0 133696 820000

13-36-96-82
(40.61)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов" ~~по математике~~
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Яковлева Данила Евгеньевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» февраля 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
4	8	8	12	12	12	12	0	68

68 (шестьдесят восемь) ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

13-36-96-82
(40.61)

|Чистовик|

№ 1

Для каждого набора „ролей" для „лучших универсалов" найдём кол-во способов выбрать шестёрку. Будем обозначать набор ролей двумя цифрами – кол-во „ун-ов" защитников и кол-во – нападающих

I 0;0 – в наборе нет „ун-ов"

Тогда способов $C_2^1\cdot C_5^2\cdot C_6^3=2\cdot 10\cdot 20=400$

II 0,1 – 1 нападающий

Способов $C_2^1\cdot C_5^2\cdot C_6^2 = 2\cdot 10\cdot 15=300$

III 0,2 – 2 нападающих

Способов $C_2^1\cdot C_5^2\cdot C_6^1 = 2\cdot 10\cdot 6 = 120$

IV 0,3 – 3 нападающих

Способов $C_2^1\cdot C_5^2\cdot C_6^0 = 20$

V 1,0 – 1 защ-к

Способов $C_2^1\cdot C_5^1\cdot C_6^3 = 2\cdot 5\cdot 20 = 200$

VI 1,1

Способов $C_2^1\cdot C_5^1\cdot C_6^2 = 2\cdot 5\cdot 15 = 150$

VII 1,2

Способов $C_2^1\cdot C_5^1\cdot C_6^1 = 2\cdot 5\cdot 6 = 60$

VIII 2,0

Способов $C_2^1\cdot C_5^0\cdot C_6^3 = 2\cdot 20 = 40$

IV 2,1

Способов $C_2^1\cdot C_5^0\cdot C_6^2 = 2\cdot 1\cdot 15 = 30$

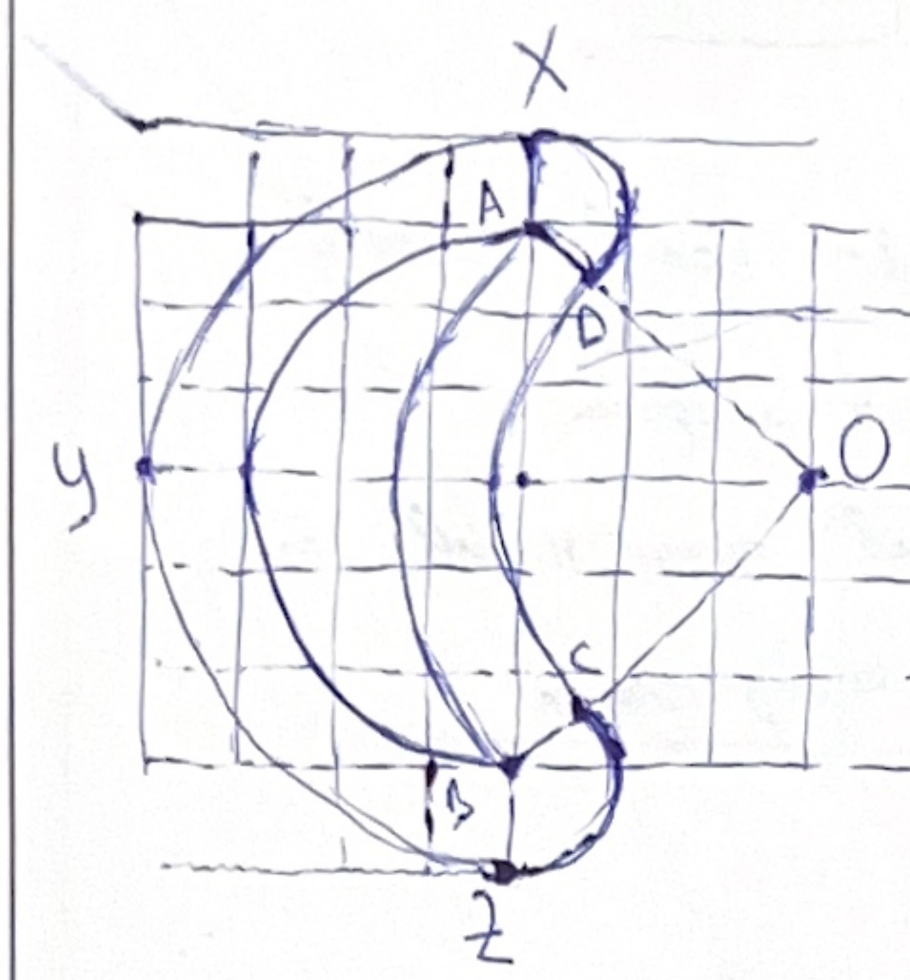
Тогда суммарно способов выбрать 6-ку: $400+300+120+20+200+150+60+40+30=$

