-11 Матем

0 018707 710009

01-87-07-71
(39.8)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Шариповой Зарины Ильдаровны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
01-87-07-71	68	4	4	12	12	12	12	12	0

68 (шестьдесят восемь)

01-87-07-71

$7a+11b+17c \equiv 0 \pmod 5$

Черновик

$2a+b+2c \equiv 0 \pmod 5$

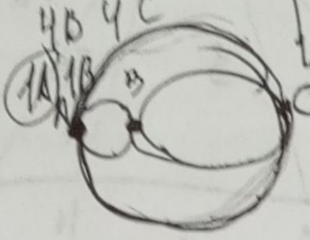
$|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|+\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=0$

$\underbrace{|x^3+y^3-19|+|x^2y+xy^2+6|}_{a}+\frac{|y|}{y}-\frac{|x|}{x}+2=0$

a 2 2a 2c

b 4 4b 4c

c 1 1a 1b



$\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$

$y<0$, $x<0$

$y<0$, $x>0$

$a-1-1+2=0$

$a-1+1+2=0$

$y>0$, $x<0$

$a+1+1+2=0$

$y>0$, $x>0$

$a+1-1+2=0$

$= b^2c^2$

$\cancel{b^2c-4a^2b+4ab}$

$$\frac{8b^2c^2-8a^2bc+8abc+8a^2c^2-8ab^2c+8abc+8a^2b^2-8abc^2+8abc}{8abc}=$$

$\underbrace{|x^3+y^3-19|}_{0}+\underbrace{|x^2y+xy^2+6|}_{0}=0$

$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq 3\sqrt[3]{abc}$

$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$

$a^2>bc$

$b^2>ac$

$c^2>ab$

$(abc)^2>(abc)^2$

$\begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ c\neq 0 \end{cases}$ $a,b,c>0$

$x^3+y^3=19$

$xy(x+y)=-6$

$\underbrace{(x+y)}_{b}((x+y)^2-3\underbrace{xy}_{c})=19$

$xy(x+y)=-6$

$b(b^2-3c)=19$

$bc=-6$

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=$$

$b^3-3bc=19$

$\frac{bc}{a}-a+1+\frac{ca}{b}-b+1+\frac{ab}{c}-c+1=$

$=\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)-(a+b+c)+3$

$b^3+18=19$

$b=1$ $\quad x+y=1$ $\quad \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ либо наоборот

$c=-6$ $\quad xy=-6$

$\cancel{\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2-3abc}{abc}}$

$85 \vdots 5 \vdots 17$

$\frac{bc}{a}-a=\frac{bc-a^2}{a}$

$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c} \vee a+b+c$

$\frac{bc}{a} \vee a \quad bc \quad a^2$

$7\equiv 2$

$17\equiv 2$

$11\equiv 1$

$17 \cdot 4 = 68 \quad 17$

Черновик

$(3\sin\alpha - 4\cos^3\alpha)$

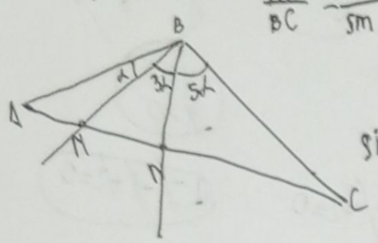
$\frac{BC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin(\beta+9\alpha)}$

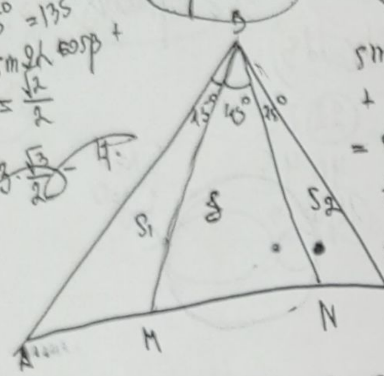
$120^\circ + 15^\circ = 135^\circ$

$\sin 2\alpha \cos\beta +$

$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ $\sin 3\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 480^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\cdot$





$\sin 3\alpha = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha \sin 2\alpha = \sin\alpha(1-2\sin^2\alpha) + \cos\alpha \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha = \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha - 2$

