

62-81-99-71  
(43.5)



Выход 14:19 (уборная)

Приход 14:22

Лаш

1 Кон. Бианш Лаш

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 6

Место проведения Санкт-Петербург  
город

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов  
наименование олимпиады

по математике  
профиль олимпиады

Шикаловой Вероники Ильиничны  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата  
«25» 02 2024 года

Подпись участника  
Шикалова

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\Sigma$	Подпись	Расшифровка подписи
8	12	0	4	12	12	12	0	60	<i>М.С.</i>	Федерштейн И.С.
									<i>М.С.</i>	Мунлеуф М.С.

Верно вычислены формулы через малое сечение.  
Арифметическая ошибка в вычислениях. Ответ неверный (верный - 3792).

1.

Решено верно.

2.

Решение от ответа не доведено. Корни уравнения не найдены

3.

Верно найдена формула большой дуги. Рассмотрены не все возможные варианты путей. Ответ неверный и необоснованный

4.



---

Дешеньо верно.

5.

---

Дешеньо верно.

6.

---

Дешеньо верно.

7.

---

Дешенья нет.

8.

---



60 (месяцев)

ср

ЧЕРНОВИК

21

21  
90  
1890

62-81-99-71  
(43.5)

1В 2З 3И

2В 4З 7И 3УИ

без УИ

В - 2 сл.

$$C_4^2 = 6$$

$$C_7^3 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

7 16

$$3800 - 20 = 3780$$

5 шагов

189  
2  
8  
37

1 шаг

3 сл -  $4 \cdot C_7^3$

или -  $C_4^2 \cdot C_7^2$

без вратаря:  $6 \cdot 35$  - без УИ

с УИ:  $6 + 2 \cdot 8 + 21 + 4 + 4 \cdot 21 + 35 + 4 \cdot 35 + 6 \cdot 21$

$6 \cdot 7 = 42$

1  
18  
24  
10  
3  
55

$$21 \cdot (1+2+4+6) + 5 \cdot 35 + 34$$

13

$$1800 + 7 \cdot (3 \cdot 13 + 25) + 34 + (6 + 35)$$

$39 + 25 = 64$

90  
1890

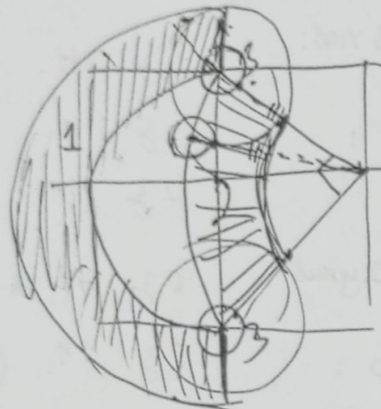
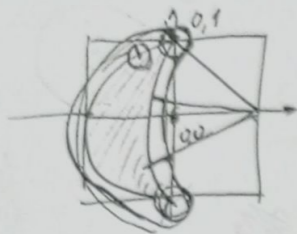
$$7 \cdot 64 + 75$$



Черновик.

$$1 + \frac{\sum \pi}{8} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi =$$

$$= 1 + \frac{3}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$



$$S_{\text{мешка}} = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} - \left( \frac{\pi \cdot \sqrt{2}^2}{4} - \frac{\sqrt{2}^2}{2} \right) = 1$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \left( \pi \cdot (1+0,5)^2 - \pi \cdot 0,5^2 \right) =$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \left( \frac{\pi \cdot 9}{4} - \frac{\pi \cdot 1}{4} \right) = \pi$$

$$S_2 = \frac{1}{4} \left( \pi \cdot \sqrt{2}^2 - \frac{\pi \cdot (\sqrt{2} - \frac{1}{2})^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \pi \cdot \left( \sqrt{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$2S_3 = 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

ПЛОЩАДИ:

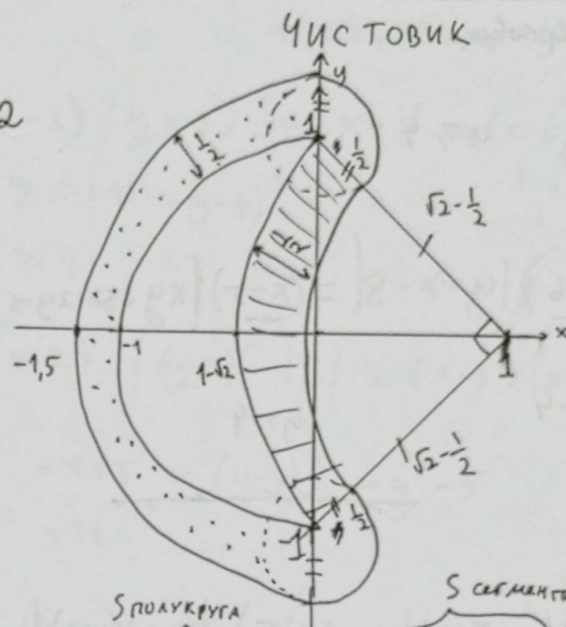
$\therefore S_1$   
мешка (изнан.) -  $S_0$

