0 145974 460006

14-59-74-46
(37.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Шашкина Никиты Денисовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата «25» февраля 2024 года

Подпись участника

75 (семьдесят пять) ~~64~~

Чистовик №1

Задача №1

Давайте рассмотрим слова с не более, чем одной буквой „а". Тогда набор букв, из которых может состоять слово: „а", „к", „в", „л". Пусть в слове 1 буква, таких слов C_4^1. Пусть 2 буквы, тогда способов их выбрать C_4^2, а способов расставить их $2!$, итого $C_4^2 \cdot 2!$, аналогично, если 3 буквы, то $C_4^3 \cdot 3!$ и $C_4^4 \cdot 4!$ если 4 буквы. Итого общее количество способов $C_4^1 + C_4^2 \cdot 2! + C_4^3 \cdot 3! + C_4^4 \cdot 4! = 4 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 24 = 4 + 12 + 24 + 24 = 64$ способа. Но есть ещё слова с 2 буквами „а". ~~Тогда~~ Посчитаем сколько их, в таком слове всегда 2 буквы „а" и могут быть буквы „к", „в", „л". Давайте представим, что ~~нейтинтно~~ буквы „а" разные и тогда мы получим слов в $2!$ раз больше, чем на самом деле, т.к. ~~если~~ если в слове буквы „а" поменять местами, ~~что~~ то оно не изменится. Тогда слов аналогично предыдущим подсчётам $\frac{C_3^0 \cdot 2! + C_3^1 \cdot 3! + C_3^2 \cdot 4! + C_3^3 \cdot 5!}{2!} =$

$= \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 24 + 1 \cdot 120}{2} = \frac{2 + 18 + 72 + 120}{2} = \frac{212}{2} = 106$ слов. Итого суммарно слов можно составить $64 + 106 = 170$.

Ответ: 170 слов.

Задача №2

Пусть мы начали с 1. Тогда мы можем пойти куда угодно, кроме 6. Если в 2, то из 2 можно в 3, 4 и 6, т.к. $2+5=7 \Rightarrow$ 3 последовательности. Если из ~~про~~ 1 в 3, то из 3 можно в 2, 5 и 6, т.к. $3+4=7$, но $2<3 \Rightarrow$ только 5 и 6 $\Rightarrow$ ещё 2 последовательности. Если из 1 в 4, то дальше можно в 5 и 6 ~~а потом в 6~~. Это 6 и 7 последовательность. Если из 1 в 5, то дальше только в 6. Это 8 последовательность. ~~Если мы стартовали в 2, то из неё можно идти~~ Из 1 в 6 очевидно идти бессмысленно. Если ~~нужно~~ стартовать из 2, то дальше можно идти в 3, 4 и 5.* Если в 3, то дальше в 5 или 6, 10 последовательностей. Если в 4, то дальше в 5 и 6. Это 12 послед. Если в 5, то дальше в 6. Это 13 послед. Если стартовать из 3, то из неё можно идти в 5, ~~~~ а дальше в 6. Это 14. Если из 4, то дальше в 5, а потом в 6. Это 15 последовательностей.

* — забыл учесть ~~про~~ эти 3 последовательности, поэтому всего их $15+3=$ $=18$.

Ответ: 18 последовательностей.

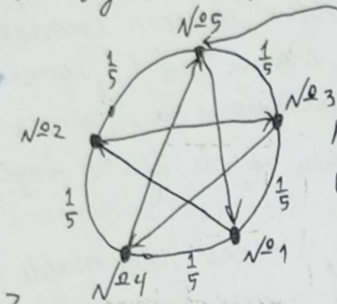
Задача №3

Давайте ~~посмотрим~~ ~~как~~ заметим, что расстояние между 1 и 2 светлячками $\frac{2}{5}$ круга. Такое впервые произойдёт, когда 2 ~~пройдёт~~ обгонит первого на $\frac{2}{5}$ круга. Скорость первого $\frac{3}{5}$ круга/мин, а второго $\frac{6}{5}$ к/мин $\Rightarrow$ это произойдёт через $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$ минуты. Через это время рас-

Чистовик №2

стояние между любыми соседними светлячками будет $\frac{2}{5}$ круга, т.к. разница скоростей у них $\frac{2}{5}$ кр/мин. Получится следующий рисунок:

точка старта



Тогда расстояние между каждым $\frac{1}{5}$ круга, что мы и хотим, т.к. $1-\frac{2}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$.

