

0 874279 520008  
87-42-79-52  
(40.21)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 14

Место проведения Москва  
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов  
наименование олимпиады

по математике  
профиль олимпиады

Черкашова Ивана Васильевича  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата  
«25» февраля 2024 года

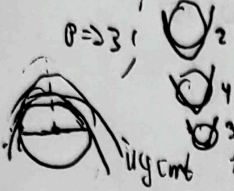
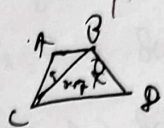
Подпись участника  
И.В.

1	2	3	4	5	6	7	8	$\Sigma$
-	+	+	+	+	-	+	0	56.

87-42-79-52  
(40.21)

Меркантиль

	0	3	И		$y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$
см	3	5	6		
каж	1	2	3		



$0 \Rightarrow 3; 5 \ 6 \ 3$   $1 \text{ см} \Rightarrow 3 \cdot C_5^2 \cdot C_6^3$

$0 \rightarrow 0$   $1 \text{ см} \Rightarrow 3 \cdot C_5^2 \cdot C_6^2$

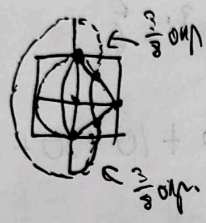
$0 \rightarrow 2 \ 1 \text{ см} \Rightarrow 3 \cdot C_5^1 \cdot C_6^3$

$x+1 = A \cdot (x-1)$

$x+1 = Ax - A$

$x \cdot (A-1) = A+1$

$(1;1); (2;0); (0;2); (1;0;3); (1;1;2); (2;1) \in \text{еще } 6 \text{ ч.}$   $x = \frac{A+1}{A-1}$



$S = \frac{1}{2} \text{ бол. опр. } (0;0) r=1 + \frac{3}{4} \text{ мал. опр. } r' = \frac{\sqrt{2}}{2} +$

$y = \frac{x+1}{2}$   $f(-1) = -1$   $f(1 + \frac{2}{x-1}) = \frac{1}{x-1}$

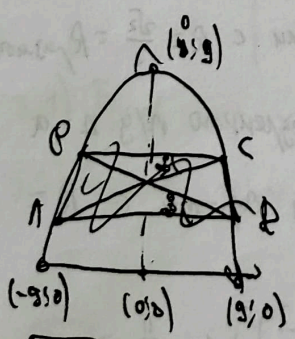
$\sqrt{y-x+10} = y-3$   $f(1+A \cdot 2A) = A$

$(x-1) \cdot |y+4| \cdot |y-x-8| = (x-4) \cdot |x-1| \cdot |y+4|$

$y \geq 3$   
 $y-x+10 \geq 0$   
 $x \leq y+10$   
 $x = \dots$   
 $\sqrt{y-x+10} = y-3 \rightarrow y-x+10 = y^2 + 6y + 9$   
 $(x-1) \cdot |y-x-8| = (x-4) \cdot |x-1|$   
 $x = -y^2 + 7y + 11$

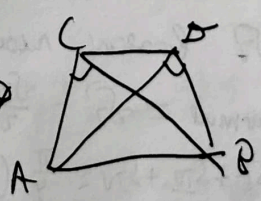
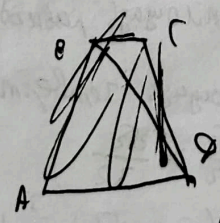
$x > 1 \Rightarrow (y-x-8) = x-4 \rightarrow y = 2x+4 \rightarrow \sqrt{x+14} = 2x+1$

$x < 1 \Rightarrow y-x-8 = 4-x \rightarrow y = 4; \sqrt{14-x} = 1; (3;4)$



$y = a - b \cdot x^2; g = a$

$0 = 9 - 6 \cdot 81 \rightarrow p = \frac{1}{9}$



$\sqrt{14-x} = 1$

$\sqrt{22-x} = 9$

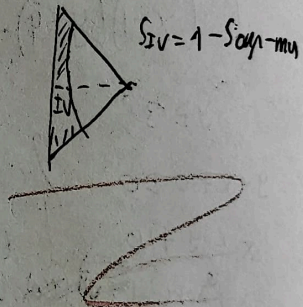
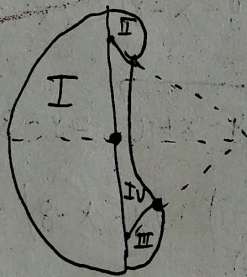
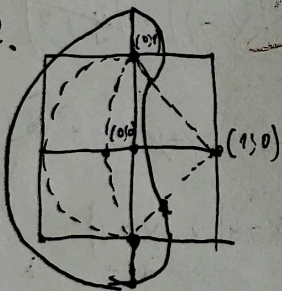
лист №1. Задача 1.

