0 171909 460001

17-19-09-46
(39.13)

Д ЕШИФР

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Шуваловой Дианы Борисовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
17-19-09-46 (39.13)	72	12	0	12	0	12	12	12	12

17-19-09-46 (39.13)

(Задача 5) Чистовик

$$B=\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=$$

$$=\left(\frac{bc}{a}-a+1\right)+\left(\frac{ca}{b}-b+1\right)+\left(\frac{ab}{c}-c+1\right)=$$

$$=3+\underbrace{\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)-(a+b+c)}_{\overset{\shortparallel}{A}}$$

72 (семьдесят два) Синат

Оценим A:

$$A=\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)-(a+b+c)=$$

$$=\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2-a^2bc-ab^2c-abc^2}{abc}=$$

$$=\frac{2(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2-a^2bc-ab^2c-abc^2)}{2abc}=$$

$$=\frac{(bc-ac)^2+(bc-ab)^2+(ac-ab)^2}{2abc}\geq 0 \quad (\text{при } a,b,c>0)$$

(т.к. $x^2\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ и $2abc>0$)

$\Rightarrow B=3+A\geq 3.$

Миним. значение B достигается при $A=0$. Тогда:

$$\frac{(bc-ac)^2+(bc-ab)^2+(ac-ab)^2}{2abc}=0$$

$$\Rightarrow (bc-ac)^2+(bc-ab)^2+(ac-ab)^2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} bc=ac \\ bc=ab \\ ac=ab \end{cases} \Rightarrow ab=ac=bc \Rightarrow \boxed{a=b=c}$$

~~Напротив~~ Чистовик Значит, миним. знач. выражения достигается при $a=b=c$. И это значение $=3$.

Ответ: 3.

(Задача 3)

$$\underbrace{|x^3+y^3-19|}_{=A}+\underbrace{|x^2y+xy^2+6|}_{B}+\underbrace{\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}}_{C}=0$$

$\boxed{x, y\neq 0}$

$A, B\geq 0$

Рассмотрим 4 случая:

- $x>0;\ y>0$:

$$C=\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=\frac{xy-yx+2xy}{xy}=\frac{2xy}{xy}=2$$

$\Rightarrow A+B+C\geq 0+0+2=2>0$

$\Rightarrow A+B+C=0$ – нет решений.

- $x>0;\ y<0$:

$$C=\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=\frac{-xy-yx+2xy}{xy}=0$$

$\Rightarrow A+B+C\geq 0$. Выражение равно 0 т. и т.т.к.

$$\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x^3+y^3-19|=0\\|x^2y+xy^2+6|=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^3+y^3=19\\xy(x+y)=-6\end{cases}$$

$\Rightarrow (x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=1$

$\Rightarrow x+y=1 \Rightarrow xy=\frac{-6}{x+y}=-6$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\xy=-6\\x>0\\y<0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}\\\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}\text{ – не подх., т.к. } x>0;\ y<0\end{array}\right.\Rightarrow\boxed{(3;-2)}$$

17-19-09-46 (39,13)

Чистовик

- $x<0;\ y>0$:

$$C=\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=\frac{xy+xy+2xy}{xy}=4$$

$\Rightarrow A+B+C\geq 4>0\Rightarrow$ решений нет

- $x<0;\ y\leq 0$:

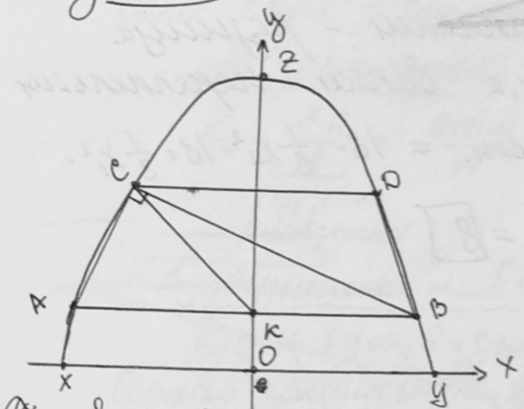
$$C=\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}=\frac{-xy+xy+2xy}{xy}=2$$

$\Rightarrow A+B+C\geq 2>0\Rightarrow$ решений нет.

$\Rightarrow$ Подходящее решение одно – $(3;-2)$.

Ответ: $(3;-2)$.

(Задача 4)



Нарисуем свод и оси Ox и Oy.