$S_2$

$S_3$

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + 2 \cdot S_3$$

$\sqrt{2}$



$$S_0 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 - \left( \frac{\pi \cdot \sqrt{2}^2}{4} - \frac{\sqrt{2}^2}{2} \right) = 1$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \left( \pi \cdot (1+0,5)^2 - \pi \cdot 1^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left( \pi + \frac{1}{4}\pi \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4}\pi = \frac{5}{8}\pi$$

$$S_2 = \frac{1}{4} \cdot \left( \pi \cdot \sqrt{2}^2 - \frac{\pi \cdot (\sqrt{2} - \frac{1}{2})^2}{2} \right) = \frac{1}{4} \pi \left( \sqrt{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$2 \cdot S_3 = 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \pi = \frac{3}{16} \pi$$

/ т.к.  $\angle$  сектора =  $135^\circ$   
Сектора =  $\frac{3}{8}$  круга /

$$S = 1 + \frac{5}{8}\pi + \frac{1}{4}\pi \left( \sqrt{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{16}\pi = 1 + \frac{5\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \frac{2}{16}\pi =$$

$$= 1 + \frac{3}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = 1 + \frac{\pi}{4} \cdot (3 + \sqrt{2})$$

Отв:  $1 + \frac{\pi}{4} (3 + \sqrt{2})$



Чертовик

$y - x \geq -10 \quad y \geq 4$

$$\begin{cases} (xy + 3x - 2y - 6) |y - x - 8| = (x - 5) |xy + 3x - 2y - 6| \\ \sqrt{y - x + 10} = y - 4 \end{cases} \quad y \geq 4$$

$(x - 2) (y + 3) |y - x - 8| = (x - 5) |(x - 2)(y + 3)|$

$(x - 2) |y - x - 8| = (x - 5) |(x - 2)|$

$x = 2: \sqrt{y + 8} = y - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y + 8 = y^2 + 16 - 8y \\ y^2 - 9y + 8 = 0 \\ (y - 1)(y + 8) = 0 \\ y \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$

$x > 2: \begin{cases} |y - x - 8| = x - 5 \\ y - x + 10 = y^2 + 16 - 8y = (y - 4)^2 \end{cases}$

$x - 5 = y + 5 - (y - 4)^2$   
 $|y - 4)^2 - 18| = x - 5 = (y + 5) - (y - 4)^2$

$4 \quad 2 \cdot 16 + 9 = \frac{17^2}{17} = 17$

62-81-99-71 (43.5)

~~Чертовик~~ Чистовик Чертовик

$$\begin{cases} (x - 2) (y + 3) |y - x - 8| = (x - 5) |(x - 2)(y + 3)| \\ y - x + 10 = (y - 4)^2 \\ y \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 2) |(y - 4)^2 - 18| = (x - 5) |x - 2| \\ -x + 5 = (y - 4)^2 - y - 5 \\ y \geq 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 2 \text{ — не реш.} \\ \sqrt{y + 8} = y - 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (y - 1)(y + 8) = 0 \\ y \geq 4 \Leftrightarrow \emptyset \end{array}$$

$|y - 4)^2 - 18| = (y + 5 - (y - 4)^2) \cdot \frac{|x - 2|}{(x - 2)}$

1)  $x > 2: 2(y - 4)^2 = y + 5 + 18 = y + 23$   
 $2y^2 + 32 - 16y = y + 23 \Leftrightarrow 2y^2 - 17y + 9 = 0$   
 $y = \frac{17 \pm \sqrt{189 - 72}}{4} \quad \text{т.к. } y \geq 4: y = \frac{17 + \sqrt{117}}{4}$

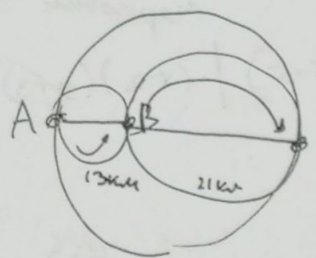
2)  $x < 2: +18 = y + 5 \Leftrightarrow y = 13 \quad (y - 4)^2 < 18$

1)  $x = y + 10 - (y - 4)^2 = \frac{57 + \sqrt{117}}{4} - \left(\frac{17 + \sqrt{117}}{4}\right)^2$   
 $x = y + 10 - (y - 4)^2 = 23 - 81 = -58$

$x > 5: + +$   
 $x < 2: 18$



Чертовик



$\overline{AB} - 13 \text{ км}, 7 \text{ мин}$

$\overline{BC} - 21 \text{ км}, 11 \text{ мин}$

$\overline{AC} - 17 \text{ мин.}$

чел. 85 мин.