Ответ: Через $\frac{2}{3}$ минуты.

Задача №4

Пусть во время первого прохода он сделал a шагов, ~~когда~~ клювали вперёд, а длина удава k, тогда мы имеем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} 9a+\frac{9}{3}(Z-a)=k \\ 9(R-a)+\frac{9}{3}(a+T-R)=k \end{cases}$$, но возможно не T, а $T+1$.

$$\begin{cases} 9a+3(38-a)=k \\ 9(59-a)+3(a-19)=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 114+6a=k \\ 474-6a=k \end{cases}$$, но возможно 477.

$588=2k \Rightarrow k=294$, но это если шагов T, а если шагов было $T+1$, то $591=2k \Rightarrow k=295{,}5$ см, но ~~очевидно~~ тогда $a=49{,}25$, а количество шагов должно быть целым $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ кол-во шагов T, а не $T+1$.

Ответ: 294 см.

Задача №7

Давайте сравним числа $1-A$, $1-B$ и $1-C$ и тогда числа A, B и C будут с противоположными знаками.

$1-A=\frac{1}{\underbrace{111\ldots1}_{2024}}$ $1-B=\frac{2}{\underbrace{222\ldots3}_{2024}}$ $1-C=\frac{3}{\underbrace{333\ldots4}_{2024}}$

домножим числители и знаменатели: у $1-A$ на 6, у $1-B$ на 3, а у $1-C$ на 2. Итого: $\frac{6}{\underbrace{666\ldots6}_{2024}}$, $\frac{6}{\underbrace{666\ldots69}_{2024}}$, $\frac{6}{\underbrace{666\ldots68}_{2024}}$. Отсюда видно, что $1-A>1-C>1-B$, т.к. числители одинаковы, а чем знаменатели меньше, тем больше дробь. $\Rightarrow A<C<B$.

Ответ: A, C, B.

чистовик №3

Задача №6

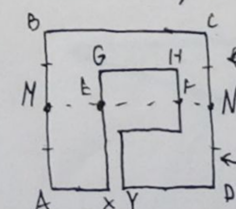
Давайте сначала посмотрим, как вообще можно расставить девочек. Их 5, а мест 10 и при расстановке между любыми 2 есть хотя бы 1 пустое место, которое потом либо так и останется пустым, либо на него сядет мальчик или учительница. И тут 2 случая, либо нет девочек, между которыми 2 места и они седят через 1, а место с какого-то края пусто. Таких вариантов $2\cdot5!=240$, т.к. есть 2 рассадки, а расставить девочек на места есть $5!$ способов. Если есть промежуток с более, чем 1 пустым местом, то оно одно, это расстояние в 2 места и все остальные расстояния ровно в 1 место, т.к. $2+1\cdot3=5$. Промежутков между девочками $5-1=4 \Rightarrow$ есть C_4^1 варианта рассадки. Значит всего вариантов $4\cdot5!=480 \Rightarrow$ всего вариантов рассадить девочек $240+480=720$.

А на остальные 5 мест можно рассадить 3 мальчиков и 1 учительницу как угодно $\Rightarrow$ всего вариантов $720\cdot C_5^1\cdot C_4^3\cdot3!=$ $=720\cdot5\cdot4\cdot6=86400$ вариантов.

Ответ: 86400 способов.