$= 1320$

Ответ: 1320 способов

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

№2



Фигура перейдёт в такую; её контур будет состоять из левой полуокружности с центром в $(0,0)$ и радиусом $\frac{4}{3}$;

сверху и снизу - из участков окружностей в точках $(0;1)$ и $(0;-1)$ и радиусами $\frac{1}{3}$;

и справа - из участка в $\frac{1}{4}$ окружности с центром в $(1,0)$ и радиусом $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)$

Найдём площадь фигуры. Она складывается из площадей двух одинаковых секторов окружностей с углом 135° и радиусом $\frac{1}{3}$ (BCZ и ADX) и разности двух площадей фигур $OB\overline{ZYX}A$ и $O\overline{DC}$

$$S_{BCZ} = S_{ADX} = \pi\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$S_{OB\overline{ZYX}A} = S_{XYZ} + S_{OAB} = \pi\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + \frac{2\cdot 1}{2}$$

$$S_{O\overline{CD}} = \pi\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$$

Тогда площадь всей фигуры $S = \pi\cdot\frac{2}{27} + \pi\cdot\frac{8}{9} + 1 - \pi\cdot\left(2+\frac{1}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{1}{4} =$

$$= 1 + \pi\cdot\left(\frac{8+32\cdot 3+2\cdot 27+1\cdot 3-2\sqrt{2}\cdot 9}{27\cdot 4}\right) = 1+\pi\cdot\frac{161-18\sqrt{2}}{108}$$

Ответ: $1+\pi\cdot\frac{161-18\sqrt{2}}{108}$

13-36-96-82
(40.61)

№4

Заметим, что ~~весь~~ путь автомобиля можно разбить на части и составить из них круги (3-х типов) и фигура (образована 3-х полуокружностей,

Будем делать их так: Уберём из пути все круги, который проехал авт-ист. Тогда, т.к. круг — замкнут, то путь остается замкнутой кривой. Тогда, т.к. в пути уже нет кругов, то он состоит только из .

Пусть авт-ист проехал a кругов на AB; b — на BC; c — на AC и d таких кривых .

Тогда $10\cdot a + 26\cdot b + 38\cdot c + \overset{19+5+13}{37}\cdot d_{мин} = 95_{мин} = 1$ час 35 мин.

Заметим, что d — нечётно. Тогда, т.к. $d<3$ $(37\cdot 3>95)$, то $d=1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $10a + 26b + 38c = 58$ $\Rightarrow$ $b=0$, $a=2$, $c=1$

Заметим, что длина дуги на $\overset{\frown}{AC}$ равна $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}$ (т.к. $\pi(r_1+r_2)=\pi r_1+\pi r_2$)

Тогда авт-ст проехал $26\cdot 2 + (13+27)\cdot 2 + 13+27+13+27 =$

$= 4(26+27) = 212$

Ответ: автомобилист проехал 212 км

№5

Найдём $f(a)$; $a \neq 1$ $\qquad x-1 = \frac{a+1-a+1}{a-1} = \frac{2}{a-1}$

Пусть $x = \frac{a+1}{a-1}$ Тогда $(a-1)x = a+1$

$\Downarrow$

$a(x-1) = x+1 \Leftrightarrow a = \frac{x+1}{x-1}$

Тогда $f(a) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1} = \frac{a-1}{2}$

Тогда $f'(a) = \frac{1}{2}$ $\forall a$

Покажем, что $\forall k \in \mathbb{N}$ $\underbrace{f(f\ldots f(0)))}_{k \text{ раз}}$ ~~[illegible]~~ < 0 по индукции

База - очевид $-\frac{1}{2} < 0$

Переход $\underbrace{f(f\ldots(x))}_{k} < 0 \Rightarrow f(\underbrace{f(f\ldots(x))}_{k}) = \frac{\overbrace{f(f\ldots f(x)}^{k} - 1}{2} < 0$

ЧТД.

