0 913886 560004

91-38-86-56
(40.45)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Шадневой Ульяны Владимировны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«25» февраля 2024 года

Подпись участника

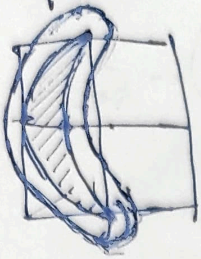
Черри

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	8	4	12	12	0	12	0	60
					0			60

60 (шестьдесят)

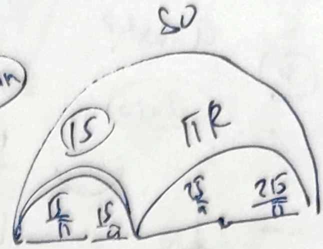
91-38-86-56 (40.45)

Черновик



$\sqrt{2} < 0{,}3 \cdot 1{,}5$!

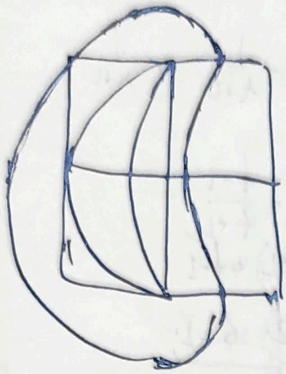
95 мин



3 5 . 6 3

$D = \frac{50}{\pi} + \frac{50}{\pi} = \frac{80}{\pi}$;

$\pi \cdot \frac{80}{\pi}$



$3 \cdot C_5^2 \cdot C_6^3$ — 6я, универс.

20 мин

3" унив"

2_3 3_n !

1 униа: 5_3 6 н

3 3-п

(3)

19 мин

$(4) \; C_8^3$

1) 0 ун.! ~~15~~

$5x + 13y + 19z = 95$.

$\{ xy + 3x - 2y - 6$

AB и BC од. по чётности

$C_5^2 \cdot C_6^3$

~~При x=0~~

$13y + 19z = 5$; $\frac{-81 - 24}{5}$

2) 1 ун:

$5 \cdot 3 \cdot C_6^3 + C_5^2 \cdot 3 \cdot C_6^2$

$$\begin{cases} (x-2)(y+3)|y-x-8| = (x-5) \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$$

3) 2 ун:

$C_3^2 \cdot C_6^3$

~~$13y + 19z = 5$~~

При $y = \frac{9}{2}$:

$x = -\frac{81}{4} + \frac{81}{2} - 6$

~~5x+13~~ $26 + 19$!

$$\begin{cases} y \geq 4 \\ y - x + 10 = y^2 - 8y + 16 \\ (x-2)(y+3)|y-x-8| = (x-5)|x-2| \cdot |y+3| \end{cases}$$

$-2y = 9$ $\quad \frac{81}{4} - 6 = \frac{81-24}{4} = \frac{57}{4}$

$19 \cdot 5 = 95$ $\quad y = \pi \; 4{,}5$

Т.к. $y \geq 4$ $|y+3| = y+3$;

$\frac{9}{3}$ 95

$$\begin{cases} y \geq 4 \\ y^2 - 9y + 6 + x = 0 \\ \left[\begin{array}{l} \cancel{y = -3} \\ (x-2) \cdot |y-x-8| = (x-5) \cdot |x-2| \end{array} \right. \end{cases}$$

19 $\quad$ 19.3

$$\begin{cases} y \geq 4 \\ x = -y^2 + 9y - 6 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2 \\ (x-2) \cdot |y-x-8| = (x-5)(x-2) \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \end{cases} \\ x = 2 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 4 \\ x = -y^2 + 9y - 6 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2 \\ |y-x-8| = x-5 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ |y-x-8| = 5-x \end{cases} \\ x = 2 \end{array} \right. \end{cases}$$

$19z$: 9 | 8 | 7 | 6 |

(6) (7) (8) (9) 9

не мог

$y \geq 4$ $x \geq 2$: ~~x<2~~

$13y + 19z = 5$; $\frac{19}{4}$ $+6$

(4+9)

$5x + 13y + 19z = 95$;

$z = 5$, $y = 7$,

При $z = 4$: $19z = 76$

2, 13, 7, 91

5с

1) $z = 1$!

Черновик.

$a - bx^2$?

