac{5+\sqrt{217}}{8}$

$y=\frac{5+\sqrt{217}}{4}+3$

Ответ: $(2;8)$; $\left(\frac{5+\sqrt{217}}{8}; \frac{5+\sqrt{217}}{4}+3\right)$

Черновик

$85 = 7x + 11y + 17z$

0 $85 = 7x$

1 $85 = 7x + 11$ $7x = 74$

2 $85 = 7x + 22$ $7x = 63 \to x = 9$

3 $85 = 7x + 33$ $7x = 52$

4 $85 = 7x + 44$ $7x = 41$

5 $85 = 7x + 55$ $7x = 30$

6 $85 = 7x + 66$ 19

7 8

$4 \cdot 17 = 68$

85 − 68 = 17

$40 + 75 + 75 =$
$= 190$

$68 = 7x + 11y$

68	0
57	1
46	2
$\boxed{35}$	3
24	
13	
2	

$y = 3$
$x = 5$

51	0
40	1
29	2
18	3
7	4

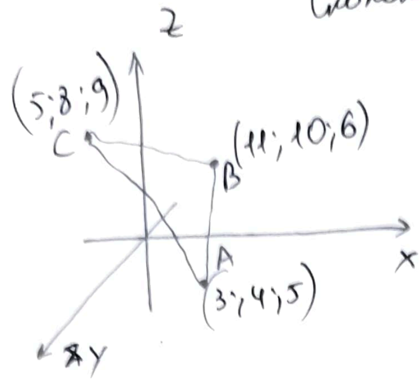
$z = 2$

34
23
12
1

Чистовик | Страница 6

№8

Сколько точек?



$A(3;4;5)$
$B(11;10;6)$
$C(5;8;9)$

Составим ур-ние плоскости Δ-ка ABC:

$$\cancel{\begin{vmatrix} x-3 & 8 & 2 \\ y-11 & 6 & 4 \\ z-5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0}$$

$24(x-3)+2(y-4)+32(z-5) -$

$- 12(z-5) - 32(y-4) - 4(x-3) = 0$

$$\begin{cases} 2x-3y+2z-4=0 \\ 3\le x\le 11 \\ 4\le y\le 10 \\ 5\le z\le 9 \\ x,y,z\in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$2x-3y=4-2z$

$3y=4-2z-2x$

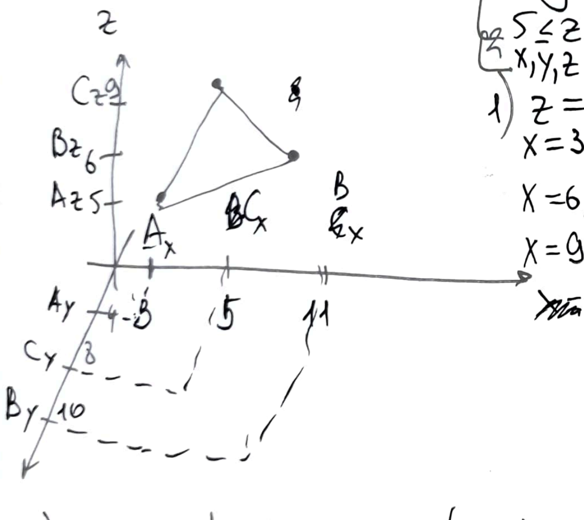
y четный

1) $z=5$

$2x+6=3y$

y - четное

$x=3;\ y=4$
$x=6;\ y=6$
$x=9;\ y=8$
3 точки



2) $z=6$
$2x+8=3y$
y-чет.
$x=5;\ y=6$
$x=8;\ y=8$
$x=11;\ y=10$
3 точки

3) $z=7$
$2x+10=3y$
$x=4;\ y=6$
$x=7;\ y=8$
$x=10;\ y=10$
3 точки

4) $z=8$
$2x+12=3y$
$x=3;\ y=6$
$x=6;\ y=8$
$x=9;\ y=10$
3т.

5) $z=9$
$2x+14=3y$
$x=5 \quad y=8$
$x=8 \quad y=10$
2т.

$\boxed{\text{Ответ: 14 точек}}$

Чернавик

A(3;4;5)
B(11;10;6)
C(5;8;9)

$$\begin{vmatrix} x-3 & 8 & 2 \\ y-4 & 6 & 4 \\ z-5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$Ax+By+Cz+D=0$

~~24(x-3)(y-4)·8+4+~~

$(x-3)6\cdot4+(y-4)\cdot2+32(z-5)-12(z-5)-8\cdot(y-4)\cdot4-$

$-4(x-3)=0$

$20x-60-30y+120+20z-100=0$

$2x-3y+2z$

$6-12+10-4=0$

$22-30+12-4$

$10-24+18-4$

$2x-3y=-6$

$2x=3y-6$

$2x+6=3y$

чёт

4
~~8~~
6
~~7~~
8
~~9~~
10

$2x=12$

$2x=3y-8$

$x=\frac{3y-8}{2}$

$12-18+10-4$

$x=2$

4

~~2x+6=~~

$2x=18$

$x=9$

$x=\frac{3y}{2}-6$

4	0
6	3
8	6
10	9

6 $x=5$

8 $x=8$

10

$2z-4$

$x=\frac{3y-10}{2}=\frac{3y}{2}-5$

4	6
6	9
8	12
10	15

$x=\frac{3y}{2}-7$

4	1
6	4
8	7
10	10

Черновик

Страница 7

$S(n) = a_{74} + a_{73} + \ldots + a_0$

$S(mn) = Sn$

$S~~(mn) = a_0 \cdot m + a_1 \cdot m + \ldots~~ a_0 \cdot m$