Тогда в нашем случае $f(x) = \frac{x-1}{2}$

$g'(x) = \underbrace{f'(f\ldots(x))}_{10} \cdot \underbrace{f'(f\ldots(x)}_{9} \cdot \ldots \cdot f'(x) =$

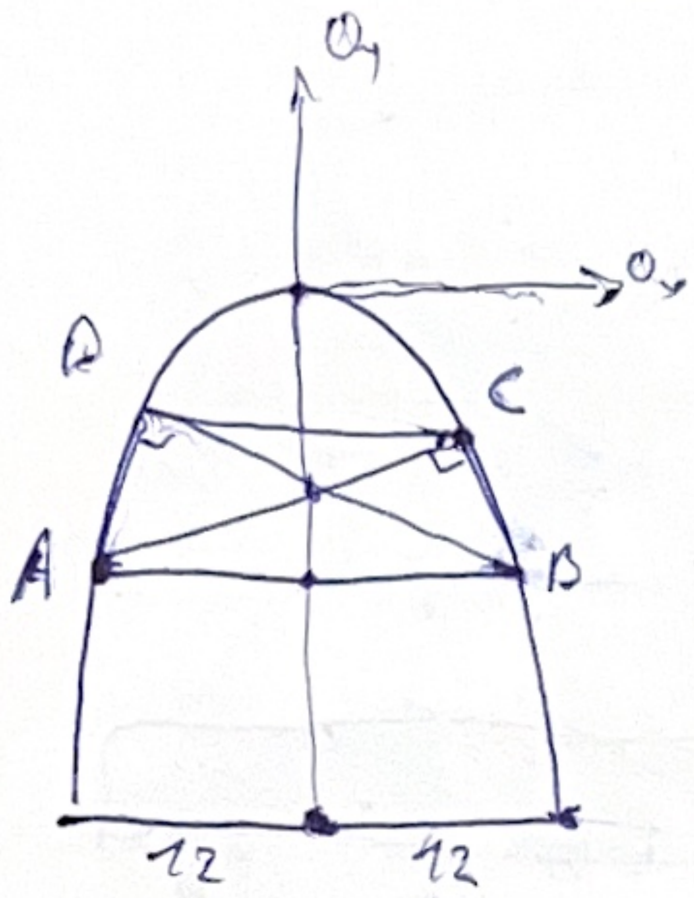
$= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}}_{10 \text{ раз}} = \frac{1}{1024}$

Тогда, тангенс угла наклона касательной $g(0) = \frac{1}{1024}$

Ответ: $\frac{1}{1024}$

13-36-96-82
(40.61)

№6



Переместим центр координат в вершину параболы.

Тогда её график будет $-bx^2$

Парабола симм-на отн-но O_y ⇒ O_y делит само поле пополам

Тогда ~~...~~ $-b\cdot(12)^2=-18$

$$\Downarrow$$

$$b=\frac{18}{12^2}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

Пусть M – середина A,B с коорд-ми $(0;-m)$

Тогда A,B,C,D лежат на окружн. с центром в M ⇒ удовл-ю условию

$$x_{a-d}^2+(y_{a-d}+m)^2=r^2=\cancel{\ldots}=\sqrt{\frac{m}{b}}^2=\frac{m}{b}=8m$$

$$\Downarrow$$

Точки они лежат на параболе ⇒ $y_{a-d}=-bx_{a-d}^2$ ⇒ $x_{a-d}^2=\frac{y_{a-b}}{-b}=-8y_{a-b}$

Тогда $\cancel{x_{a-d}^2+b^2x_{a-d}^4+2m\ldots x_{a-d}^2=b^2m^4-m^2}$

$$\cancel{x_{a-d}^2=}$$

$$-8y_{a-b}+y_{a-b}^2+2my_{a-b}+m^2-\cancel{\ldots}8m=0$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{y=8-2m\pm\sqrt{\ }}$$

$$(y_{a-b}+m)(y_{a-b}+m-8)=0$$

Тогда y-коорд. A и B $=-m$; y-координата C и D $=8-m$ ⇒

⇒ Расстояние между AB и CD $=8$

Ответ: 8

№7

Ответ: $\underbrace{99\ldots9}^{75 \text{ цифр}}$

Заметим, что больших 76-значных чисел не бывает.