Z - вершина $(x=0)$

$Z(0;a)$ $\quad O(0;0)$

$$\begin{cases}XY=24\\ZO=18\end{cases}$$

$XY=2\sqrt{a/b}$

(т.к. X_Y - коорд. т. Y по Ox: $X_Y=\sqrt{a/b}$ $(a-bx_Y^2=0)$)

Парабола симметр. относит. OY, т.к. $a-bx^2=a-b(-x)^2$

$$\begin{cases}2\sqrt{a/b}=24\\a=18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=18\\b=1/8\end{cases}$$

Изобразим AB, CD.

$AB\parallel CD\parallel$ оси $OX\Rightarrow ABDC$ - трапеция и K - пересеч. AB с осью OY, является серединой AB.

Пусть B имеет координаты $(x_1;\ 18-\frac{1}{8}x_1^2)$, а D – $(x_2;\ 18-\frac{1}{8}x_2^2)$

Чистовик

$\Rightarrow$ C имеет координаты $(-x_2; 18-\frac{1}{8}x_2^2)$

$\triangle ACB$ - прямоуг. $\Rightarrow$ $CK = AK = BK$.

$AK = BK = x_1$

$CK^2 = x_2^2 + ((18-\frac{1}{8}x_2^2) - (18-\frac{1}{8}x_1^2))^2 =$

$= x_2^2 + (\frac{1}{8}x_1^2 - \frac{1}{8}x_2^2)^2 = x_2^2 + \frac{1}{64}(x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2x_2^2) =$

$= x_1^2$

$\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = \frac{1}{64}(x_1^2 - x_2^2)^2$

$64(x_1^2 - x_2^2) = (x_1^2 - x_2^2)^2$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 64$.

Расст. между данными - разница коорд. по оси OY, т.к. данки параллельны OX. h-искомое расст. $= 18 - \frac{1}{8}x_2^2 - 18 + \frac{1}{8}x_1^2 =$

$= \frac{1}{8}(x_1^2 - x_2^2) = \frac{1}{8} \cdot 64 = \boxed{8}$

Ответ: 8.

(Задача 1)

Вратаря можно выбрать 3-мя способами. Посчитаем кол-во способов выбрать оставшихся 5 человек. Разберём случаи: (~~все защитники, нападающие и вратари одинаковы~~)

· 0 „Универсалов" в команде:

K_1 - кол-во способов

$K_1 = \underbrace{\frac{5 \cdot 4}{2!}}_{\text{защитн.}} \cdot \underbrace{\frac{6\cdot5\cdot4}{3!}}_{\text{напад.}} = 200.$

17-19-09-46 (39.13)

Чистовик

· 1 „Универсал"

Далее есть 2 варианта:

- он защитник:

$K_2 = \underbrace{3 \cdot 5}_{\text{выбираем 1 из 3-ёх универсалов и 1 из 5 защитн.}} \cdot \underbrace{\frac{6\cdot5\cdot4}{6}}_{\text{3 из 6 напад.}} = 300$

- он нападающий:

$K_3 = \underbrace{\frac{5\cdot4}{2}}_{\text{2 из 5 защитника}} \cdot \underbrace{(3 \cdot \frac{6\cdot5}{2})}_{\text{1 из 3 универсалов и 2 из 6 напад.}} = 450$

· 2 „Универсала":

Далее есть 3 варианта:

- оба защитники:

$K_4 = \underbrace{\frac{3\cdot2}{2}}_{\text{2 из 3 универсалов}} \cdot \frac{6\cdot5\cdot4}{6} = 60$

- 1 защитник и 1 нападающий:

Пусть это 2 универсала A и Б. ~~Состав команды не изменится, если А и Б поменять местами (т.е. А стал напад., если был защитн.) → в шестерке останется такой же~~

$K_5 = \cancel{\text{делим на 2, т.к. были выше причины}} \cdot \left(\underbrace{5\cdot3}_{\text{1 из 3 универсалов и 1 из 5 защ.}} \cdot \underbrace{\frac{6\cdot5}{2}\cdot 2}_{\text{2 из 6 напад. и 1 из 2 оставш. универс.}}\right) = \cancel{225}\ 450$

- оба нападающие:

$K_6 = \frac{5\cdot4}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3\cdot2}{2} = 180$

Чистовик

·3 „Универсалы".