+ кол-во: 14  
км: 22

$\overline{AB} + \overline{BC}$   
 $\overline{AC}$

$\overline{AB} + \overline{BC} \equiv 2 \pmod{2}$   
всегда

18 км 17.

Заметим, что

кол-во густ  $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \pmod{2}$

$\overline{AC} + \overline{AB} \equiv \overline{BC} \pmod{2}$

~~18, 36, 54;~~

$17 \cdot 5 = 85$

кол-во  $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \pmod{2}$ ; ~~тогда время~~

$k = \frac{x+2}{x-2} = -2$

$f(t) = \frac{2}{t-2} = \frac{2}{t-2} + \frac{2}{t-2}$

$t - \frac{x+2}{x-2} = \frac{t(x-2) - (x+2)}{x-2} = 0$

$x(t-1) - 2t - 2 = 0 \quad f(0) =$

$x = \frac{2(t+1)}{t-1}$

62-81-99-71 (13.5)

Чистовик

№1  
2B 4з 7H 3Y | Δ кол-во способов выбрать 2з и 3H  
1B 2з 3H | взавти от кол-ва выбранных Y.

- 1) 0Y:  $C_4^2 \cdot C_7^3 = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 6 \cdot 35$
- 2) 1Y: в зам:  $C_4^1 \cdot C_7^3 \cdot 3 = 4 \cdot 35 \cdot 3$   
в кан:  $C_4^2 \cdot C_7^2 = 6 \cdot 21 \cdot 3$
- 3) 2Y: 0 зам. 2 кан —  $C_4^2 \cdot 7 \cdot 3 = 6 \cdot 21 \cdot 3$   
1 зам. 1 кан —  $4 \cdot 21 \cdot 3$   
2 зам. 0 кан —  $C_7^3 \cdot 3 = 35 \cdot 3$

- 4) 3Y: 0 зам; 3 кан —  $C_4^3 = 6$   
1 зам. 2H —  $4 \cdot 7 \cdot 3 = 21 \cdot 2 \cdot 2$   
2 зам. 1H —  $C_7^2 \cdot 3 = 21 \cdot 3$

$\sum = 35 \cdot (6 + 12 + 3) + 21(18 + 6 + 24 + 4 + 3) =$   
 $= 35 \cdot 21 + 21 \cdot 55 = 21 \cdot 90 = 1890$   
Т.к. в таком порядке 2 способа выбрать вратаря, то  $1890 \cdot 2 = 3780$   
Отв:  $1890 \cdot 2 = 3780$

№4 85 мин  
 $\overline{AB} - 13 \text{ км } 7 \text{ мин}; r = \pi r_2 = 21$   
 $\overline{AC} - 17 \text{ мин}; 34 \text{ км}$   
 $\overline{BC} - 21 \text{ км}, 11 \text{ мин}$   
 $r_1 + r_2 = \frac{34}{\pi} \Rightarrow \overline{AC} - 34 \text{ км.}$

Заметим, что  $85 = 17 \cdot 5$ ; Пусть он проехал  $x \cdot \overline{AB} + y \cdot \overline{BC} + z \cdot \overline{AC}$   
Заметим, что  $x \equiv y \pmod{2}$ , т.к. если он заехал и выехал через 1 точку (А или С), то в уз густ  $\overline{AB}, \overline{BC}$  он проехал: 2 раз; А если через разные, то ~~и~~  $\overline{AB}$  и  $\overline{BC}$  нечетное, м. быть разные, кол-ва раз).  
При этом на  $\overline{AB}, \overline{BC}$  он заехал  $\geq 1$  раз, т.к.  $85 = 17 \cdot 5$



$$? x \quad \frac{x+2}{x-2} = t$$

переводим  
 $x+2 = t(x-2)$

$$(t-1)x = 2 + 2t = 2(t+1)$$

$$x = \frac{2(t+1)}{t-1}$$

$$f(t) = \frac{2}{x-2} = \frac{2}{\frac{2(t+1)}{t-1} - 2} = \frac{1}{\frac{t+1}{t-1} - 1} = \frac{t-1}{t+1-t+1} = \frac{t-1}{2}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} - \frac{1}{2} \quad f - \text{линейна}$$

