



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 12

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Щербачевой Елены Николаевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«15» февраля 2024 года

Подпись участника
Щ

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	
8	8	12	12	12	0	12	0	64	

05-08-23-19
(40.46)

Чертовик.

√1

1 вр, 2 зам, 3 кап.
2 вр, 4 зам, 7 кап, 3 "ушиб"-зам и кап.

Сп-в вратаря: 2

Сп-в зам-ка: $C_4^2 + C_4^1 \cdot C_3^1 + C_3^2$

Сп-в кап: C_7^3

√2



Если зам-ка бер из 5: $2 \cdot C_4^2 \cdot (C_3^3 + C_3^2 + C_3^1) + C_3^1 \cdot C_7^2 + C_3^2 \cdot C_7^1$

Если зам-ка бер из зам и ушиб: $2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot (C_7^3 + C_2^1 \cdot C_2^2 + C_2^2 \cdot C_2^1)$

Если оба зам из ушиб: $2 \cdot C_3^2 \cdot (C_7^3 + C_1^1 \cdot C_7^2)$

$$\begin{aligned} & \text{Итого } 2 \cdot \left(\frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{7!}{3! \cdot 4!} + 1 + \frac{3!}{2!} \cdot \frac{7!}{5! \cdot 2!} + \frac{3!}{2!} \cdot \frac{7!}{6!} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{4!}{3!} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \left(\frac{7!}{4! \cdot 3!} + 2 \cdot \frac{7!}{2! \cdot 5!} + \frac{7!}{6!} \right) + \frac{3!}{2!} \cdot \left(\frac{7!}{3! \cdot 4!} + \frac{7!}{5! \cdot 2!} \right) \right) = \\ & = 2 \cdot \left(6 \cdot \left(36 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7}{42} + 3 \cdot 7 \right) + 6 \cdot (35 + 42 + 7) + 3 \cdot (35 + 21) \right) = \\ & = 2 \cdot (6 \cdot (36 + 63 + 21) + 6 \cdot (84 + 3 \cdot 56)) = \\ & = 2 \cdot (6 \cdot 120 + 6 \cdot 84 + 3 \cdot 56) = 12 \cdot (120 + 84 + 28) = \\ & = 12 \cdot 232 = \boxed{2784} \end{aligned}$$

√3

$$\begin{cases} (xy - 3 + 3x - y) | y - x - 9 | = (x - 4) | xy - 3 + 3x - y | \\ \sqrt{y - x + 9} = y - 4 \end{cases}$$

$$xy - 3 + 3x - y = x(y + 3) - (y + 3) = (x - 1)(y + 3)$$

$$(x - 1) | y - x - 9 | = (x - 4) | xy - 3 + 3x - y |$$

при $x = 1$ $\sqrt{y - x + 9} = \sqrt{y + 8} = y - 4$ $y + 8 = y^2 - 8y + 16$
 $y^2 - 9y + 8 = 0$
 $D = 81 - 32 = 49$
 $y_1 = \frac{9 + 7}{2} = 8; y_2 = 1, \text{ но } y \geq 4$

При $x - 1 > 0$: $|y - x - 9| = x - 4 \Rightarrow x - 4 > 0, x > 4$

- $y - x - 9 = x - 4 \Rightarrow y = 2x + 5$; $\sqrt{x + 14} = 2x + 1$ $x + 14 = 4x^2 + 4x + 1$ $4x^2 + 3x - 13 = 0$ $D = 9 + 208 = 217$ $x = \frac{-3 + \sqrt{217}}{8} < 4 \Rightarrow$ не подходит.
- $y - x - 9 = -x + 4; y = 13$; $\sqrt{-x + 22} = 9$ $-x + 22 = 81; x = -59 \Rightarrow$ не подходит.

Черновик.
№2

Узнал площадь:

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2 - 1 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 = 1.$$

$$S_K = S_H + \frac{\sqrt{2}}{2} l = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi = 1 + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \pi$$

$$l = \pi + \frac{1}{2} \pi \cdot \sqrt{2} = \pi + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

$$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2} \quad \#5$$

$$f\left(\frac{x+2-4}{x+2}\right) = f\left(1 - \frac{4}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$$

$$-\frac{3+\sqrt{2}+7}{8} + 14$$

$$\frac{3+\sqrt{2}+7}{8} + 14$$

$$\frac{198+28 \cdot \frac{3+\sqrt{2}+7}{8} + \frac{(-3+\sqrt{2}+7)^2}{64}}{64}$$

$$12x+4y=85$$

$$\frac{x-2^{n+1}}{2^n} - 1 = \frac{x-2^{n+1}-2^n}{2^n} = \frac{x-2^{n+1}-2^n}{2^n}$$