Задача №5

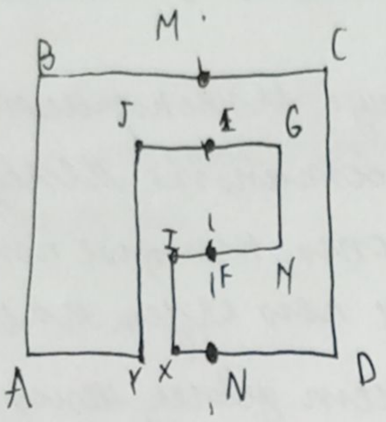
Давайте заметим, что новые углы появляются, когда разрез проходит через границы фигуры и одно такое пересечение образует сразу 2 новых угла. Таким образом наша цель максимизировать кол-во точек пересечений. У квадрата есть 4 оси симметрии. Сейчас мы рассмотрим каждую из них:



разрезы будут симметричны и могут $\cap$ отрезки лишь на своих половинах.

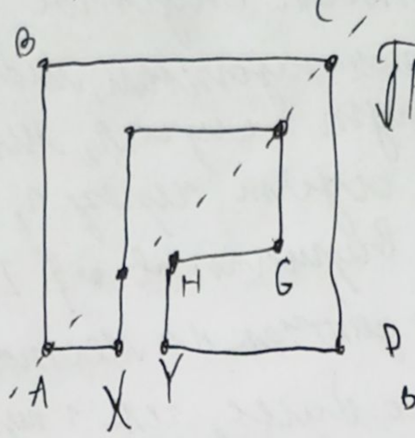
$\leftarrow$ тут 8 отрезков, но отрезки AM, ND и AD (AX и YD) нельзя $\cap$ вместе, а также нельзя вместе $\cap$ отрезки AX и YD, поэтому из 4 отрезков AM, ND, AX и YD можно $\cap$ лишь 2 $\Rightarrow$ максимум 6 отрезков, а в верхней половине 6 отрезков, но MB, BC и CN нельзя $\cap$ вместе и EG, HF и GH нельзя $\cap$ вместе $\Rightarrow$ максимум 4 отрезка. Итого 10 точек $\cap$ $\Rightarrow$ углов будет $10+10\cdot2=30$, т.к. изначально было 10 углов. ✓

Чистовик №4



Случай рассматривается аналогично предыдущему (группы AY, AB и BM и XN, XI и IF)