$\sin\frac{6}{3}$

$\frac{\times\ 28\ 84}{112}$

$\frac{AB\cdot BN\cdot\sin\alpha}{2} = S_1$

$\frac{BC\cdot BN\cdot\sin 5\alpha}{2} = S_2$

$+ \frac{BN\cdot BN\cdot\sin 3\alpha}{2}$

$\frac{AN\cdot h}{2} = S_1$

$\frac{NC\,h}{2} = S_2$

$\frac{\times\ 84\ 84}{7056}$

$\begin{cases} S_1 + S_2 = 5 \\ S_1\cdot S_2 = 3 \end{cases}$

$S_1 = S - S_2$

$5S_2 - S_2^2 - 3 = 0$

$S_2^2 - 5S_2 + 3 = 0$

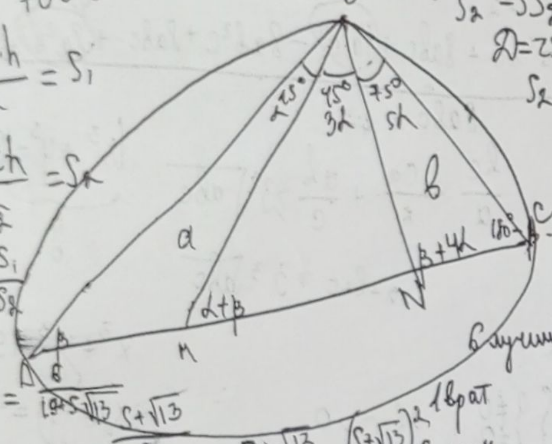
$D = 25 - 12 = 13$

$S_2 = \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

$\frac{AB\cdot BC\cdot BN\cdot BN\cdot\sin\alpha\cdot\sin 5\alpha}{4} = 3$

$\frac{AN}{NC} = \frac{S_1}{S_2}$

$\frac{AB\cdot BN\sin\alpha}{2} + \frac{BC\cdot BN\sin 5\alpha}{2} = 5$



в случаях неизвестна

$\frac{AN}{NC} = \frac{12}{38+10\sqrt{13}} = \frac{12}{19+5\sqrt{13}}$

$\frac{5+\sqrt{13}}{2} : \frac{5-\sqrt{13}}{2} = \frac{5+\sqrt{13}}{5-\sqrt{13}} = \frac{(5+\sqrt{13})^2}{12}$

1 врат, 2 зану, 3 нап

3 вр, 5 зау, 6 нап, 3 успыл.

$AB\cdot BN\sin\alpha + BC\cdot BN\sin 5\alpha = 10$

$AB\cdot BN\sin\alpha \cdot BC\cdot BN\sin 5\alpha = 12$

$a + b = 10 \quad a = 10 - b$

$ab = 12$

$10b - b^2 - 12 = 0$

$b^2 - 10b + 12 = 0$

$D = 100 - 48 = 52$

$b = \frac{10\pm 2\sqrt{13}}{2} = 5\pm\sqrt{13}$

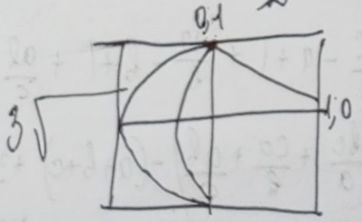
$a = 5\mp\sqrt{13}$

$b = 5+\sqrt{13}$

$a = 5-\sqrt{13}$

$\frac{8\cdot 7}{2}\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7}{6} = 16\cdot 49\cdot 9$

$\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} \le 3$



$\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} - a - b - c$

$c\left(\frac{b-a}{a}\right) + b($

$\frac{bc}{a}$ b

$\frac{\times\ 28\ 3}{84}$ $+\frac{672}{7056}$ $\frac{\times\ 84\ 4}{336}$

01-87-07-71 (39.8)

Чистовик, Задача 3

$$|x^3+y^3-19| + |x^2y+xy^2+6| + \frac{x|y| - y|x| + 2xy}{xy} = 0$$

Во-первых: $\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$

Во-вторых, обозначим $|x^3+y^3-19| + |x^2y+xy^2+6|$ за „a", тогда т.к. $|x^3+y^3-19| \ge 0$ и $|x^2y+xy^2+6| \ge 0 \Rightarrow a \ge 0$

$$a + \frac{|y|}{y} - \frac{|x|}{x} + 2 = 0$$

Рассмотрим 4 случая:

1) $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$: $a + 1 - 1 + 2 = 0$, $a+2=0$, $\varnothing$

2) $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases}$: $a - 1 - 1 + 2 = 0$, $a=0$, V

3) $\begin{cases} x<0 \\ y>0 \end{cases}$: $a + 1 + 1 + 2 = 0$, $a+4=0$, $\varnothing$

4) $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases}$: $a - 1 + 1 + 2 = 0$, $a+2=0$, $\varnothing$

тогда данное равенство возможно только при $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases}$

$\Leftarrow$ $a=0$

$$\begin{cases} |x^3+y^3-19| = 0 \\ |x^2y+xy^2+6| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3 = 19 \\ xy(x+y) = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y)((x+y)^2 - 3xy) = 19 \\ xy(x+y) = -6 \end{cases}$$

Обозначим $(x+y)$ за „b", а (xy) за „c":

$$\begin{cases} b(b^2-3c) = 19 \\ bc = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} b^3 = 3bc + 19 \\ bc = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} b^3 = 1 \\ bc = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 1 \\ c = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Вспомним, что $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases} \Rightarrow$ подходит только пара $(x;y) = (3;-2)$

Подставим: $\underbrace{|27-8-19|}_{0} + \underbrace{|-18+12+6|}_{0} + \underbrace{\frac{6+6-12}{-6}}_{0} = 0$ верно

Ответ: $(x;y) = (3;-2)$

Лист №1 из 9

Чистовик: Задача 1

Есть 3 вратаря, 5 защитников, 6 нападающих, 3 „универсала".

