0 188685 120005

18-86-85-12
(40.61)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Якупова Динара Эмировича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«25» 02 2024 года

Подпись участника

Итоговая оценка:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
12	0	12	8	12	12	0	0	56

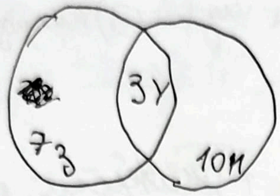
18-86-85-12 (40.61)

Черновик №1.

① Нужно: 1 вратарь, 2 защитника, 3 нападающих.
Есть: 3 вратаря, 4 з, 7 нап, 3 у.

~~1)~~ Одного из трёх вратарей: $\boxed{3}$

~~2) двух из ... 7 защ.~~



2з 3н

1) Среди защитников нет универсалов:

$$\boxed{C_4^2 \cdot C_{10}^3} = \frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2} = \frac{4\cdot\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{10\cdot9\cdot8}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = \boxed{720}$$

2) Среди защитников 1 универсал:

$$\boxed{3\cdot4\cdot C_9^3} = \cancel{3}\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\frac{9\cdot8\cdot7}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 9\cdot8\cdot7\cdot2 = 72\cdot2\cdot7 = \boxed{1008}$$

3) Среди защитников 2 универсала:

$$\boxed{C_3^2\cdot C_8^3} = 3\cdot\frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 8\cdot7\cdot3 = 8\cdot21 = \boxed{168}$$

$$3(720+1008+168) = 3(1896) = \boxed{5688}$$

③ $\begin{cases}(xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4| \\ \sqrt{y-x+10} = y-3\end{cases}$

$xy+4x-y-4 = 4(x-1)+y(x-1) = (x-1)(y+4)$.

$(x-1)(y+4)|y-x-8| = (x-4)|x-1||y+4|$ $\boxed{y\ge3}$

1) $x\ge1,\ y\ge-4$: $(x-1)(y+4)|y-x-8| = (x-4)(x-1)(y+4)$

$(x-1)(y+4)(|y-x-8|-(x-4)) = 0$.

$x=1$: $\sqrt{y+9} = y-3$; $y+\cancel{9} = y^2-6y+\cancel{9}$; $y^2-7y=0$; $y=0,\ y=7$.

$y\ne0$. $\boxed{y=7,\ x=1}$

Чистовик №1.

(1) Кол-во способов выбрать одного вратаря из 3-х = $\boxed{3}$.

1) если среди защитников нет универсалов, то кол-во способов равно кол-ву способов выбрать 2х защитников из 4х и 3 нападающих из (7+3) нападающих.

$= C_4^2 \cdot C_{10}^3 = \boxed{720}$

2) если среди защитников ровно 1 универсал, то выбираем одного универсала, 1 обычного защитника и 3 из (7+2) нападающих $= 3 \cdot 4 \cdot C_9^3 = \boxed{1008}$

3) Если среди защитников ровно 2 универсала, то рассуждая аналогично, получим $C_3^2 \cdot C_8^3 = \boxed{168}$

Итого, т.к. вратаря выбирают независимо, получим

$3 \cdot (720 + 1008 + 168) = 3 \cdot 1896 = \boxed{5688}$.

Ответ: 5688.

(3) Заметим, что $xy + 4x - y - 4 = (x-1)(y+4)$.

Тогда по св. модуля т.к. $y - 3 \geq 0$ (из 2-го уравнения)

$|xy + 4x - y - 4| = (y+4)|x-1|$ (т.к. $y + 4 \geq 7$)

Тогда $(y+4)(x-1)|y-x-8| = (x-4)(y+4)|x-1|$

при $y = -4$ реш. нет (т.к. $y \geq 3$), тогда $y + 4 \neq 0$ и на него можно поделить

Рассмотрим 2 случая:

1) $x = 1$: $0 = 0$ - верно, $\sqrt{y+9} = y - 3$; $y + 9 = y^2 - 6y + 9$; $y(y-7) = 0$; $y = 0$ или $y = 7$. $y = 0$ не подходит ($y \geq 3$), $y = 7$ подходит: $\boxed{x = 1, y = 7}$ - решение.