- 1) способ с 0 "универсалами":  $3 \cdot C_5^2 \cdot C_6^3 = 3 \cdot 10 \cdot 20$
- 2) способ с 1 универсалами; 2.1) если зачит:  $3 \cdot 5 \cdot C_6^3 = 3 \cdot 5 \cdot 20$   
 2.2) если капаз:  $3 \cdot C_5^2 \cdot C_6^2 = 3 \cdot 10 \cdot 15$
- 3) способ с 2 универсалами; 3.1) если 1 зач., 1 капаз:  $3 \cdot 5 \cdot C_6^2$   
 3.2) если 2 капаз:  $3 \cdot C_5^2 \cdot 6$   
 3.3) если 2 зач.:  $3 \cdot C_6^3$
- 4) способ с 3 универсалами; 4.1) если 3 кап.:  $3 \cdot C_5^3$   
 4.2) если 2 кап., 1 зач.:  $3 \cdot 5 \cdot 6$   
 4.3) если 1 кап., 2 зач.:  $3 \cdot C_6^2$

$$\Sigma = 3 \cdot (200 + 100 + 150 + 75 + 60 + 20 + 10 + 30 + 15) = 3 \cdot (450 + 90 + 110) = 3 \cdot 650 = 1950$$

Ответ: 1950.

Задача 2.



$$S_I = \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot (3 + 2\sqrt{2})$$

(площадь полуокружности с центром в (0,0) и  $R = R_{внеш} + R_{внутр} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ )

$$S_{II} = S_{III} = \frac{3}{8} \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\pi}{16} \quad (\text{площадь } \frac{3}{8} \text{ окр-ти с } R = \frac{\sqrt{2}}{2} = R_{внутр})$$

$$S_{IV} = 1 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{\pi}{8} \quad (\text{площадь равнобедренного т/у 4-а})$$

со стороной  $\sqrt{2}$  вопресть площадь четверти окр-ти с  $R = R'_{внеш} - R_{внутр} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ )

$$S_{искомое} = S_I + S_{II} + S_{III} + S_{IV} = \frac{\pi}{4} \cdot (3 + 2\sqrt{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}) + 1 - \frac{\pi}{8} =$$

$$= 1 + \frac{\pi}{4} \cdot (4 + 2\sqrt{2}) = 1 + \pi \cdot \frac{(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}} \quad \text{Ответ: } 1 + \pi \cdot \frac{(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$$

87-42-79-52  
(40.21)

лист №2. Задача 3

① ~~Корнями~~  $(x-1) \cdot (y+4) \cdot |y-x-8| = (x-4) \cdot |x-1| \cdot |y+4|$

②  $\sqrt{y-x+10} = y-3$

(=)  
на ОДЗ

(из ② ур-е следует, что  $y \geq 3 \Rightarrow y+4 \geq 0$ )

(=)  
на ОДЗ  $\begin{cases} (x-1) \cdot |y-x-8| = |x-1| \cdot (x-4) \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases}$

1) Пусть  $x=1 \Rightarrow (1; 7)$

2) Пусть  $x > 1 \Rightarrow \begin{cases} |y-x-8| = x-4 & (x > 4) \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases}$

2.1) Пусть  $y-x \geq 8 \Rightarrow \begin{cases} y = 2x+4 \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases}$

$\sqrt{x+14} = 2x+1 \Rightarrow 4x^2+4x+1 = x+14 \Rightarrow 4x^2+3x-13=0$

$D = 9 + 52 \cdot 4 = 217; x_1 = \frac{-3 + \sqrt{217}}{8} < 4 \leftarrow \text{не подходит } (x > 4)$