3

~~$5x + 25y$~~

$a = 10$

$f\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = -\frac{1}{x+2}$

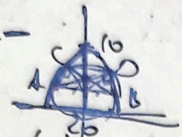
5 6 3

5

3

$5x + 13y + 19z = 95$

$13y + 19z = 5\cdot(19 - x)$; $\Rightarrow z < 5$



$19z = 5\cdot(19-x) - 13y$

$\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x+2} \to \frac{1}{x+1}$

$f'(0) \to 0$!

$z = 2$

$2;3$

$a = bx^2$; $10 - 0{,}1x^2$ $19 = 5\cdot(19-x) - 13y$;

$x = \sqrt{\frac{a}{b}}$

$x = \frac{t-1}{t+2}$

$2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}} = 20$; $\frac{x - k}{2^n} - 1$

$19 + 13y \vdots 5$; $13y \vdots 6$; $y = 2$

$x(t+2) = t - 1$

$\frac{x}{2^{n+1}} - \frac{k}{2^{n+1}}$ $\frac{a}{b} = 100$; $19 + 26 = 5\cdot(19 - x)$

$45 = 95 - x$.

$y = 2$, $z = 1$;

$x = 10$

~~$y = 2 - z$~~

$f(x) = \frac{x-1}{2}$ $b = 0{,}1$ ~~$x = 50$~~

$x = 10$

$z = 1$;

$y = 2$; $x = 10$ X

$xt + x = t - 1$;

$f\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} =$

$57 = 5\cdot(19-x) - 13y$ $\frac{+19}{3}$

$t(x-1) = -x - 1$

$= \frac{x-3}{4}$ $f(x) = -\frac{1}{t+1} =$ $57 + 13 = 60$

$y = 1$; $z = 3$; $x = \frac{35}{5} = 7$

$t = -\frac{x+1}{x-1}$

$f\left(\frac{x-3}{4}\right) =$

$= -\frac{1}{-\frac{x+1}{x-1} + 1} = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1} - 1}$ $\frac{-95}{60}$ 35

$y = 1$; $z = 3$; $x = 7$

$\frac{x-1}{x+1-x+1} = \frac{x-1}{2}$

$\boxed{y = 2;\ z = 1;\ x = 10}$

~~$2y^2 - 15y$~~

$$\begin{cases} (x-2)(y+3)\,|y-x-8| = (x-5)\cdot|x-2|\cdot|y+3| \\ y - x + 10 = (y-4)^2 \\ y \geq 4 \end{cases}$$

$2y^2 - 12y + 9 = 0$

$y - \frac{y}{2} + \frac{3}{2} + 10 = (y-4)^2$

Т.к. $y \geq 4$, $|y+3| = y+3$; $y + 3 > 0$ $\frac{-32}{23}$

$2y - y + 23 = 2y^2 - 16y + 32$;

$2)$ $x \neq 2$; $x > 2$:

$$\begin{cases} (x-2)\cdot|y-x-8| = (x-5)\cdot|x-2| \\ y - x + 10 = (y-4)^2 \\ y \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)\cdot|y-x-8| = (x-5)(x-2) \\ y \geq 4 \\ y - x + 10 = (y-4)^2; \end{cases}$$

$(2;8)$

$1)$ $x = 2$:

$|y - x - 8| = x - 5$;

$y + 8 = y^2 - 8y + 16$;

При $y - x - 8 \geq 0$:

$y^2 - 9y + 8 = 0$

$y - 3 = 2x - 5$;

$(y-1)(y-8) = 0$!

$2x = y - 3$;

$y - \frac{y}{2} + \frac{3}{2} - 8 \geq 0$;

$y = 8$!

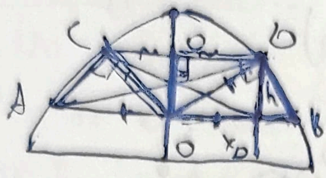
$x = \frac{y-3}{2}$;

$\frac{y}{2} - \frac{13}{2} \geq 0$

$y \geq 13$

91-38-86-56
(40.45)

Черновик



$10-0{,}1x_D^2$

$10-0{,}1x_B^2$

$0{,}1(x_B^2-x_D^2)$

$10-0{,}1x_D^2$

$10-0{,}1x_B^2$

$CO=OD=|x_D|$

x_D x_B $10-0{,}1x_D^2$

$10-0{,}1x_B^2$;

$0{,}1(x_B^2-x_D^2)$

$x_B^2=x_D^2+0{,}1(x_B^2-x_D^2)$

$x_B=\sqrt{x_D^2+0{,}1(\ldots)}$

$x_B^2=0{,}1(x_B^2-x_D^2)+x_D^2$!