Разберём 3 случая: (т.к. 3-х защитников не может быть)

- 2 защитн. и 1 напад.:

$$K_7 = \frac{3\cdot2}{2}\cdot\frac{6\cdot5}{2}\cdot1 = 45$$

- 1 защитник и 2 напад.:

$$K_8 = \underbrace{(3\cdot5)}_{\text{защитники}}\cdot\underbrace{\left(6\cdot\frac{2\cdot1}{2}\right)}_{\text{напад.}} = 90$$

- 3 напад.:

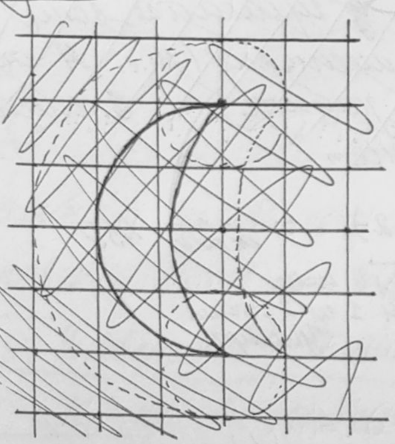
$$K_9 = \frac{5\cdot4}{2}\cdot1 = 10$$

=> всего способов:

$$K = \underbrace{3}_{\text{выбор вратаря}}\cdot(K_1+K_2+\dots+K_9) = 1785\cdot3 = 5355$$

Ответ: 5355 способов.

~~Задача 2~~



~~1 клетка на рисунке = 0,5.~~

Задача 8

Чистовик

$$n = \underbrace{999\dots9}_{100}$$

Докажем, почему оно подходит.

$$n = \underbrace{999\dots9}_{100} = 1\underbrace{00\dots0}_{100} - 1 = 10^{100} - 1$$

Для любого $m \le n$:

$$m\cdot n = m\cdot10^{100} - m.$$

в m максимум 100 разрядов

$$S(m\cdot10^{100}) = S(m)$$

$$S(m) = S(m)$$

$10^{100}\cdot m - m$ имеет вид: пусть в m k разрядов

$$\underbrace{m-1},\ \underbrace{\underbrace{9\dots9}_{(100-k)}}_{\text{девяток}},\ \underbrace{10^k - m}$$

$(m-1)$, т.к. последний разряд уменьшается на 1.

$$\Rightarrow S(m\cdot n) = S(m-1) + 9\cdot(100-k) + S(10^k - m)$$

$$S(10^k - m) = 1\underbrace{00\dots0}_{k} - m$$

По сути это k разрядов с 9-ками плюс ещё 1-ка и минус m.

$$\Rightarrow S(10^k - m) = 9\cdot k + 1 - S(m).$$

$$S(m-1) = S(m) - 1$$

(если m оканчивается на l нулей, разделим m на 10^l, и потом к итоговому числу добавим l нулей, это не изменит сумму цифр)

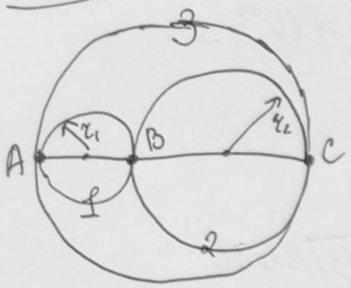
$$\Rightarrow S(m\cdot n) = S(m) - 1 + 900 - 9k + 9k + 1 - S(m) = 900 = 9\cdot100 = S(n)$$

Чистовик

⇒ n подходит.

Ответ: $\underbrace{999\ldots9}_{n}$.

Задача 6



$\breve{AB} = \pi r_1 = 15$ км

$\breve{BC} = \pi r_2 = 25$ км

$\breve{AC} = \pi(r_1 + r_2) = 40$ км

Пусть по кольцу 1 проехали n_1 раз, по кольцу 2 проехали n_2 раз по кольцу 3 - n_3 раза.