Покажем, что условие для $\overset{76}{99\ldots9}$ выполняется.

Для этого для $\forall\, m \leqslant \overset{76}{99\ldots9} = m_k \ldots m_1$ ~~По условию цифра равна нулю~~ m_1 - I цифра не равная „0"

$m < \overset{76 \text{ цифр}}{100\ldots0}$

$S(m \cdot \overset{76}{99\ldots9}) = S(\overset{76}{9\ldots9}) = 76 \cdot 9$ Т.к $m < 10\ldots0$, то $k \leqslant 75$

$m \cdot \overset{76}{99\ldots9} =$ ~~$m_{76} \ldots m_1 00 \ldots m_{76} \ldots m_1$~~

$\overset{76}{1000\ldots0} \cdot m - m = (m_k \ldots m_1 0 \ldots 0 - m_k \ldots m_1) + 1000\ldots0$

Вычтем эти 2 числа в столбик

$$\begin{array}{r} m_k \ldots m_1 0.0 \ldots 0 \\ - \quad m_k \quad m_1 \\ \hline m_k \ldots m_1 - 1\,(9-m_k) \ldots (9-m_2)(10-m_1) \end{array}$$

$m_1 \neq 0$

Тогда сумма цифр разом равна $\underbrace{9 + \ldots + 9}_{74} + 10 - 1 = 76 \cdot 9$.

Но домножая на степень десяти — приписываем нули $\Rightarrow S(99\ldots9m) = 76 \cdot 9$.
(S не меняется)

ЧТД

№3

$$\begin{cases}(xy+2x-y-2)|y-x-20| = (x-4)|xy+2x-y-2| \\ \sqrt{y-x+8} = y-5\end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{cases}xy+2x-y-2>0 \\ y-x-10 = x-4 \\ x\geq 4\end{cases} \quad \begin{cases}xy+2x-y<0 \\ y-x-20 = y-x \\ \cancel{y \geq x \geq 0}\end{cases} \quad xy+2x-y-2=0\right.$$

$$y-x+8 = y^2-20y+28$$

$$y \geq 5$$

$\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{cases}(x-1)(y+2)>0 \\ x = \frac{y-6}{2} \\ x\geq 4\end{cases} \quad \begin{cases}(x-1)(y+2)<0 \\ y=14 \\ x\leq 4\end{cases} \quad \begin{matrix}x=1 \\ y=-2\end{matrix}\right.$$

$$x = -y^2+11y-18 = (y-5)^2+y-8$$

$$y\geq 5$$

$\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{cases}(x-1)(y+2)>0 \\ x=\frac{y-6}{2} \\ y-6 = -2y^2-22y-34 \\ y\geq 5 \\ x\geq 4\end{cases} \quad \begin{cases}(x-1)<0 \\ x\leq 4 \\ x = 4y^2+11\cdot 14-14\end{cases} \quad x-1\right.$$

$+$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{cases}x=-61 \\ y=14\end{cases} \quad \begin{cases}y\geq 5 \\ x\geq 4 \\ x=\frac{y-6}{2} \\ 2y^2+23y+28=0\end{cases}\right.$$

$$\begin{cases}y^2-11y-17 = 1-x \\ y>8\end{cases} \quad y = \left[\begin{matrix}20 \ \emptyset \\ 1{,}5 \ \emptyset\end{matrix}\right.$$

$$\left[\begin{cases}x=-61 \\ y=14\end{cases} \quad \begin{cases}x=1 \\ y^2-11y+18=0 \\ y\geq 5\end{cases}\right. \quad (y-2)(y-9)$$

$\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{cases}x=-61 \\ y=14\end{cases} \quad \begin{cases}x=1 \\ y=9\end{cases}\right.$$

Ответ:

116 =

14

20 · 7,4

20 · 7,4

Черновик!