$10-0{,}1x_D^2$

$10-0{,}1x_B^2$

$x_B^2=0{,}1x_B^2-0{,}1x_D^2+x_D^2$!

$0{,}1(x_B^2-x_D^2)+x_D^2=x_B^2$!

~~$0{,}9x_B^2=0$~~ ~~$0{,}9x_B^2=0{,}9x_D^2$~~ $x_B=x_D$!?

$x_B^2=x_D^2+0{,}1\cdot(x_B^2-x_D^2)$

y_D-y_B.

$0{,}9x_B^2=0{,}9x_D^2$,

$x_B^2=x_D^2$?!

$x_B=$?!

$y_D=a-bx_D^2$,

$y_B=a-bx_B^2$,

$x_B^2=x_D^2+0{,}1\cdot(x_B$

$10-0{,}1x_D^2$ $10-0{,}1x_B^2$

При $n\,\vdots\,9$:

Если $m\,\vdots\,9$

то $S(mn)\,\vdots\,9$

$S(mn)=S(n)$ $\vdots 9$?! $\vdots 9$

$n\,\vdots\,9$!

$90-m$ $1\le m\le n$

$S(n^2)=S(n)$!

$1\cdot10^{99}$

9!?

90 цифр

10^{99}

max!...

$10^{99}+1$

$S(mn)=S(n)$

$99\ldots999$

$11\cdot11\to144$?...

$99\ldots999$?

$999 \cdot 999 = 100001$!

9

$99\ldots99 \cdot 99\ldots99$

90 цифр

$90\cdot9=810$

~~$111\ldots111$~~.

90-значное

$S(n^2)=S(n)$

$99\ldots99 \cdot m$

$(10^n-1)\cdot m=m\cdot10^n-m$

$-\,999\ldots99$, $a_1a_2\ldots a_k$

$m\cdot10^n-m$!

$2\cdot10^n\cdot2$

$S(n^2)=S(n)$?

$9\cdot9=81$

$99\cdot99$

$10^{90}\cdot m-m$

$99999 \cdot m$

$1\cdot10^{90}$

$9\cdot10^{90}$

$(10^{90}-1)\cdot(10^{90}-1)$

$m\cdot(a_1a_2a_3\ldots 99\ldots9)-m$

$S(m)$

$a_1a_2\ldots a_k$

$(a_k-1)\cdot10^n+10^n-$

$9\cdot10^n$

$9\cdot90-S(m)+S(m)$

Если в чис. последние нули, то

$9999\ldots99$

$99\ldots99$

$a_1a_2\ldots a_k$

$S(m)+S(m)$

$a_1a_2\ldots a_k$

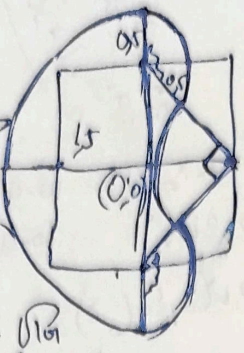
Черновик:

$\sqrt{2^2+3^2+6^2}=$

$\sqrt{4+9+36}=$

$\sqrt{2}-0{,}5$

$\sqrt{16}$ $=\sqrt{49}=7$



(1;0)

1б 2г 3д

3 б 5). 7;6 = $\sqrt{101}$

(6 а)

$\sqrt{2+0{,}5}=$

$\sqrt{2+0{,}5}=$

1 удачи

$\sqrt{2}-0{,}5$

$\sqrt{6^2+5^2+2}$ вратарь

$\sqrt{4^2+4^2+2^2}=$

$=\sqrt{32+4}=$

7;6; $\sqrt{101}$

5;6; 3ч уч"

нап 6 защит. уч. нет: C_5^2+

$\sqrt{6^2+2+8^2}=$

$C_5^2\cdot C_6^3+3\cdot5\cdot C_6^3+C_5^2\cdot3\cdot C_6^2+3\cdot C_6^3+3\cdot6\cdot C_5^2+$