$$f(1-y) = -\frac{y}{2}$$

$$z=1-y; -y=z-1$$

$$f(z) = \frac{z-1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{-3+\sqrt{2}+7}{4} + 5 - \frac{-3+\sqrt{2}+7}{8} + 9}$$

$$= \sqrt{\frac{-3+\sqrt{2}+7}{8} + 14}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{2}$$

$$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \frac{\frac{x-2}{x+2}-1}{2} = \frac{\frac{x-2-x-2}{x+2}}{2} = \frac{-4}{2(x+2)} = -\frac{2}{x+2}$$

$$\frac{15}{5} = 3$$

$$f(f(x)) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{\frac{x-1}{2}-1}{2} = \frac{x-1-2}{4} = \frac{x-3}{4}$$

$$f(f(f(x))) = f\left(\frac{x-3}{4}\right) = \frac{\frac{x-3}{4}-1}{2} = \frac{x-3-4}{8} = \frac{x-7}{8}$$

$$f(f(f(f(x)))) = \frac{\frac{x-7}{8}-1}{2} = \frac{x-7-8}{16} = \frac{x-15}{16}$$

$$\frac{81}{59}$$

$$\Rightarrow f(f(f(\dots f(x)))) = \frac{x-2047}{2048}$$

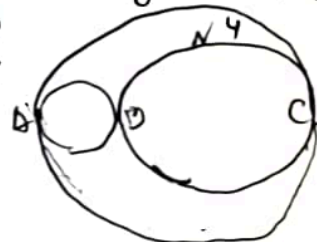
$$= \frac{1}{2048} x - \frac{2047}{2048}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2048} = \text{tg } \alpha, \text{ где } \alpha - \text{кис. } \alpha$$

$$R_1 = \frac{15}{\pi}$$

$$R_2 = \frac{25}{\pi}$$

$$R_3 = \frac{60}{\pi}$$



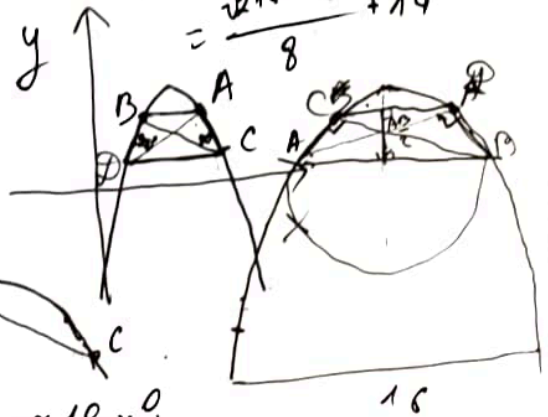
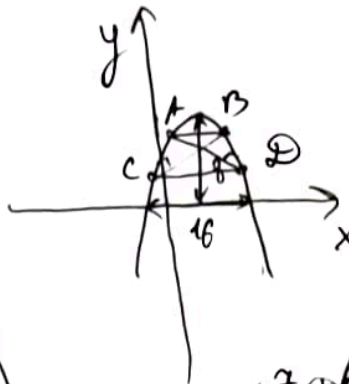
85 | 17 12 34 51 68 85
 35 | 5 15-11=4 7 85-22=63 17
 11x+7y+17z=85
 22+63=85
 11x+7y=2
 11x+7y+17z=85
 11x+7y=2
 11x+7y+17z=85

05-08-23-19
(40.46)

Черновик.
№6

$$\frac{(\sqrt{217}-3)^2}{16} + \frac{\sqrt{217}-3}{2} + 1 =$$

$$= \frac{\sqrt{217}-3}{8} + 14$$



$$S(n) = n \cdot 10 + n \cdot 100 + \dots + n \cdot \frac{10 \cdot \dots \cdot 0}{95}$$

$m \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N}$ n -8532-06; $S(mn) = S(n)$

$$S(2n) = S(3n) = S(4n) = \dots = S(10^k n) = S(n)$$

\Rightarrow ~~...~~ это число: 3, 19

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times 2 \\ \hline 198 \end{array}$$

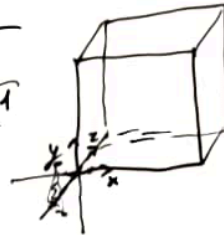
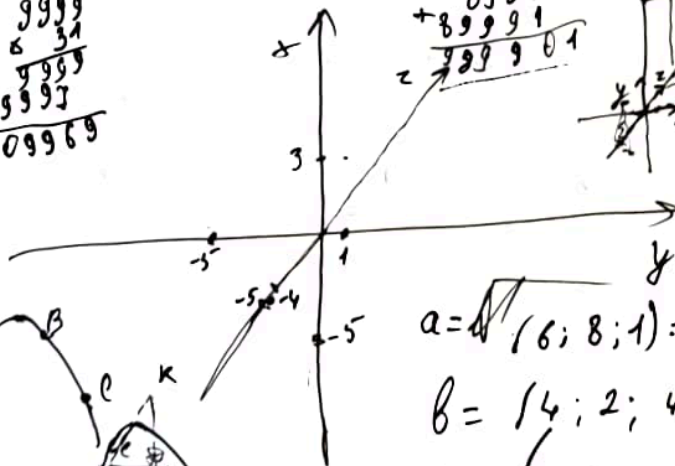
128