$\Rightarrow 7n_1 + 11n_2 + 17n_3 = 85$

$\Rightarrow 7n_1 + 11n_2 \vdots 17.$

Надо найти:

$S = 15n_1 + 25n_2 + 40n_3 = ?$

$7 \equiv 7 \,(mod.\ 17)$

$11 \equiv -6 \,(mod.\ 17)$

$\Rightarrow 7n_1 - 6n_2 \equiv 0 \,(mod.\ 17).$

$n_2 \leq \frac{85}{11} \Rightarrow n_2 \leq 7$

⇒ чтобы $(7n_1 - 6n_2) \equiv 0 \,(mod.\ 17)$:
(7 и 6 взаимно просты)

~~$n_2 = 7 \Rightarrow$~~

$\Rightarrow$ ~~$7n_1 + 11n_2 =$~~ $n_2 = 1$ $\varnothing$

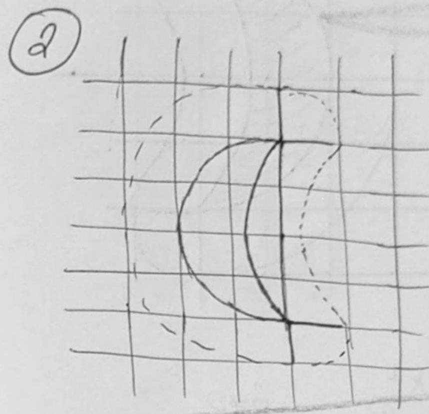
$n_2 = 2$; $n_1 = 9 \Rightarrow n_3 = 0$, но не вернётся в A

$n_2 = 3$; $n_1 = 5 \Rightarrow n_3 = 1$ $S = 190$ км

Для других n решений нет. Чистовик

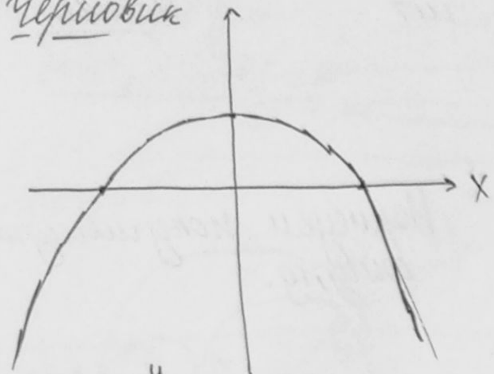
Ответ: 190.

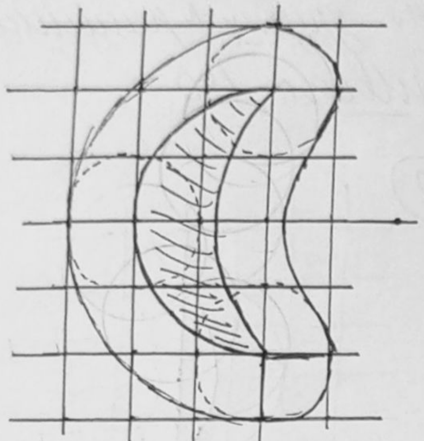
(2)

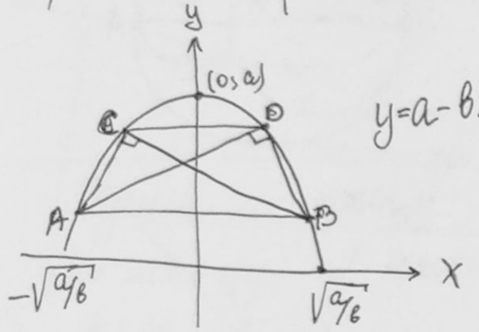


Нарисуем получившуюся фигуру.

Черновик







$y=a-bx^2=0$

$a=bx^2$

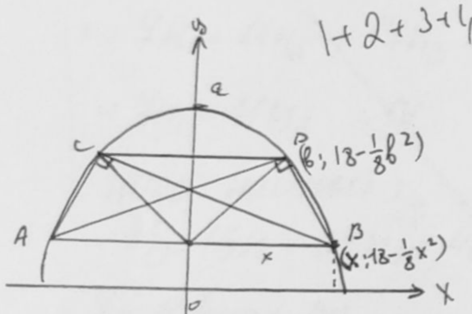
$x^2=a/b$ $\quad b\neq 0$

$x=\pm\sqrt{a/b}$

$\begin{cases} 2\sqrt{a/b}=24 \\ a=18 \end{cases}$ $\quad a/b=144$, $b=1/8$

$\boxed{18-\frac{1}{8}x^2}$

$1+2+3+4$



$b^2+\left(18-\frac{1}{8}b^2-18+\frac{1}{8}x^2\right)^2=x^2$

$b^2+\frac{1}{64}(x^2-b^2)^2=x^2$

$64b^2+x^4-2x^2b^2+b^4=64x^2$

$64(x^2-b^2)=(x^2-b^2)(x^2-b^2)$

$(x^2-b^2)((x^2-b^2)-64)=0$

$\Rightarrow x^2-b^2=64$

(1) • 0 "Универсалов"