Выбрать нужно 1 вратаря, 2 защитников, 3 нападающих.

На роль лучшего вратаря „претендуют" только вратари => способов выбрать одного вратаря 3

На роль лучшего защитника „претендуют" защитники и „универсалы" => всего их 8 => способов выбрать двоих: $C_8^2 = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$

На роль лучшего нападающего „претендуют" нападающие и „универсалы". И т.к. „универсал" может быть и нападающим и защитником => он может получить „награду" дважды; тогда способов $C_9^3 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{6} = 84$

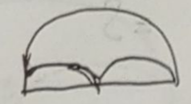
Итого способов $3\cdot 28\cdot 84 = 7056$

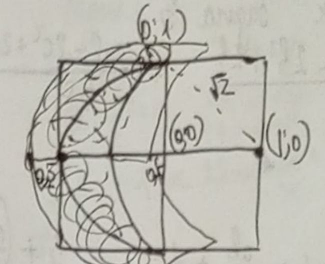
Ответ: 7056 способов

Лист 2 из 9

01-87-07-71 (39.8)

Черновик



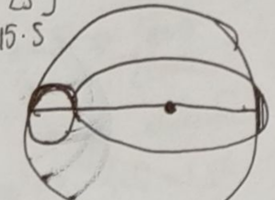


$2\pi R = 30$ $R = \frac{15}{\pi}$ $R = \frac{25}{\pi}$

$R' = (\frac{40}{\pi}) = 80$

$b = c = a$

b 3 25·3
c 5 15·5



$\frac{bc}{a} - a$

$\frac{bc}{a} - b = \frac{b(c-a)}{c}$

$\frac{ac}{b} -$

$\frac{bc}{a} - a + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - bc$

$bc - a^2$ $a+b+c \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$

$3\sqrt[3]{abc}$

7≡7
11≡11

a+b+c

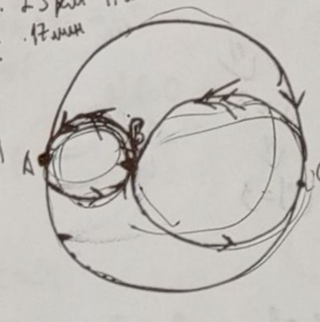
$\frac{\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b}}{2} \ge c$

$2(bc - a^2 + a)$ $\ge a+b+c$

AB: 15 км - 7 мин
BC: 25 км - 11 мин
AC: 17 мин

1
3
5

85 мин



$S(mn) = S(n)$

AC → CA

17·5
17·4 = 68
17·3 = 51
17·2 = 34 51

17 мин AB → BC → CB → BA

18+18 34

22
12
28

11+11+11 = ∅
11+11+7+7 ∅
11+7+7+7+7
11+11+11+11+11 ∅
11+11+11+11 +7
11+11+11 +7+7+7
11+11+7+7 ...
11+7+7

17·1 11·6 ∅
11·5
11·4 +24
11·3 35
11·2 57
11·1 68

n mn
11+11+11+7+7+7+7

11·7(6)
11·7
11·6
11·5 30
11·4 41

11·3 52
11·2 63 11·2+7·9
11·1 74
11·0 7·0?

Чистовик: Задача 5

$$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=S$$

$\begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ c\neq 0 \end{cases}$ $a,b,c>0$

$$S=\frac{bc}{a}-a+1+\frac{ca}{b}-b+1+\frac{ab}{c}+1-c = 3+\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right)-(a+b+c)$$

Оценим $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}$

каждую пару слагаемых рассмотрим по неравенству Коши:

$$\frac{\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}}{2}\geq\sqrt{b^2}=b$$

$$\frac{\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}}{2}\geq\sqrt{c^2}=c$$

$$\frac{\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}}{2}\geq\sqrt{a^2}=a$$

сложим: $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq a+b+c$

$\Downarrow$

$S\geq a+b+c-(a+b+c)+3=3$

$\Downarrow$

$S\geq 3$

$\Downarrow$

$\min(S)=3$

Пример: $a>0, b>0, c>0$ $a=b=c=2$:

$$S=\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=\frac{2a^2-2a^2+2a}{2a}+\frac{2a^2-2a^2+2a}{2a}+\frac{2a^2-2a^2+2a}{2a}=1+1+1=3$$