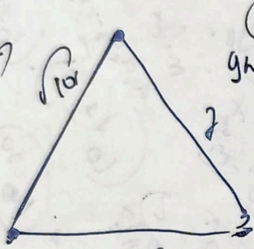
$=\sqrt{101}$

уч 1 $+3\cdot5\cdot6\cdot2$

уч 2 $4\cdot13=52$

уч 3 $-52=$

вратарь защ. нап



$\frac{19+\sqrt{241}}{4}$ $\frac{19+\sqrt{241}}{4}$ 13 9 5 7 8

3 7 9 9

5^2

0,5
3,7
3,5

$\frac{19+\sqrt{241}}{}$

$8\cdot7\cdot9$ $\sqrt{241}$

5^2-19 4

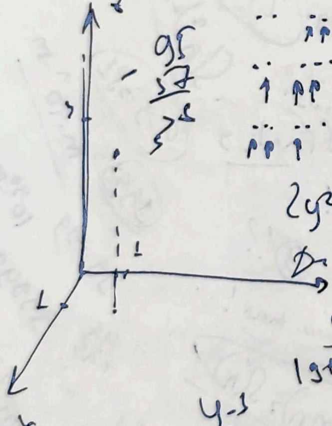
$\frac{7\cdot5-9\cdot3}{2\cdot8}=$

$2y^2-19y+15=0$

$D=361-120=$ $8\cdot7\cdot9\cdot5\cdot7+8\cdot7\cdot5\cdot7\cdot6+$ $=7\cdot12=$

$y=241$ $+8\cdot7\cdot7\cdot6\cdot5=8\cdot7^2(9\cdot5+5\cdot6+$

$+6\cdot5)$!!



19±

$\frac{y-3}{2}$ чужие плоскости?...

$15\cdot8\cdot7=$

$=120\cdot7=$

$19^2-8\cdot15=$

$=840$

$135|360$ $=361-120=$ $ax+by+cz+d=0$

$=241$

$\frac{15}{\cdot 7}{105}$

$\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot7\cdot3}$

$+840$
$+840$
1680
$+105$
1785

$\frac{45\cdot3}{360^\circ}=\frac{9\cdot5\cdot3}{9\cdot4\cdot10}=\frac{3}{8}$

$\frac{1785}{5355}$ $\cdot3$

$3\cdot5\cdot7=15\cdot7$

$\frac{19-\sqrt{241}}{4}$ $y=5$ $\frac{19+\sqrt{241}}{4}$ $\frac{1785}{5355}$ $\cdot3$ $y-\frac{y-3}{2}-3=0$

$2y-y+3-3=0$

Черновик.

Задача 1.

Заметим, что выбор вратаря (и кол-во вариантов для его выбора) не зависит от распределения „универсалов" — кол-во способов выбрать вратаря всегда равно 3. Заметим, что если в качестве защитников не выбрали „универсалов", то все универсалы являются кандидатами в нападающих, если выбрали 1-го „универсала" — 2 остальных явл. кандидатами в нападающих и т.д.

Отсюда:

способы выбрать вратаря

$C_5^2 \cdot C_9^3 \cdot 3$ — ~~для~~ если нет защитников-универсалов

способы выбрать защитников; способы выбрать нападающих

$3 \cdot 5 \cdot C_8^3 \cdot 3$ — если 1 защитник-универсал

спос. выбрать защитника универсала; способы выбрать обычного защитника; нападающие

$C_3^2 \cdot C_7^3 \cdot 3$ — если 2 защитника-универсала

защитн.-универсала; нападающие.

Общее кол-во способов:

$$C_5^2 \cdot C_9^3 \cdot 3 + 15 \cdot C_8^3 \cdot 3 + C_3^2 \cdot C_7^3 \cdot 3 = 3 \cdot \left(\frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{9!}{3! \cdot 6!} + \frac{15 \cdot 8!}{3! \cdot 5!} + 3 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!}\right) = 3 \cdot \left(\frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3} + \frac{15 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} + 3 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3}\right) =$$

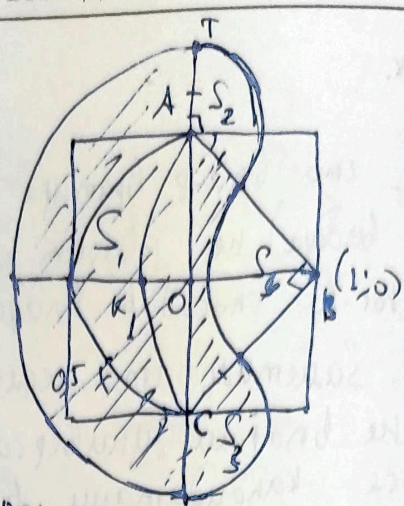
$$= 3 \cdot (10 \cdot 84 + 840 + 105) = 3 \cdot 1785 = 5355$$ способов

Ответ: 5355.