$$a_0 = 0$$

$$\frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} - 1 \dots$$

$$k = \frac{1}{2^{12}}$$

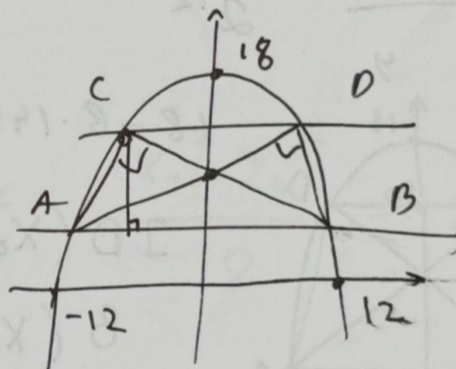
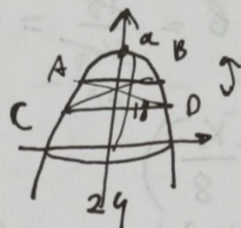
$$18 - b \otimes^2 = 0$$

$$144b = 18$$

$$b = \frac{18}{144} = \frac{1}{8}$$

16

$$y = 18 - \frac{1}{8}x^2$$



$$D - (x_0; 18 - \frac{x_0^2}{8})$$

$$B - (x_1; 18 - \frac{x_1^2}{8})$$

$$A - (-x_1; 18 - \frac{x_1^2}{8})$$

$$AD \perp BD: \frac{x+x_1}{x_0+x_1} = \frac{y - 18 - \frac{x_1^2}{8}}{\frac{x_1^2}{8} - \frac{x_0^2}{8}} - BD.$$

$$ty_1 = \frac{(\frac{x_1^2}{8} - \frac{x_0^2}{8})x}{x_0 - x_1} = \frac{-x_1 - x_0}{8}x \quad ty_2 = \frac{x_1^2 - x_0^2}{8(x_0 + x_1)} = \frac{x_1 - x_0}{8}$$



ЧИСТОВИК

N5.  $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$   $t = \frac{x+2}{x-2} \Leftrightarrow x(t-1) = 2(t+1)$   
 $x = \frac{2(t+1)}{t-1}$

$t = \frac{x+2}{x-2} \Leftrightarrow f(t) =$

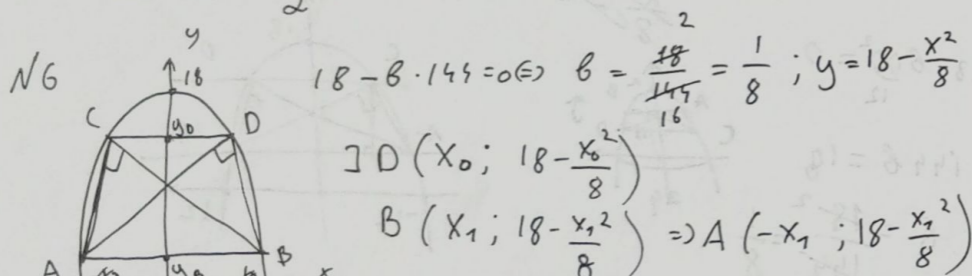
$f(t) = \frac{2}{x-2} = \frac{2}{\frac{2(t+1)}{t-1} - 2} = \frac{t-1}{t+1-2} = \frac{t-1}{t-1} = 1$

$f(x) = \frac{x-1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

$f^{12}(x) = \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \dots \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \dots - \frac{1}{2} \right)}_{12 \text{ раз}} \right)$

tg угла наклона касательной =  $\frac{1}{2^{12}}$  (в точке 0 в том числе)

Ответ:  $\frac{1}{2^{12}}$



BD:  $\frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{y - (18 - \frac{x_1^2}{8})}{\frac{x_1^2 - x_0^2}{8}}$

$y = a - bx^2$   
 $a = 18$

$k_{BD} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{8(x_0 - x_1)} = \frac{-(x_1 + x_0)}{8}$

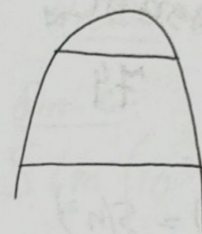
AD:  $\frac{x+x_1}{x_0+x_1} = \frac{y - (18 - \frac{x_1^2}{8})}{\frac{x_1^2 - x_0^2}{8}}$ ;  $k_{AD} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{8(x_0 + x_1)} = \frac{x_1 - x_0}{8}$