$\Rightarrow S=3$ достигается

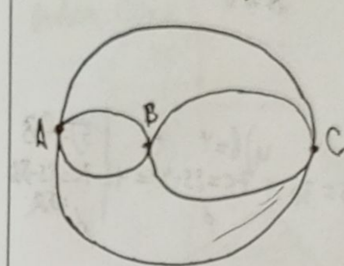
Тогда т.к. $a>0, b>0, c>0$, мы, например, можем взять $a=b=c=2$, и из написанного выше $S=3$, т.к. $a=b=c$

Ответ: минимум 3, пример: $a=b=c=2$ (можно любое другое значение $a=b=c>0$)

Лист 3 из 9

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик: Задача 6



AB = 15 км 7 минут

BC = 25 км 14 минут

AC: 17 минут

$S_{общ}$ = 1 час 25 минут = 85 минут.

$\Downarrow$

$17a+11b+7c=85$ где $\left[\begin{array}{l} a,b,c=0 \\ a,b,c\in\mathbb{N}\end{array}\right.$

1) $a=5\Rightarrow\begin{cases}b=0\\c=0\end{cases}$

тогда автомобиль должен был 5 раз проехать по дуге AC но т.к. $b=0$ и $c=0$ такое невозможно, т.к. должен был проехать четное число дуг AC

2) $a=4\Rightarrow 11b+7c=17$

$b\leq 1$

1) $b=1$ $7c=6$ $\varnothing$

2) $b=0$ $7c=17$ $\varnothing$

3) $a=3\Rightarrow 11b+7c=34$

$b\leq 3$

1) $b=3$ $7c=34-33=1$ $\varnothing$

2) $b=2$ $7c=34-22=12$ $\varnothing$

3) $b=1$ $7c=34-11=23$ $\varnothing$

4) $b=0$ $7c=34$ $\varnothing$

4) $a=2\Rightarrow 11b+7c=51$

$b\leq 4$

1) $b=4$ $7c=51-44=7$ $c=1$

2) $b=3$ $7c=51-33=18$ $\varnothing$

3) $b=2$ $7c=51-22=29$ $\varnothing$

4) $b=1$ $7c=51-11=40$ $\varnothing$

5) $b=0$ $7c=51-0=51$ $\varnothing$

Лист 4 из 9

5) $a=1\Rightarrow 11b+7c=68$

$b\leq 6$

1) $b=6$ $7c=68-66=2$ $\varnothing$

2) $b=5$ $7c=68-55=13$ $\varnothing$

3) $b=4$ $7c=68-44=24$ $\varnothing$

4) $b=3$ $7c=68-33=35$ $c=5$

5) $b=2$ $7c=68-22=46$ $\varnothing$

Чистовик: продолжение задачи 6

6) $b=1$
$7c=68-11=57$
$\varnothing$

7) $b=0$
$7c=68$
$\varnothing$

⑥ $a=0 \Rightarrow 11b+7c=85$
$b\le 7$

1) $b=7$
$7c=85-77=8$
$\varnothing$

2) $b=6$
$7c=85-66=19$
$\varnothing$

3) $b=5$
$7c=85-55=30$
$\varnothing$

4) $b=4$
$7c=85-44=41$
$\varnothing$

5) $b=3$
$7c=85-33=52$
$\varnothing$

6) $b=2$
$7c=85-22=63$
$c=9$

7) $b=1$
$7c=85-11=74$
$\varnothing$

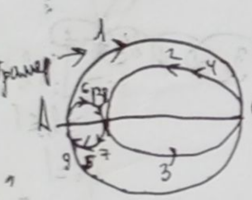
8) $b=0$
$7c=85$
$\varnothing$

Итого: нужно рассмотреть 3 детальные случая:

1) $a=2$, $b=4$, $c=1$
2) $a=1$, $b=3$, $c=5$
3) $a=0$, $b=2$, $c=9$

Заметим, что если автомобиль выехал из точки A и приехал вновь в нее, то в т. A он побывал четное количество раз, при этом четное, потому что приезжая в A, автомобиль образует цикл в узле, степень начальной и конечной вершины четная.

1) $a=2 \Rightarrow$ 2 раза побывал в „A", 2 в „C"
$b=4 \Rightarrow$ 2 раза в „B", 2 в „C"
$c=1 \Rightarrow$ 1 раз в „A", 1 раз в „B"
$\Big\}$ 3 раза в „A" $\Rightarrow$ не подходит



2) $a=1 \Rightarrow$ 1 раз „A", 1 раз „C"
$b=3 \Rightarrow$ 3 раза „B", 3 раза „C"
$c=5 \Rightarrow$ 5 раз „A", 5 раз „C"
$\Big\} \Rightarrow$ 6 раз „A"

3) $a=0 \Rightarrow$ 0 раз „A", 0 раз „C"
$b=2 \Rightarrow$ 2 раза „B", 2 раза „C"
$c=9 \Rightarrow$ 9 раз „A", 9 раз „B"
$\Big\}$ 9 раз „A" - не подходит