2) $x \neq 1$. Тогда $x - 1 \neq 0$; $|y - x - 8| = \pm(x-4)$.

Равносильный переход:

$$\left[\begin{array}{l} y - x - 8 = x - 4 \\ y - x - 8 = -x + 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2x + 4 \\ y = 12 \end{array}\right.$$

см. продолжение

18-86-85-12 (40.61)

Черновик №2. Продолжение №3:

если $y = 12$, то $\sqrt{22-x} = 9$; $22-x = 81$; $x = 22-81 = -59$

т.к. $|12+59-8| = 63$ $= 4-x = 63$ - верно,

$\boxed{x=-59,\ y=12}$ решение.

если $y = 2x+4$, то $\sqrt{2x+4-x+10} = \sqrt{x+14} = 2x+1$;

$x+14 = 4x^2+4x+1$; $4x^2+3x-13 = 0$; $D = 9+16\cdot 13 = 217$.

$2x+4 = y \geq 3$; $2x+4 \geq 3$; $2x \geq -1$; $x \geq -\frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{-3-\sqrt{217}}{8} < \frac{-3-\sqrt{196}}{8} = \frac{-3-14}{8} = -\frac{17}{8} < -\frac{1}{2}$ — не подходит.

$x_2 = \frac{-3+\sqrt{217}}{8} > \frac{11}{8} > -\frac{1}{2}$ — подходит.

$y = 2x+4 = \frac{-3+\sqrt{217}}{4} + 4 = \frac{13+\sqrt{217}}{4}$.

$x = \frac{-3+\sqrt{217}}{8}$, $y = \frac{13+\sqrt{217}}{4}$ — ~~решение, т.к.~~ не решение, т.к.

$|y-x-8| = \cancel{x-4}$ $(x>1)$

$|y-x-8| = |2x+4-x-8| = |x-4| = x-4$;

$|x-4| = 4-x = x-4$; $x = 4 \neq \frac{-3+\sqrt{217}}{8}$.

Ответ: $(1; 7)$, $(-59, 12)$.

Черновик №2.

$x=4$: $|y-x-8|=0$; $y-4-8=0$; $y=12$.

$\sqrt{22-x}=9$;

5) $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=\frac{2}{x-2}$; $\frac{x+2}{x-2}=t$; $x+2=tx-2t$;

$tx-x=2t+2=2(t+1)$; $x(t-1)=2(t+1)$;

$x=2\left(\frac{t+1}{t-1}\right)$ $\frac{2t+2}{t-1}+2=\frac{2t+\cancel{2}+2t-\cancel{2}}{t-1}=4\frac{t}{t-1}$;

$x-2=\frac{2t+2-2t+2}{t-1}=\frac{4}{t-1}$; $\frac{4t}{t-1}\cdot\frac{t-1}{4}=t$.

$f(t)=2\cdot\frac{(t-1)}{4}=\frac{t-1}{2}$; $\boxed{f(t)=\frac{t-1}{2}}$; $\boxed{f(x)=\frac{x-1}{2}}$

$f(f(x))=\frac{\frac{x-1}{2}-1}{2}=\frac{x-1-2}{4}=\frac{x-3}{4}=y$;

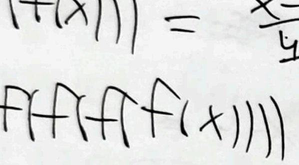
$f(f(f(x)))=\frac{\frac{x-3}{4}-1}{2}=\frac{x-3-4}{8}=\frac{x-7}{8}$ — 3 итерации

$f(f(f(f(x))))=\frac{\frac{x-7}{8}-1}{2}=\frac{x-15}{16}$ — 4 итерации.

$\underbrace{f(f\ldots\ldots(x)))}_{12\ раз}=\frac{x-(2^{12}-1)}{2^{12}}=g(x)=\frac{x}{2^{12}}-\frac{(2^{12}-1)}{2^{12}}$.

$g'(x)=\frac{1}{2^{12}}=\frac{1}{4096}$. По индукции!