64 63

$\times$ 999
63
63
6993

9999
23
29997
19998
229977

Итого

$+$ 999|0
999
089

$\times 999 \cdot k$

Пусть: $a_n = 0$

$a_{n+1} = 9$

$(1000-1) \cdot a_1 \ldots a_n$

и

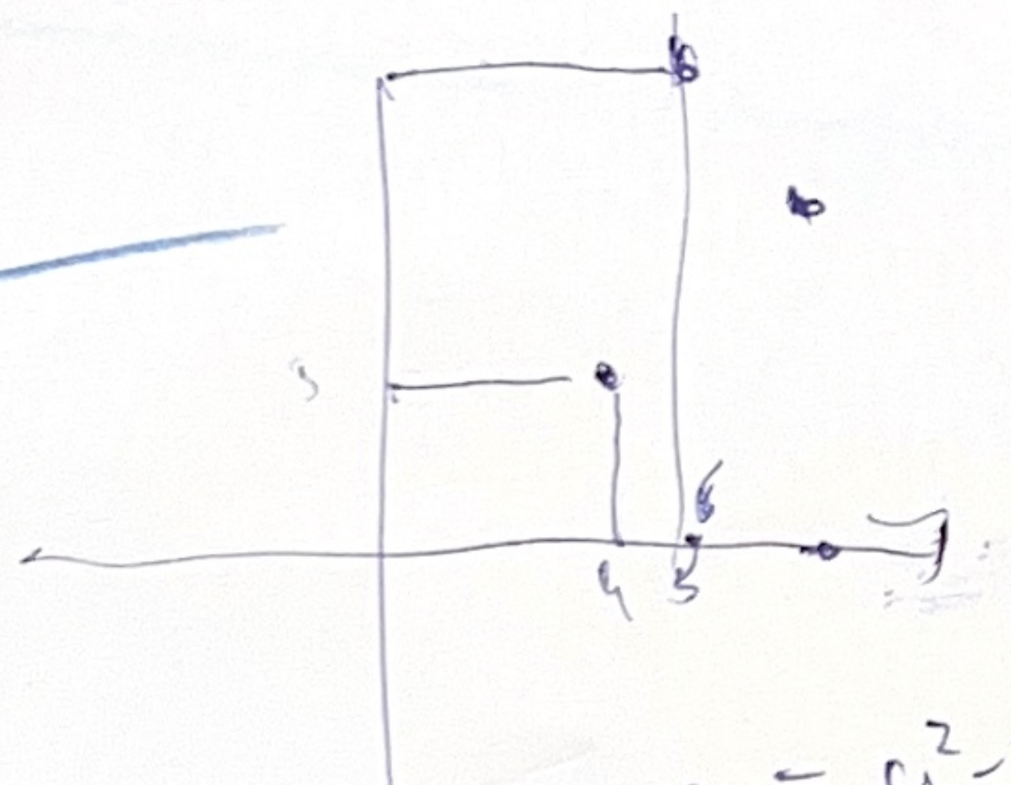
$a_1 \ldots a_n a_1 \ldots a_n$

0 0 0 0 0

$a_1\ a_2\ a_3\ a_{n-1}\ a_n$

$9 - a_n$

$\boxed{y > 5}$



$y - x + 8 = y^2 - 10y + 5$

$-y^2 + 11y + 3 = x$

$\begin{cases} xy + 2x - y - z > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$

$y - x - 10 = x - 4$

$\boxed{x = \frac{y-6}{2}}$

Черновик

$\frac{5!}{2\cdot 2\cdot 1} = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$

$\frac{6!}{2!4!} = \frac{5\cdot 6}{2} =$

Пусть разложение:

$a\cdot 20 + b\cdot 26 + c\cdot 38 + d\cdot 37 = 60+35 = 95$

mod 20

$b\cdot 3 + c\cdot 8 + d\cdot 7 = 5$

mod 5

$3b + 3c + 2d \equiv 0$

$3(b+c) \equiv 3\cdot d$

$(b+c) \underset{5}{\equiv} d$

Т.к. $5\cdot 13 = 65$

$6\cdot 13 + 37 > 95$

78

Поэтому или $b+c = d$

или $b+c = 5$

$d = 0$

$900 + 270 + 150 =$

$= 1320$

$1050 + 270$

150

$8 + 96 + 54 + 3 - 1052 \quad 96 = 19\cdot 5$

161

$a\cdot 10 + b\cdot 13 + d\cdot 3\cdot 7 \underset{19}{\equiv} 0$

$a\cdot 20 - 6b + d$

$213a + 27b + 2(13+27)c + 2(13+27)d$

$2(13a + 27b + (13+27)(c+d))$

$13 = \pi r_1 \; ; \; 27 = \pi r_2$

$13 + 27 = \pi(r_1 + r_2)$

$\frac{13}{5} ; \frac{27}{13} ; \frac{40}{19}$

$V_{max} = \frac{13}{5}$ км/мин $\quad S_{max} = 95\cdot\frac{13}{5} = 19\cdot 13$ км $=$