2.2) Пусть  $-10 < y-x < 8; \begin{cases} y-x-8 = 4-x \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{22-x} = 9; x = -59 \leftarrow \text{не подходит } (x > 1)$

3) Пусть  $x < 1; \begin{cases} |y-x-8| = 4-x \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases}$

3.1) Пусть  $y-x \geq 8 \Rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ \sqrt{22-x} = 9 \end{cases} \quad (-59; 12)$

3.2) Пусть  $-10 < y-x < 8 \Rightarrow \begin{cases} y-x-8 = x-4 \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x+4 \\ \sqrt{y-x+10} = y-3 \end{cases}$

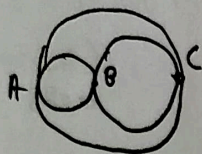
$\sqrt{x+14} = 2x+1; x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{217}}{8}; \frac{\sqrt{217}-3}{8} > 1 \leftarrow \text{не подходит } (x < 1)$

Ответ:  $(1; 7); (-59; 12)$ .

Лист №3. Задача 4.

$\widehat{AB} = 15 \text{ км}; \widehat{BC} = 25 \text{ км}; \widehat{AC} = 40 \text{ км}^*$

$t_{AB} = 5 \text{ мин}; t_{BC} = 13 \text{ мин}; t_{AC} = 19 \text{ мин}$



\*  $(R_{AB} = \frac{15}{\pi}; R_{BC} = \frac{25}{\pi} \Rightarrow R_{AC} = \frac{40}{\pi}; \widehat{AC} = \frac{40}{\pi} \cdot \pi = 40)$

$t_{поезда} = 17 + 35 \text{ мин} = 95 \text{ мин}$

$$\begin{cases} 95 = 5a + 13b + 19c \\ a, b, c \in \mathbb{N} \\ a, b, c \geq 0 \end{cases}$$

$a$  - кол-во поездов  $\widehat{AB}$   
 $b$  - кол-во поездов  $\widehat{BC}$   
 $c$  - кол-во поездов  $\widehat{AC}$

1)  $c=5 \Rightarrow$  Нет реш.

2)  $c=4 \Rightarrow$  ~~реш~~  $19 = 5a + 13b$  Нет реш. в  $\mathbb{N}$

3)  $c=3 \Rightarrow 38 = 5a + 13b \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

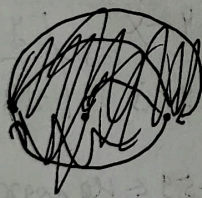
4)  $c=2 \Rightarrow 57 = 5a + 13b \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  Не подходит

5)  $c=1 \Rightarrow 76 = 5a + 13b \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$  Не подходит

6)  $c=0 \Rightarrow 95 = 5a + 13b \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 13 & 8 \end{pmatrix}$  Не подходит

Значит, автомобиль проехал  $l = 5\widehat{AB} + \widehat{BC} + 3\widehat{AC}$

к примеру:



$3\widehat{AC} \Rightarrow$  оказалось в  $C$

$\widehat{BC} \Rightarrow$  оказалось в  $B$

$5\widehat{AB} \Rightarrow$  оказалось в  $A$

$l = 5 \cdot 15 + 25 + 3 \cdot 40 = 75 + 25 + 120 = 220 \text{ (км)}$

Ответ: 220.

Задача 5.  $y = f(x): f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$

$z = \frac{1}{x-1} \Rightarrow f(1+2z) = z$

$z \neq 0$

$a = 1+2z \Rightarrow f(a) = \frac{a-1}{2}$  где  $\forall a \neq 1$

$\Rightarrow \left\{ f(x) = \frac{x-1}{2}; x \neq 1 \right\}$  - искомае функции

87-42-79-52  
(40.21)

Лист №4. Задача 5.  $f(x) = \frac{x-1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$   
 $x \neq 1$

$f(f(x)) = \frac{(\frac{x}{2} - \frac{1}{2})}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