$$\begin{array}{r} 9999 \cdot x \\ + 99 \\ \hline 999901 \end{array}$$

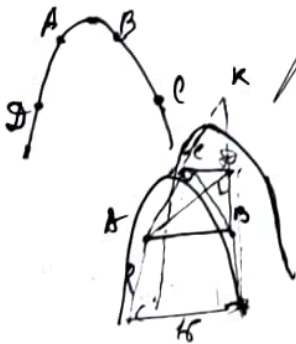
$$\begin{array}{r} 999 \\ \times 11 \\ \hline 999 \\ + 999 \\ \hline 10998 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9999 \\ \times 11 \\ \hline 9999 \\ + 9999 \\ \hline 109989 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9999 \\ \times 2 \\ \hline 19998 \\ + 9999 \\ \hline 309969 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 9999 \\ \times 25 \\ \hline 249975 \end{array}$$



$$a = \sqrt{(6; 8; 1)} = \sqrt{6^2 + 8^2 + 1} = \sqrt{101}$$

$$b = \sqrt{(4; 2; 4)} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = 6$$

$$c = \sqrt{(-2; -6; 5)} = \sqrt{2^2 + 6^2 + 5^2} =$$

$$AB \parallel CD \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DCB = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$$

$$AB, CD \in \mathbb{P}(0; 16]$$

$$\frac{KC}{AK} = \frac{KB}{AB} = \frac{CD}{AB} \quad AC = CD \text{ (треугольник)}$$

$$AC \sin \alpha = h \quad AC \cos \alpha = AB; \quad h \cdot AB = AC \cdot CB$$



Чистовик

№ 1

Вратаря можно выбрать 2 спос-ми.

1) Если берём защ-ка не из "универс", то сп-в
 $x = 2 \cdot C_4^2 \cdot (C_7^3 + C_3^3 + C_3^1 \cdot C_7^2 + C_3^2 \cdot C_7^1)$

2) Если берём 1 защ-ка из "универс"; то сп-в:
 $y = 2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot (C_7^3 + C_2^1 \cdot C_7^2 + C_2^2 \cdot C_7^1)$

3) Если оба защ-ка из "универс":

$$z = 2 \cdot C_3^2 \cdot (C_7^3 + C_1^1 \cdot C_7^2)$$

Всего сп-в: $x + y + z = 2 \cdot (C_4^2 \cdot (C_7^3 + 1 + C_3^1 \cdot C_7^2 + C_3^2 \cdot C_7^1) +$

$$+ C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot (C_7^3 + C_2^1 \cdot C_7^2 + C_2^2 \cdot C_7^1) + C_3^2 \cdot (C_7^3 + C_7^2)) =$$

$$= \boxed{2784}$$

№ 2

Найдём пл-дь изначальной фигуры. Она равна пл-ди полукруга с ц-ем в (0; 0) минус пл-дь сегмента круга с ц-ем в (1; 0), т.е:

$$S_0 = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1$$

Из-за раст-я краски пл-дь пов-ти увели-сь, точки на краю увели-сь на рад этих точек.

т.е. пл-дь стала $S_k = S_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} l$, где l - длина пов-ти. $l = \pi + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$; $S_k = \boxed{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi + \frac{\pi}{2} = \sqrt{1 + \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \pi}}$

№ 5

$$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -2 \cdot \frac{1}{x+2}; \quad f\left(1 - \frac{4}{x+2}\right) = \frac{-2}{x+2}$$

Пусть $y = \frac{4}{x+2}$; $f(1-y) = \frac{-y}{2}$; пусть $z = 1-y$, тогда

$$f(z) = \frac{z-1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{2} \quad f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x-3}{4}$$

Заметим, что при каждом приме-ии ф-ии получ-ся $x-2^n+1$. Док-ем это по инд-ии.

База: $n=1$ - верно

Шаг: Пусть верно для k , тогда для $k+1$: $f\left(\frac{x-2^k+1}{2^k}\right) = \frac{\frac{x-2^k+1}{2^k} - 1}{2} = \frac{x-2^k+1-2^k}{2^{k+1}} = \frac{x-2^{k+1}+1}{2^{k+1}}$ - верно

Числовой.