Подходит только 1 вариант

~~Ответ~~. Найдем длину дуги AC: ~~2AB~~ чтобы проехать 2 раза по $\overset{\frown}{AB}$ надо проехать $2\pi r=30$ км, где r - радиус окр, которой принадлежат A и B

$r=\frac{15}{\pi}$

Аналогично $R=\frac{25}{\pi}$, где R - радиус окр, которой принадлежат B и C

$R'=\frac{40}{\pi}$ - радиус окр которой принадлежат A и C $\Rightarrow$ длина полуокр этой - $\pi R'=\frac{40\pi}{\pi}=40$ (км)

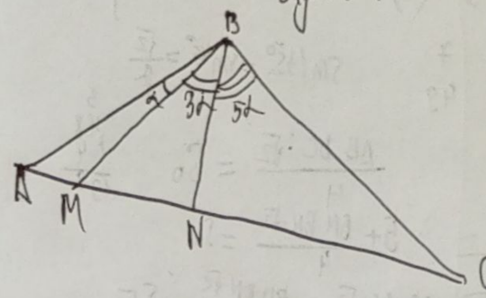
$\Rightarrow$ весь путь автомобиля $1\cdot 40+3\cdot 25+5\cdot 15=40+75+75=190$ км

Лист 5 из 9

чистовик: продолжение задачи 6

Ответ: 190 км

Задача 4



Пусть $\angle ABM=15^\circ=\alpha \Rightarrow \angle MBN=45^\circ=3\alpha$
$\angle NBC=75^\circ=5\alpha$

$$\begin{cases} S_{\triangle ABM}+S_{\triangle NBC}=5 \\ S_{\triangle ABM}\cdot S_{\triangle NBC}=3 \end{cases}$$

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle NBC}+S_{\triangle MBN}=5+S_{\triangle MBN}=5+\frac{BM\cdot BN\cdot \sin 3\alpha}{2}=5+\frac{BM\cdot BN\cdot\sqrt{2}}{4}$$

$\sin 3\alpha = \sin 45^\circ$

С другой стороны $S_{\triangle ABC}=\frac{AB\cdot BC}{2}\cdot\sin 9\alpha=\frac{AB\cdot BC}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}AB\cdot BC}{4}$

$\sin 9\alpha = \sin 135^\circ$

$$\Downarrow$$

$$5=\frac{\sqrt{2}}{4}(AB\cdot BC-BM\cdot BN)$$

Пусть $AB\cdot BC=a$, а $BM\cdot BN=b$

$a-b=\frac{20}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2}$

$$S_{\triangle ABM}\cdot S_{\triangle NBC}=\left(\frac{AB\cdot BM}{2}\cdot\sin\alpha\right)\cdot\left(\frac{BN\cdot BC}{2}\sin 5\alpha\right)=\frac{(AB\cdot BC)(BM\cdot BN)}{4}\sin\alpha\sin 5\alpha=$$

$$=\frac{ab}{4}\sin\alpha\sin 5\alpha=3$$

$$\sin\alpha\sin 5\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-5\alpha)-\cos(\alpha+5\alpha)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 4\alpha-\cos 6\alpha\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 60^\circ-\cos 90^\circ\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{4}$$

$\alpha-5\alpha=-4\alpha$, $\alpha+5\alpha=6\alpha$, $4\alpha=60^\circ$, $6\alpha=90^\circ$

$\frac{ab}{4}\cdot\frac{1}{4}=3$

$ab=48$

$$\Downarrow$$

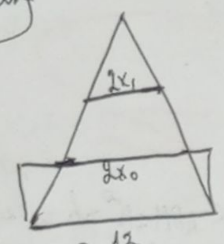
$$\begin{cases} a-b=10\sqrt{2} \\ ab=48 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=b+10\sqrt{2} \\ b^2+10\sqrt{2}b-48=0 \end{cases}$$

$D=200+48\cdot 4=200+192=392=7^2\cdot 2^3 \longrightarrow a=12\sqrt{2}=AB\cdot BC$

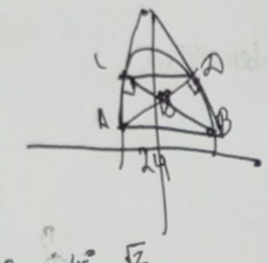
$b=\frac{-10\sqrt{2}\pm 14\sqrt{2}}{2}$ $\left[\begin{array}{l} b=2\sqrt{2} \\ b=\frac{-24\sqrt{2}}{2}=-12\sqrt{2}\ \varnothing, \text{ т.к. } b>0 \end{array}\right.$

Лист 6 из 9

Черновик



$S(mn)=S(n)$



$S(n^2)=S(n)$

S 7

2S 49

$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{4}(AB\cdot BC - BM\cdot BN) = S$