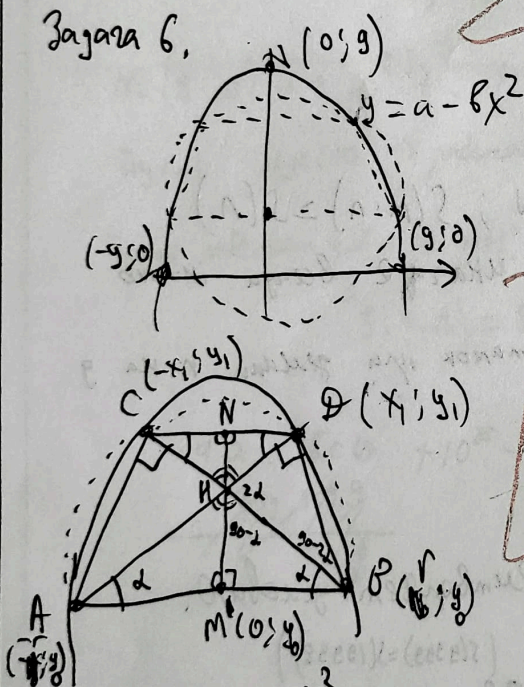
Коэффициент при  $x$  равен  $\frac{1}{2^n}$ , где  $n$ ;  $f(f(f(\dots f(x))))$   
 $n$  итераций

Значит  $g(x) = \underbrace{f(f(f(\dots f(x))))}_{10 \text{ итер}} = \frac{x}{1024} - \frac{1}{1024} + c$   
( $c = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024}$ )

тангенс угла наклона касательной к графику  $g(x)$  в точке  $x=0$  есть коэффициент при  $x$ :  $k = \frac{1}{1024}$

Ответ:  $\frac{1}{1024}$ .

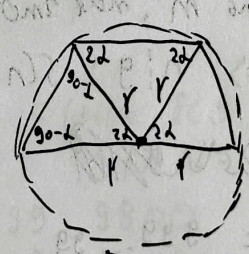
Задача 6.



$\begin{cases} g = a - b \cdot 0 \\ 0 = a - 81 \cdot b \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y = 81 - \frac{x^2}{9}$

ACDB - описанный, AB - диаметр, M - центр окружности



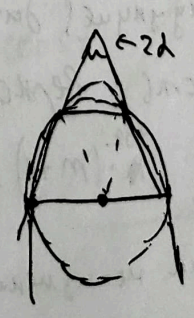
$\frac{CN}{CM} = \frac{NH}{HM} = \frac{CN}{AM}$   
по подобию  $\triangle CNM \sim \triangle AMH$