$k_{AD} \cdot k_{BD} = -1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 - x_0^2}{8} = -1 \Leftrightarrow x_1^2 - x_0^2 = 64$

$y_D - y_B = 18 - \frac{x_0^2}{8} - 18 + \frac{x_1^2}{8} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{8} = 8$  Ответ: 8

Черновик

пар. -  $y = 18 - \frac{1}{8}x^2$



BD:  $\frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{y - (18 - \frac{x_1^2}{8})}{\frac{x_1^2 - x_0^2}{8}}$

$k_{BD} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{(x_0 - x_1) \cdot 8} = \frac{-(x_1 + x_0)}{8}$

AD:  $\frac{x+x_1}{x_0+x_1} = \frac{y - (18 - \frac{x_1^2}{8})}{\frac{x_1^2 - x_0^2}{8}}$

$k_{AD} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{8(x_0 + x_1)} = \frac{x_1 - x_0}{8}$

$k_{BD} \cdot k_{AD} = \frac{-(x_1 + x_0)}{8} \cdot \frac{(x_1 - x_0)}{8} = -1$

$x_1^2 - x_0^2 = 64$

$y_D - y_B = \left(18 - \frac{x_0^2}{8}\right) - \left(18 - \frac{x_1^2}{8}\right) = \frac{x_1^2 - x_0^2}{8} = 8$

$S(m \cdot (10^{75} - 1)) = S(10^{75} - 1) = 9 \cdot 75$

$\underbrace{(m-1)}_a \underbrace{99 \dots 9}_{75} + 1$

∫ миллион Азман

$(m \cdot 10^{75} - 1) - (m-1)$



Черновик

$$S(mn) = S(n)$$

75 знаков

$$1 \leq m \leq n$$

$$S(n) = S(2n) = S(3n) = \dots = S((m-1)n) = S(n^2)$$

$$\underbrace{99 \dots 9}_{75} \cdot 2 = 10^{75} \cdot 2 - 2 = \underbrace{199 \dots 98}_{75}$$

$$\underbrace{999 \dots 9}_{75} \cdot m = 10^{75} m - m = 10^{75} m - m$$

$$\begin{array}{r} 199998 \\ + 99999 \\ \hline 299997 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underbrace{A_n}_{m-1} \underbrace{B_n}_{999 \dots 9} \underbrace{C_n}_{99} \\ + \dots \\ \hline \end{array}$$

$$C_n - C_{n-1}$$

$$B_n \rightarrow B_{n-1}$$

$$A_n \rightarrow A_{n+1}$$

$$S(m \cdot (10^{75} - 1)) = S(10^{75} - 1) = 75 \cdot 9$$

$$\underbrace{(m-1) 999 \dots 9}_{75} + 999 \dots 9 =$$

Чистовик

№7 Ответ:  $\underbrace{999 \dots 9}_{75}$  Это наибольшее 75значное число.

Доказ-во: 75 знаков

$$S(m \cdot (10^{75} - 1)) = S(10^{75} - 1) = 9 \cdot 75$$

$$m \cdot 10^{75} - m = \underbrace{(m \cdot 10^{75} - 1)}_{\text{число A}} - \underbrace{(m-1)}_B$$

$$A = \overbrace{(m-1) 99 \dots 9}^{75 \text{ знаков}}$$

$k=75, m \cdot 10^k / 8 \text{ цифр}$

~~$k=74, m:10 - \text{т.е. } m-1 \text{ оканчивается на } 9$~~

на конце  $\geq 75$  цифр;  $m \leq \underbrace{99 \dots 9}_{75}$

цифра в  $m \leq 9$ , поэтому

$$S(A-B) = S(m-1) + 9 \cdot k \cdot 75 - S(m-1) = 9 \cdot 75$$

$$\sqrt{3} : \begin{cases} (x-2)(y+3) | y-x-8 | = (x-5) | (x-2)(y+3) | \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \Rightarrow y \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2) | y-x-8 | = (x-5) | x-2 | \\ y-x+10 = (y-4)^2 \Rightarrow y-x-8 = (y-4)^2 - 18 \\ x-5 = y+5 - (y-4)^2 \\ y \geq 4 \end{cases}$$

$$(x-2) | (y-4)^2 - 18 | = (x-5) | x-2 | = (y+5 - (y-4)^2) | x-2 |$$

$x=2$  не является решением.



Черновик:

$$y+5 - (y-4)^2 = 81 - y^2 + 8y - 15y = 0$$

~~$$81 = 60$$~~