$\frac{AB\cdot BC\cdot\sqrt{2}}{4} = S_0$

3
48
+4
192

$a-b=\frac{20}{\sqrt{2}}$

$5+\frac{BM\cdot BN\cdot\sqrt{2}}{4}=S_0$

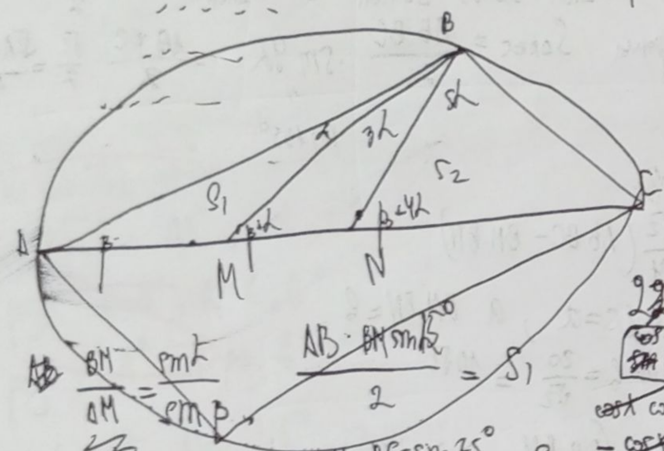
$\frac{abcd}{abcd}$

$\frac{AB\cdot BC\cdot\sqrt{2}}{4} = \frac{BM\cdot BN\cdot\sqrt{2}}{4} + \frac{BM\cdot BN\cdot\sqrt{2}}{4}$

$S_1+S_2=S$

$S_1\cdot S_2=3$

392 | 2
196 | 2
98 | 2
49 | 7^2



$\cos 4L = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 90^\circ = 0$

$8\cdot 56$

448

$\times 56$
8

$2\sin x\sin y = 2$

$\cos(x-y) - \cos(x+y)$

$\cos x\cos y + \sin x\sin y -$

$- \cos x\cos y +$

$\frac{BM}{AM} = \frac{\sin L}{\sin\beta}$

$\frac{AB\cdot BM\sin L}{2} = S_1$

$\frac{BN\cdot BC\cdot\sin 75^\circ}{2} = S_2$

$\frac{BN}{NC} =$

196
2
392

49
8
392

196 | 2
18 | 98
16

$\frac{BN}{NC} = \frac{\sin(\beta+9L)}{\sin 5L}$

$\sin L\sin 5L = \frac{1}{2}\sin$

$\frac{1}{2}(\cos(-4L) - \cos 6L)$

$\frac{1}{2}(\cos 4L - \cos 6L) = \frac{1}{4}$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AM}{NC} = \frac{BM\cdot\sin\beta\cdot\sin(\beta+9L)}{\sin L\cdot BN\cdot\sin 5L}$

$\frac{AB\cdot BM\cdot\sin L}{2}\cdot\frac{BC\cdot BN\cdot\sin 5L}{2} = 3$

$\sin 30^\circ\sin 60^\circ = \frac{1}{2}(\cos 30^\circ - \cos 90^\circ)$

$\frac{ab}{4}\cdot\sin L\cdot\sin 5L = 3$

$\frac{\sqrt{3}}{4}$

$ab = \frac{12}{\sin L\cdot\sin 5L} = 48$

01-87-07-71
(39.8)

Чистовик: Продолжение задачи 4

$\left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=\frac{1}{b^2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0^2=x_1^2 \quad \varnothing, \text{ т.к. } x_0>0,\ x_1>0 \text{ и } x_1\neq x_0 \\ x_0^2-x_1^2=\frac{1}{b^2}\end{array}\right.$

$h = b(x_0^2-x_1^2) = \frac{b}{b^2} = \frac{1}{b}$

~~$AB^2 = (x_0+x_1)^2 + (18-bx_1^2-18+bx_0^2)^2 = (x_0-x_1)^2 + b^2(x_0^2-x_1^2)^2$~~

~~$AD^2 = (x_0+x_1)^2 + (18-bx_1^2-18+bx_0^2)^2 = (x_0-x_1)^2 + b^2(x_0^2-x_1^2)^2$~~

~~т.к. $x_0\neq x_1$ (по условию)~~

~~AC и BD пересекаются, найдем эту точку: Пусть уравнения прямой AC — это $y=kx+c$~~