$NM = r \cdot \sin 2\alpha$

$y = 81 - \frac{x^2}{9}$   
 $x^2 + (y - y_0)^2 = r^2$   
 $y_1 - y_0 = ?$

$h = AP \cdot \sin 2\alpha$   
 $h = r \cdot \sin 2\alpha$

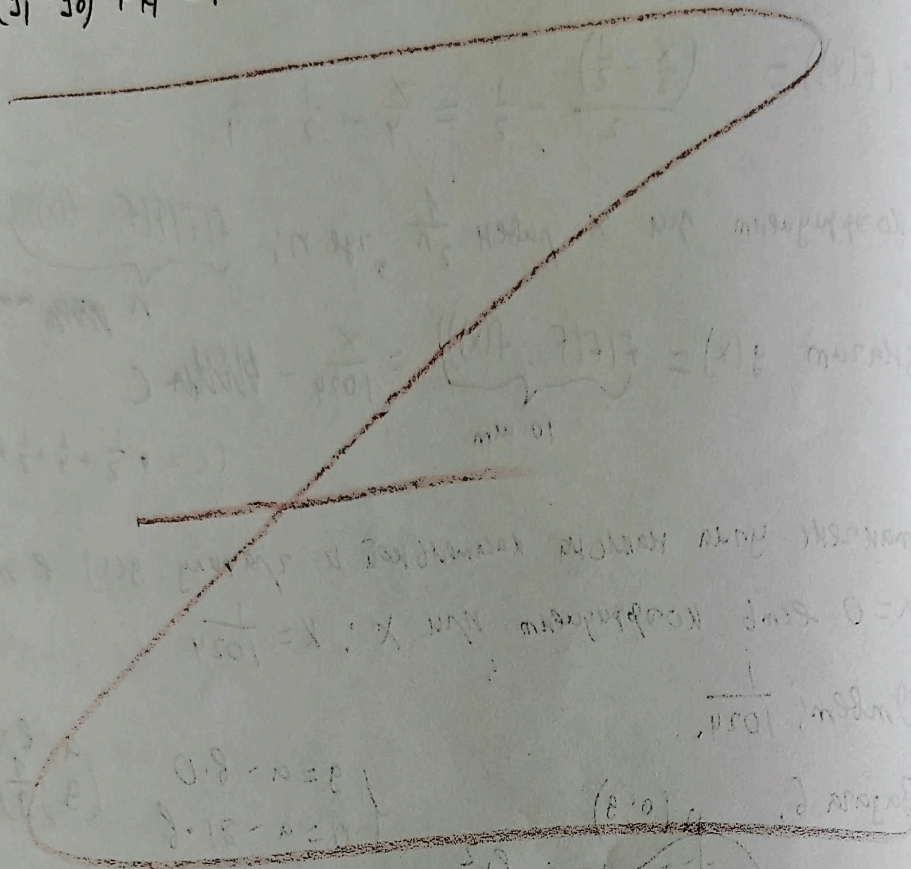
$AP = r \cdot 2 \cos 2\alpha$



лист 5 загадка.

$$\frac{x^2}{9} = 9 - y; \quad x^2 = 81 - 9y$$

$$(y_1 - y_0)^2 + x^2 = r^2$$



Задача 7.  $\forall m: 1 \leq m \leq n; m \in \mathbb{N}; S(m \cdot n) = S(n)$

$n$  должно делиться на  $9$ , иначе всегда можно будет подобрать  $m$ , так что остаток при делении  $n$  на  $9$  изменится  $\Rightarrow n:9; S(n):9$

$$S(n) \equiv S(m \cdot n) \pmod{9}$$

число  $n = \underbrace{999 \dots 99}_{85 \text{ шт.}}$  удовлетворяет условию.

$$(S(999) = S(19998))$$

индукция! база  $m=1, 2$  очевидна;

$$S(n) = C$$

пусть верно для  $m \Rightarrow S(m \cdot n) = S(n) \Rightarrow S(m \cdot 99 \dots 9) = C$

$$m+1: \underbrace{999 \dots 999}_{m \text{ шт.}} \cdot (m+1) = \underbrace{999 \dots 999}_{m \text{ шт.}} + 999 \dots 999 \cdot 10^{85} - 1$$

добавит 1 в первом разряде  
добавит 1 в последний разряд  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  сумма не изменится  $\Rightarrow$  доказано.

Ответ:  $999 \dots 9$  (85 девяток)



Черкович

$a_n = 10^n - 1$

$m \cdot (10^n - 1)$

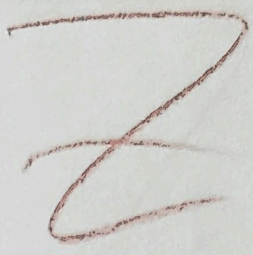
9999...

9999

9999

9999

100000000



9999  
55  
49995  
49995  
49995  
5

9999  
127  
16999993  
1999998  
99999

$70000 - 7 = 69993$



$1269873 \rightarrow \Sigma = 10 + 17 + 9 = 36$

~~$a_n = 10^n - 1$~~   ~~$m \cdot (10^n - 1)$~~

$n = 9 \dots 9$

$S(n) = 9 \cdot 10^{85}$

$m (9 \cdot 10^{84} + 9 \cdot 10^{83} + \dots + 9)$

$10^9 < m < 10 \rightarrow \text{рабочая } m$

$10^9 < m < 10 \rightarrow \text{рабочая } m \Rightarrow m+1: \frac{9 \cdot 99 \cdot (m+1)}{S = \text{const}} = \frac{99 \cdot 9 \cdot m + 999 \dots}{S = \text{const}}$   
 $\Downarrow$   
 $S(9 \cdot 9) = S(m \cdot 99 \cdot 9)$

$c \cdot a \dots b \cdot c + 10^{25} - 1 \Rightarrow c \cdot (a+1) a \dots b \cdot c$

~~999999~~

999..9900  
99..9999  
10099999999  
S = const

299..99700  
99999999

30999999699  
S = const