№5 (прод-е)

Тогда после прикл-я этой ф-ии 1 раз
получ-ся $\frac{x-2047}{2048}$; $g(x) = \frac{x}{2048} - \frac{2047}{2048}$ - прямая

$$g'(x) = \frac{1}{2048}$$

$$\begin{cases} (1) & (xy^{-3} + 3x - y) | y^{-x-9} = (x-4) | xy^{-3} + 3x - y \quad \text{ОДЗ:} \\ \sqrt{y^{-x+9}} = y-4 & y-x \geq -9 \\ & y \geq 4 \end{cases}$$

$$xy^{-3} + 3x - y = x(y+3) - (y+3) = (x-1)(y+3)$$

$y+3 > 0$ по ОДЗ \Rightarrow 1-е ур-е сокр на $y+3$

$$(1) (x-1) | y^{-x-9} = (x-4) | x-1$$

1) $x=1$

$$\sqrt{y^{-x+9}} = y-4; \quad y+8 = y^2 - 8y + 16;$$

$$y^2 - 9y + 8 = 0;$$

$$\Delta = 81 - 32 = 49; y_1 = \frac{9+7}{2} = 8; y_2 = 1 - \text{не подходит по ОДЗ.}$$

$$\Rightarrow x=1; y=8$$

2) $x-1 > 0$
 $|y-x-9| = x-4; x \geq 4$

2.1) $y-x-9 = x-4; y = 2x+5$
 $\sqrt{x+14} = 2x+1; x+14 = 4x^2 + 4x + 1;$

$$4x^2 + 3x - 13 = 0;$$

$$\Delta = 9 + 208 = 217$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{217}}{8} < 1 \Rightarrow \text{не подт}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{217}}{8} < 0 < 1 \Rightarrow \text{не подт}$$

2.2) $y-x-9 = -x+4; y = 13;$
 $\sqrt{-x+22} = 9; -x+22 = 81; x = 22-81 = -59 \Rightarrow \text{не подт}$

3) $x-1 < 0$

3.1) $|y-x-9| = 4-x; x \leq 4$

3.1.1) $y-x-9 = 4-x; y = 13; \sqrt{-x+22} = 9; -x+22 = 81$
 $22-x > 0 \Rightarrow x < 22$
 $x = 22-81 = -59$

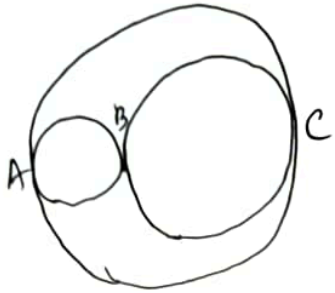
3.2) $y-x-9 = x-4$
 $y = 2x+5; \sqrt{x+14} = 2x+1 \Rightarrow x^2 - 14 \ll 2x+1 > 0; x \geq -\frac{1}{2};$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{217}}{8} < -1 \Rightarrow \text{не подт}; x_2 = \frac{-3 + \sqrt{217}}{8} - \text{подт}$$

$$y_2 = \frac{-3 + \sqrt{217}}{4} + 5; \sqrt{\frac{\sqrt{217}-3}{4} + 5} + 5 - \frac{\sqrt{217}-3}{8} + 9 = \frac{\sqrt{217}-3}{4} + 1 - \text{не подт}$$

$$\Rightarrow \text{ответ: } (1; 8) \text{ и } (-59; 13)$$

Чистовик.
№ 4



$$7x + 11y + 17z = 85$$

x, y - один четн. - сии

$$7x + 11y = 85 - 17z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x + 11y : 17$$

П.к. x и y один четн. - ми

$$7x + 11y : 2 \Rightarrow 7x + y : 34$$

$$7x + 11y < 85$$

$$\Rightarrow 7x + 11y = 34 \quad \text{или} \quad 7x + 11y = 68$$

не бив при

$$x, y \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow x=5; y=3$$

$$z = 1$$

$$\pi R_1 = 15$$

$$\pi R_2 = 25$$

$$\pi(R_1 + R_2) = 40 \Rightarrow$$

$$5 \cdot 15 + 3 \cdot 25 + 40 =$$

$$= 75 + 75 + 40 = 190$$

Ответ: 190 км

№ 6

$$AB \parallel OX$$

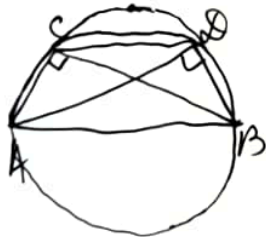
$$CD \parallel OX$$

$\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ - трап.

$\angle ACB = \angle ADB \Rightarrow ACDB$ - впис чет. \Rightarrow впис трап \Rightarrow

\Rightarrow п.б трап $\Rightarrow AC = BD$

OC и OD , а также OA и OB один по модулю коэф.



Чистовик.

П.к. справ-во $\forall m \in [1; n]$, то $S(m) = S(2m) = S(3m) =$
 $= S(m)$ $\Rightarrow S(n) = 9$

Ответ: $\underbrace{999\dots 9}_{85}$