$\sqrt{\frac{a}{b}} = 12$

$\frac{a}{b} = 144$, $a=18$

~~$b=\frac{144}{18}=8$~~ $b=\frac{a}{144}=\frac{18}{144}=\frac{1}{8}$

~~$h=\frac{1}{b}=\frac{1}{8}=0{,}125$~~ $h=\frac{1}{b}=8$

~~Ответ: $h=0{,}125$~~ Ответ: $h=8$

Лист №8 из 9

Черновик

$$-\begin{array}{l}18-bx_0^2=-kx_0+l\\18-bx_1^2=-kx_1+l\end{array}$$

$$bx_1^2-bx_0^2=k(x_1-x_0)$$

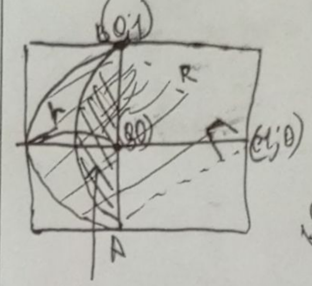
$$\sqrt{\frac{18}{b}}=12$$

$$\frac{18}{b}=144$$

$$b=\frac{\cancel{144}}{18}=\frac{72}{9}=8$$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик: Задача №2



S_4

$R=\sqrt{2}$

$r=1$

~~Для~~ Найдем изначальную площадь фигуры:

$\angle BCA=90^\circ$, т.к. точка пересечения диагоналей к стороне

~~$S_1=\frac{\pi r^2}{180^\circ}\cdot 90^\circ=\frac{\pi r^2}{2}=\frac{\pi}{2}$, S_1 — площадь фигуры, огр. точками~~

~~$S=\frac{\pi}{2}-\frac{(\sqrt{2})^2}{2}=\frac{\pi}{2}-1$~~

$S_3=\frac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot 90^\circ=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ — S_3 — площадь фигуры огр. точками OAB (с дугой AB)

$S_4=\frac{\pi}{2}-\frac{(\sqrt{2})^2}{2}=\frac{\pi}{2}-1$ — S_4 — площадь фигуры, показанной на чертеже

$S_5=\cancel{\ldots}\ \frac{\pi r^2}{\cancel{360^\circ}}\cdot\cancel{180^\circ}=\frac{\pi r^2}{2}=\frac{\pi}{2}$

$S_k=|S_5-S_4|=\cancel{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}}\ \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+1=1$

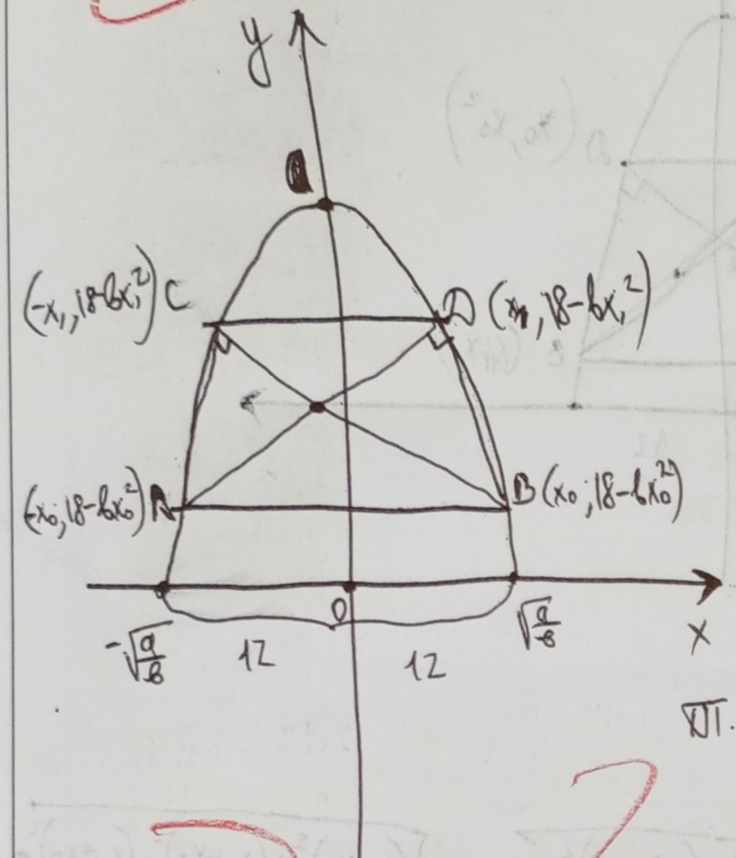
Лист №9 из 9

Чистовик: Продолжение задачи 4

$$S_{\triangle ABC}=\frac{AB\cdot BC}{2}\sin 135^\circ=\frac{AB\cdot BC}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}=\frac{AB\cdot BC\sqrt2}{4}=\frac{\cancel{12}^{3}\sqrt2\cdot\sqrt2}{\cancel{4}}=6$$

Ответ: $S_{\triangle ABC}=6$

Задача 7



$y=a-bx^2$

при $y=0$

$a=bx^2$

$x^2=\frac{a}{b}$

$x=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$

т.к. парабола симметрична относительно оси OY $\Rightarrow$ расстояния от $x=-\sqrt{\frac{a}{b}}$ и $x=\sqrt{\frac{a}{b}}$ до начала координат равны $\frac{24}{2}=12$