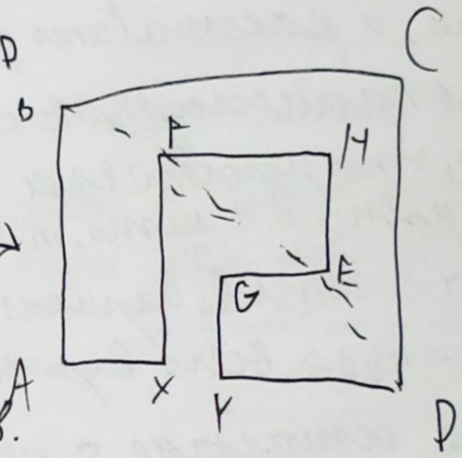
Итого: 6+4=10



Пусть группа: AX и YD,

Итого: 4+6=10

Пусть группа AX и YD →

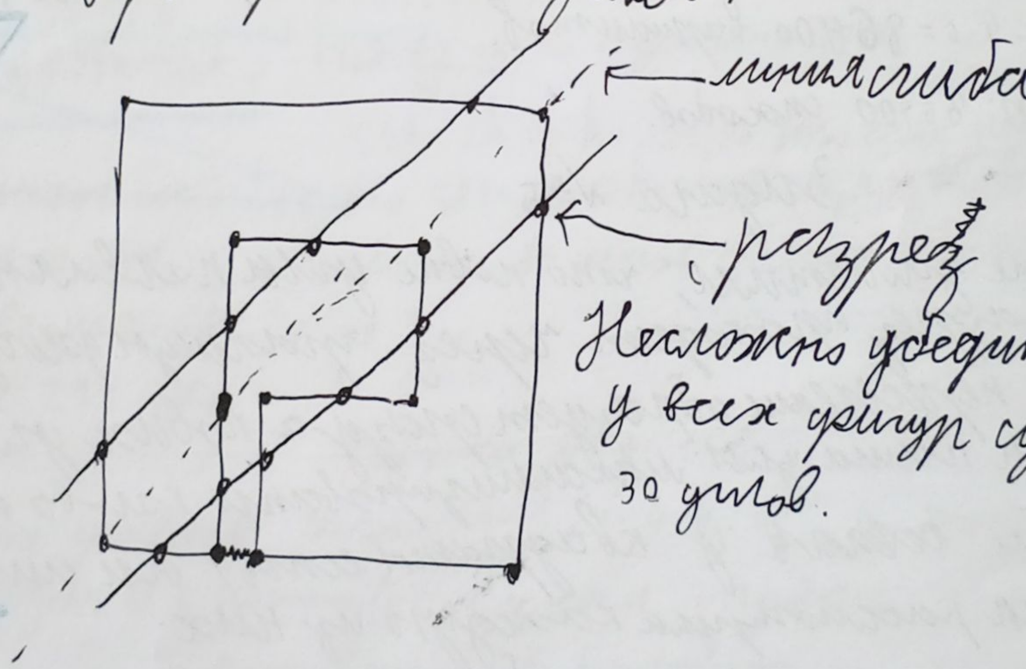


Итого 4+6=10

Максимум 10 n => максимум 10+10·2=30 углов.

Ответ:

Пример на 30 углов:



Несложно убедиться, что у всех фигур суммарно 30 углов.

Черновик №1

АКУЛА

АКУЛ 1 4 64

2 $C_4^2 \cdot 2!$ 12

3 $C_4^3 \cdot 3!$ 24

4 $4!$ 24

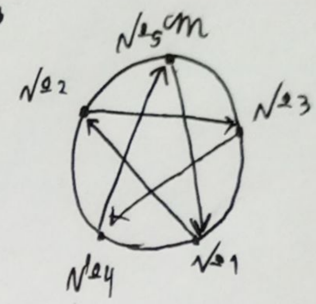
170

$\frac{2}{5}$

№1 $\frac{3}{5}$ №2 $\frac{6}{5}$

$\frac{2}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{10}{5}$

3



АКУЛА

2 1

АА

3 $\frac{C_3^1 \cdot 3!}{2!}$ 9

4 $\frac{C_3^2 \cdot 4!}{2!}$ 36

5 $\frac{5!}{2!}$ 60

106 5 6 4

1 3 5 3 6 2

2

3 5 6

4 5 6

$9a + 3(38-a) = k$

C

$9(59-a)+3(a-19) = k$ +3?

29 · 9

$9 \cdot 59 = 531$

11

C_4^1

$114+6a=k$

−57

$a=30$

$474-6a=k$ +3 $k=294$

5 88

270 + 24

$\frac{295,5}{6}$

261+33=294

$\frac{1}{111\ \ldots}$

10

$29550 \div 6 = 4925$

49,25

30

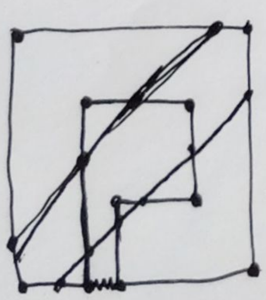
5

$720 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6$

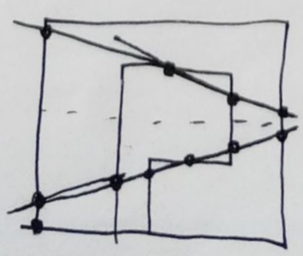
720×120

$72 \times 12 = 864$

30



6 + 5 + 6 + 3 + 3 + 7



7 6