Чистовик

Задача 2.

Пусть т. $A(0;1)$; $B(1;0)$; $O(0;0)$; $C(0;-1)$.



Расстояние между любыми двумя точками двух дуг полумесяца, находящихся на прямой, проходящей через т. O, не превышает $1-0{,}5=0{,}5$.

Значит, вся область внутри полумесяца будет заполнена краской.

Рассмотрим любую точку X дуги окр-ти с центром в O.

Максимальное расстояние от т. O до точки круга с центром в X — это 1,5 для любой т. X ($1{,}5=1+0{,}5$)

Значит, внешняя граница краски левее прямой AC — полукруг радиуса 1,5 с центром в т. O.

Т.к. расстояния от любой точки дуги окр-ти с центром в B до прямой AC не превышает 0,5 (радиус окр-ти — $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}=AB$; $OK=\sqrt{2}-1<0{,}5$; K — точка $\cup AKC$ наиболее удалённая от AC), то вся область внутри полукруга будет закрашена

Площадь части фигуры левее AC: $S_1=\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot R^2=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2{,}25=1{,}125\pi=\frac{9}{8}\pi$

P и T — точки полукруга, лежащие на прямой AC.

$\angle TAB=\angle PCB=45^\circ+90^\circ=135^\circ$;

S_2 и S_3 — площади сегментов кругов радиуса 0,5 с центром в т. A и C; углы этих сегментов — $\angle TAB=\angle PCB=135^\circ$, (части кругов радиуса 0,5 — границы растёкшейся краски в областях ~~левее~~ правее TA и выше AB и правее CP и ниже BC).

$S_2=\frac{135^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\cdot 0{,}5^2=\frac{3}{8}\cdot\pi\cdot 0{,}5^2=\frac{3}{32}\pi=S_3$;

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot OB=1$.

Внешняя граница растёкшейся краски между AB и BC — сегмент круга радиуса $AB-0{,}5=\sqrt{2}-0{,}5$ с центром в т. B.

Чистовик

Задача 2 (прод.)

$S_4 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (\sqrt{2}-0{,}5)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot (2{,}25-\sqrt{2})$

$S_{ABC} - S_4 = 1 - \frac{\pi}{4}(2{,}25-\sqrt{2})$

Т.о, общая площадь фигуры $- S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =$
$= \frac{9\pi}{8} + \frac{3\pi}{16} + 1 - \frac{\pi}{4}(2{,}25-\sqrt{2})$

Задача 3.

$$\begin{cases} (xy+3x-2y-6)\,|y-x-8| = (x-5)\cdot|xy+3x-2y-6| \\ \sqrt{y-x+10} = y-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-4 \geq 0 \\ y-x+10 = (y-4)^2 \\ (x-2)(y+3)\cdot|y-x-8| = (x-5)\cdot|x-2|\cdot|y+3| \end{cases}$$

Т.к. $y \geq 4$, $|y+3| = y+3 \neq 0$

$$\begin{cases} y \geq 4 \\ y-x+10 = y^2-8y+16 \\ (x-2)\cdot|y-x-8| = (x-5)\cdot|x-2| \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 4 \\ y^2-9y+6 = -x \\ (x-2)\cdot|y-x-8| = (x-5)\cdot|x-2| \end{cases}$$

При $x=2$:

$$\begin{cases} y \geq 4 \\ y^2-9y+8=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 4 \\ (y-1)(y-8)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 4 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \text{ — не уд. усл. } y\geq 4 \\ y=8 \end{array}\right. \end{cases}$$

При $x>2$:

$$\begin{cases} y \geq 4 \\ y^2-9y+6=-x \\ |y-x-8| = x-5 \end{cases}$$

При $y-x-8 \geq 0$:

$$\begin{cases} y \geq 4 \\ y^2-9y+6=-x \\ y-x-8=x-5 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 4 \\ y^2-9y+6=-x \\ x=\frac{y-3}{2} \end{cases}$$

$y - \frac{y-3}{2} - 8 \geq 0$
$\boxed{y \geq 13}$ (*)

$$\begin{cases} y \geq 4 \\ 2y^2-18y+12=y-3 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 4 \\ 2y^2-19y+15=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 4 \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{19+\sqrt{241}}{4} \\ y=\frac{19-\sqrt{241}}{4} \end{array}\right. \end{cases}$$

не уд. усл. (*)

При $y-x-8<0$:

$$\begin{cases} y \geq 4 \\ y^2-9y+6=-x \\ y-x-8=5-x \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 4 \\ y^2-9y+6=-x \\ y=13 \end{cases}$$

$x = -13^2+9\cdot 13-6 < 0$, $x<2$. — не уд. усл.
$x>2$.