$a=18$

т.к. $AB\parallel OX$ и $CD\parallel OX \Rightarrow$ если $x_A=-x_0$ ($x_0>0$) $\Rightarrow$ $y_A=18-bx_0^2$

то $x_B=x_0$ $\quad y_A=y_B=18-bx_0^2$

$\uparrow$ из симметрии графика

если $x_C=-x_1$, ($x_1>0$) $y_C=18-bx_1^2$, то $x_D=x_1$ $\quad y_D=y_C=18-bx_1^2$

По условию задачи надо найти $h=18-bx_1^2-(18-bx_0^2)=\cancel{18}-bx_1^2-\cancel{18}+bx_0^2=b(x_0^2-x_1^2)$

т.к. $CD\parallel AB$.

$$\begin{cases} AC^2=(x_0-x_1)^2+(\cancel{18}-bx_1^2-\cancel{18}+bx_0^2)^2=(x_0-x_1)^2+b^2(x_0^2-x_1^2)^2 \\ CB^2=(x_0+x_1)^2+(\cancel{18}-bx_0^2-\cancel{18}+bx_1^2)^2=(x_0+x_1)^2+b^2(x_0^2-x_1^2)^2 \\ AB^2=4x_0^2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

по теореме Пифагора для $\triangle ACB$: $4x_0^2=(x_0-x_1)^2+b^2(x_0^2-x_1^2)^2+(x_0+x_1)^2+b^2(x_0^2-x_1^2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 4x_0^2=2x_0^2+2x_1^2+2b^2(x_0^2-x_1^2)^2$

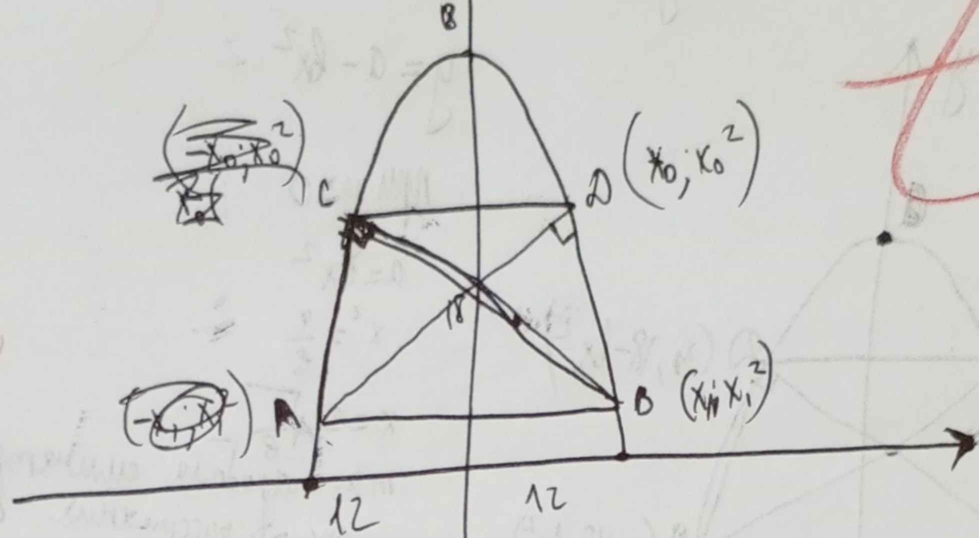
$x_0^2=x_1^2+b^2(x_0^2-x_1^2)^2$

$\underbrace{x_0^2-x_1^2}_{\text{пусть }=c}=b^2(x_0^2-x_1^2)^2 \Rightarrow \quad c=b^2c^2 \quad b^2c^2-c=0 \quad c(b^2c-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=\frac{1}{b^2}\end{array}\right.$

Лист 7 из 9

$a=18$

Морковник



$x_0^2 - x_1^2$

~~CB~~

~~AC≠~~

$$AC = \sqrt{(-x_0+x_1)^2 + (x_0^2-x_1^2)^2} = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (x_1-x_0)^2(x_1+x_0)^2} =$$

$$= (x_1-x_0)\sqrt{(x_1+x_0)^2+1}$$

$$CB = \sqrt{(x_1+x_0)^2 + (x_1-x_0)^2(x_1+x_0)^2} = (x_1+x_0)\sqrt{(x_1-x_0)^2+1}$$

$$AB^2 = 2x_1$$

$$(x_1-x_0)^2\left((x_1+x_0)^2+1\right) + (x_1+x_0)^2\left((x_1-x_0)^2+1\right) = 4x_1^2$$

$$a(b+1) + b(a+1) = 2ab + 2 = 4x_1^2$$

$$\boxed{(x_1-x_0)^2(x_1+x_0)^2+1 = 4x_1^2}$$