$3\cdot\frac{5\cdot 4}{2}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4}{6}=3\cdot 10\cdot 20=600$

• 1 "Универсал"

999×87: 6993, 7992, 86913

$n_1 \quad n_2 \quad n_3$

$7n_1+11n_2+17n_3=85$

$15n_1+25n_2+40n_3=?$

$=170+(n_1+3n_2+6n_3)$

$=85-(8n_1+8n_2+11n_3)$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

99×17: 693, 99, $\boxed{1683}$

99×38: 792, 297, 3762

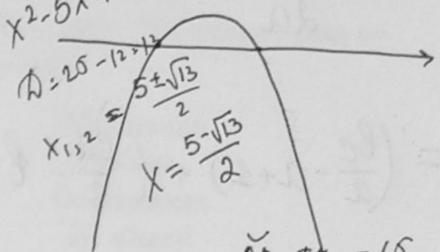
$-x^2+5x=3$

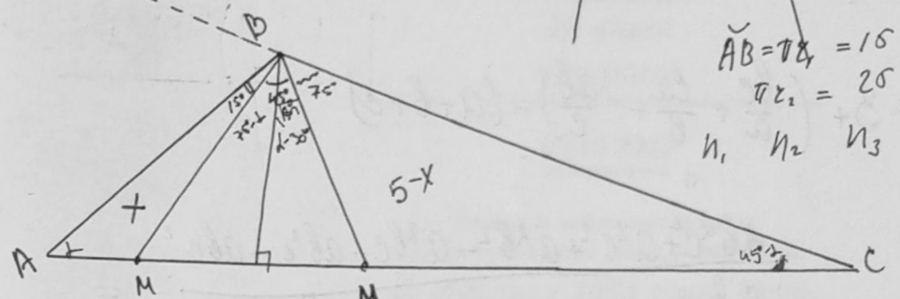
$x^2-5x+3=0$

$D=25-12=13$

$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

$x=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$





$AB=\pi r_1=15$

$\pi r_2=25$

$n_1 \quad n_2 \quad n_3$

(3) $\underbrace{|x^3+y^3-19|}_{A}+\underbrace{|x^2y+xy^2+6|}_{B}+\underbrace{\frac{x|y|-y|x|+2xy}{xy}}_{C}=0$ $\quad \Rightarrow \pi(r_1+r_2)=40$

• если $x>0;\ y>0$:

$C=\frac{xy-yx+2xy}{xy}=2$

$A+B+C\geq 2>0$

$n_1 \quad n_2 \quad n_3$

$\varnothing$ $7n_1+11n_2+17n_3=85$

$15n_1+25n_2+40n_3 - ?$

$=(14n_1+22n_2+34n_3)+(n_1+3n_2+6n_3)=170+A$

• $x>0;\ y<0$:

$C=\frac{-xy-yx+2xy}{xy}=0$

$\Rightarrow A=0,\ B=0 \Rightarrow \begin{cases} x^3+y^3=19 \\ x^2y+xy^2=-6 \end{cases}$ $\quad \boxed{\begin{matrix} x=3 \\ y=-2 \end{matrix}}$

$(x+y)^3=1$

$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-6 \end{cases}$

• $x<0;\ y>0$:

$C=\frac{xy+xy+2xy}{xy}=4$ $\quad\varnothing$

• $x<0;\ y<0$:

$C=\frac{-xy+xy+2xy}{xy}=2$ $\quad\varnothing$

Черновик

5) $$\frac{2bc-2a^2+2a}{2a}+\frac{2ca-2b^2+2b}{2b}+\frac{2ab-2c^2+2c}{2c}=$$

$$=\left(\frac{bc}{a}-a+1\right)+\left(\frac{ca}{b}-b+1\right)+\left(\frac{ab}{c}-c+1\right)=$$

$$=3+\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)-(a+b+c)$$

$$\parallel$$

$$\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2-a^2bc-ab^2c-abc^2}{abc}=$$

$$=\frac{2(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2-a^2bc-ab^2c-abc^2)}{2abc}=$$

$$=\frac{(bc-ac)^2+(bc-ab)^2+(ac-ab)^2}{2abc}$$

6) 85 минут

7 4 7 14

35 минут