Чистовик.

Задача 3.

$$\begin{cases} x<2 \\ y\geq 4 \\ y^2-9y+6=-x \\ |y-x-8|=5-x \end{cases}$$

1) $\begin{cases} y-x-3\geq 0 \\ x<2 \\ y\geq 4 \\ y^2-9y+6=-x \\ y=13 \end{cases}$ $\begin{cases} y=13 \\ 5-x\geq 0 \\ x<2 \\ x=-169+9\cdot 13-6 \end{cases}$

$\begin{cases} y=13 \\ x=-58 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y-x-3<0 \\ x<2 \\ y\geq 4 \\ x-y+3=5-x \ (1) \\ y^2-9y+6=-x \end{cases}$ $\begin{cases} x<2 \\ x=\frac{y-3}{2} \\ 2y-y+3-16<0 \\ y^2-9y+6=-x \end{cases}$

(1) $2x=y-3$;

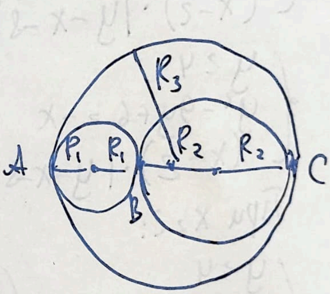
$x=\frac{y-3}{2}$

$\begin{cases} x<2 \\ y<13 \\ x=\frac{y-3}{2} \\ 2y^2-18y+12=y-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x<2 \\ y<13 \\ x=\frac{y-3}{2} \\ 2y^2-19y+15=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cancel{x<2} \\ y<7 \\ 2y^2-19y+15=0 \end{cases}$

Ответ: (2,8)

Задача 4.

1 час 35 мин $=95$ мин.



Пусть автомобиль x раз проехал $\cup AB$,

y раз $\cup BC$, z раз $- \cup AC$,

тогда $5x+13y+19z=95$; $z\leq 5$.

Если $z=5$, то автомобиль нечет. кол-во раз проехал $\cup AC$ и остановился в т. C. Значит, $z<5$.

Кроме того, $x\underset{2}{\equiv} y$, иначе автомобиль остановился в т. B.

$13y+19z=5\cdot(19-x)$; при $y\,\vdots\, z$, $19-x\,\vdots\, z$ и наоборот.

Значит, $z\,\vdots\, z$. $z=1$ или $z=3$

При $z=1$: $13y+5x=95-19$; $13y+5x=76$. $13y\underset{10}{\equiv}1$ или $13y\underset{10}{\equiv}6$;

$y\underset{10}{\equiv}7$ или $y\underset{10}{\equiv}2$. При $y=7$, $13y=91>76$; $\Rightarrow y=2$.

Тогда $x=10$, $y=2$; $z=1$. Но после двух проездов по $\cup BC$ и 10ти проездов по $\cup AC$ автомобиль находится в т. A.

чистовик.

Задача 4 (прод.)

После проезда по $\smile AC$ он окажется в п. C.

При $z=3$:

$13y+5z=95-5x$:

$13y+5x=38$.

$13y \underset{10}{\equiv} 3$ или $13y \underset{10}{\equiv} 8$

$y \underset{10}{\equiv} 1$ или $y \underset{10}{\equiv} 6$. т.к. $y<3$, $y=1$.

Тогда $5x=38-13=25$, $x=5$.

При $x=5$, $y=1$, $z=3$ автомобиль оказался в п. A.

Найдём длину $\smile AC$: $2R_3=2R_1+2R_2$; $\Rightarrow R_3=R_1+R_2$.

$AB=\pi R_1$, $BC=\pi R_2$; $AC=\pi(R_1+R_2)=\pi R_1+\pi R_2=AB+BC=$

$=40$ км

$15x+25y+40z=15\cdot5+25+40\cdot3=75+25+120=220$ км

Отв: 220 км

Задача 5.