$19 \cdot 13 = 247$

$V_{min} = \frac{40}{19}$ км $\quad S_{min} = \frac{95\cdot 40}{19} = 40\cdot 5 = 200$

$x \in [200 - 247]$

$x = 2\cdot(13k + 27l +$

$x = \boxed{\frac{m^2}{98}}$

$96 - 37 = 58$

$x^2 + (2m-8)x + \frac{m^2}{64} - \frac{m^4}{64}$

$(2m-8)\frac{m^2}{8}$

$20a + 26b + 38c + 37d = 95$

$6b + 8c + 7d \underset{10}{\equiv} 5$

$\Downarrow$

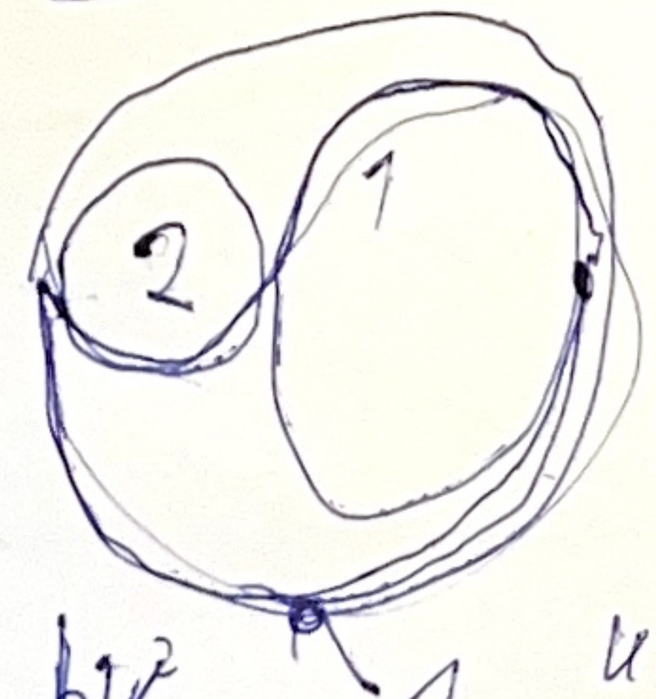
d нечет $\Rightarrow \boxed{d = 1}$

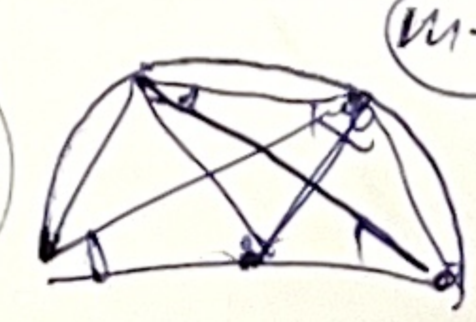
$20a + 26b + 38c = 58$

$\Downarrow$

$c = 1 ; a = 2$

$x^2 + (2m-8)x + (m^2 - 8m)$





$\sqrt{212}$

$k_M = 2\cdot 26 + 2\cdot(13+27)\cdot 2 = 4(26+27)$

53

$m = 6k^2$

$k = \sqrt{\frac{m}{6}}$

$g'(0) = f'(f \dots x) \cancel{\times} f' \dots \cancel{\times} f'(x)$

$f(0) = f\left(\frac{-1+1}{-1-1}\right) = \frac{1}{-2}$

$(f(g(x)))' = (v(x))'$

$\parallel$

$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$\Rightarrow f'(g(x)) = \frac{v'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

$\parallel$

$\frac{-1+1}{-1+1}$

$f'(\forall x) = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2^{20}}$

Д-во $\boxed{f(x) \neq 1}$

$\frac{x+1}{x-1} = a$

$\Downarrow$

$x+1 = a(x-1)$

$\Updownarrow$

$(a-1)x = a+1$

$x = \frac{a+1}{a-1}$

$x-1 = \frac{2}{a-1}$

$\frac{1}{x-1} = \boxed{\frac{a-1}{2}}$

$f(a) = \frac{a-1}{2}$; $a \neq 1$

$f(a)$ не очень