Пусть $\frac{t-1}{t+1}=x$; тогда $f(x)=-\frac{1}{t+1}$

$t-1=xt+x$, $t(x-1)=-x-1$; $t=-\frac{x+1}{x-1}$;

$f(x)=-\frac{1}{1-\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{1}{\frac{x+1-x+1}{x-1}}=\frac{x-1}{2}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$;

$f(f(x))=\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$;

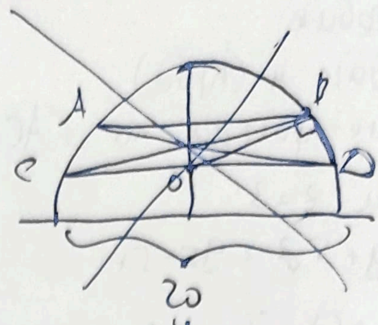
$\underbrace{f\ldots}_{n}(f(x))=\frac{x}{2^n}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}-\ldots-\frac{1}{2}$;

$(\underbrace{f(\ldots(f(x))}_{n})'=\frac{1}{2^n}$ в любой точке.

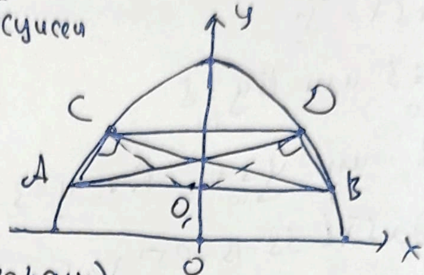
т.к. $g'(x_0)$ – тангенс угла наклона касательной к $g(x)$ в точке x_0, $g=(\underbrace{f(\ldots(f(0)))}_{9})'=\frac{1}{2^9}=\frac{1}{512}$

Отв: $\frac{1}{512}$.

Задача 6. (чистовик)



Не умоляя общность, будем считать, что ~~$x_B < x_D$ (x_B и x_D - абсцисса т. B и D)~~, а также что $x_B > 0$ и $x_D > 0$ (x_B и x_D - абсциссы т. B и D).



Точки A и B, а также т. C и D симметричны отн. оси Oy

Значит, $AC = BD$, ACDB - равнобедр. трапеция (т.к. AD и BC - диагонали).

Т.к. $\angle ADB = 90°$, $\angle ACB = 90°$, точки A, C, D, B лежат на одной окр-ти с центром в т. O_1 (середина AB).

AB - диаметр окр-ти, CD - хорда, значит $AB \geq CD$.

$AB = 2x_B$; $CD = 2x_D$; $x_B \geq x_D$.

$O_1A = O_1C = O_1D = O_1B$ - радиусы окр-ти.

$O_1D^2 = O_1B^2 = x_B^2$; $O_1D^2 = x_D^2 + h^2$, где h - расстояние между AB и CD.

$h = y_D - y_B = (a - bx_D^2 - (a - bx_B^2)) = b\cdot(x_B^2 - x_D^2)$.

$x_B^2 = x_D^2 + b\cdot(x_B^2 - x_D^2)$,

$x_B^2(1-b) = x_D^2(1-b) \;|: 1-b \neq 0$

Отсюда $x_B = x_D \Rightarrow y_B = y_D$; расст. между AB и CD - 0.

Ответ: 0

Задача 7. Рассмотрим число $\underbrace{99\ldots 99}_{90 \text{ цифр}}$.

$\underbrace{999\ldots 999}_{90}\cdot m = (10^{90} - 1)\cdot m$.

Рассмотрим числа m с ненулевой последней цифрой (т.к. $S(n\cdot k\cdot 10^p) = S(n\cdot k)$).

$10^{90}\cdot m - m = \overline{(m-1)999\ldots 99} - m + 1$ (где $m-1$ включено в ~~эта~~ запись числа $\overline{(m-1)999\ldots 99}$)

Пусть $A = \overline{(m-1)999\ldots 99}$, тогда $S(A) = S(m) - 1 + 9\cdot 90$.

Чистовик.

Задача 7 (прод.)

$S(m)$ $S(A-m) = S(m) - 1 + 9 \cdot 90 - S(m)$, т.к. любая цифра числа m не превышает 9.

$S(A-m+1) = S(m) - 1 + 9 \cdot 90 - S(m) + 1 = 9 \cdot 90 = S(\underbrace{99\ldots99}_{90})$

Число $\underbrace{99\ldots99}_{90}$ — наибольшее подходящее, т.к. $\underbrace{99\ldots99}_{90}$ — наибольшее 90-значное число.

Ответ: $\underbrace{99\ldots99}_{90}$.