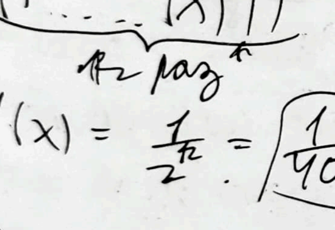
6)

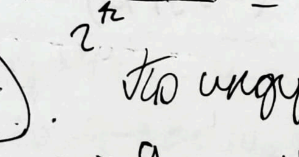


$a=9$; $y=9-bx^2$;

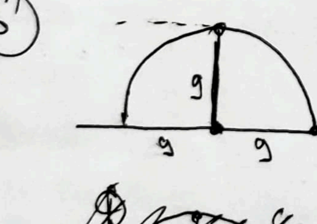
$x=9, y=0$: $bx^2=9$; $b\cdot 9^2=9$;

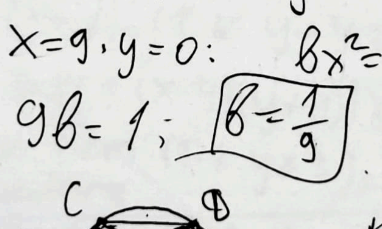
$9b=1$; $\boxed{b=\frac{1}{9}}$ $\boxed{y=9-\frac{x^2}{9}}$





$y=9$

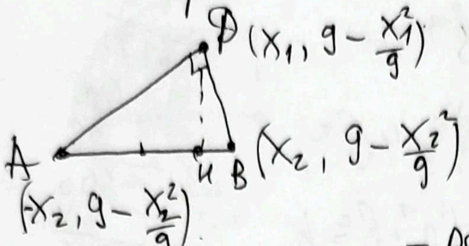




$9-\frac{x_1^2}{9}$

$9-\frac{x_2^2}{9}$

Черновик №3.



DH? $DH = \frac{AD \cdot BD}{AB}$.

$AB = 2x_2$;

$BD = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (9 - \frac{x_2^2}{9} - 9 + \frac{x_1^2}{9})^2}$

$= BD = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (\frac{x_2^2}{9} - \frac{x_1^2}{9})^2} =$

$= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (x_2-x_1)^2(x_2+x_1)^2 \cdot \frac{1}{81}} =$

$= \sqrt{x_2-x_1}\sqrt{x_2-x_1+\frac{x_2+x_1}{81}} = \sqrt{x_2-x_1}\sqrt{\frac{82x_2-80x_1}{81}}$

$= \frac{1}{9}\sqrt{x_2-x_1}\sqrt{82x_2-80x_1}$

$AD = \sqrt{(x_1+x_2)^2 + (\frac{x_2^2-x_1^2}{9})^2} = \sqrt{(x_1+x_2)^2 + \frac{1}{81}(x_1+x_2)(x_2-x_1)}$

$= \sqrt{x_1+x_2}\sqrt{x_1+x_2+\frac{x_2-x_1}{81}} = \frac{1}{9}\sqrt{x_1+x_2}\sqrt{80x_1+82x_2}$

$AD^2 + BD^2 = 4x_2^2$;

$\frac{1}{81}(x_2-x_1)(82x_2-80x_1) + \frac{1}{81}(x_2+x_1)(82x_2+80x_1) = 4x_2^2$;

$x_1 = a, x_2 = b$;

$(b-a)(82b-80a) + (b+a)(82b+80a) = 364b^2$.

$82b^2 - \cancel{82ab} - \cancel{80ab} + 80a^2 + 82b^2 + \cancel{82ab} + \cancel{80ab} + 80a^2$

$= 164b^2 + 160a^2 = 364b^2$; $160a^2 = 200b^2$; $| : 40$;

$4a^2 = 5b^2$; $a, b > 0$; $2a = \sqrt{5}b$; $2x_1 = \sqrt{5}x_2$;

Неправильно!

$BD = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + \frac{1}{81}(x_2-x_1)^2(x_2+x_1)^2} =$

$= (x_2-x_1)\sqrt{1+(\frac{x_2+x_1}{9})^2}$.

$AD = (x_2+x_1)\sqrt{1+(\frac{x_2-x_1}{9})^2}$.

$(x_2-x_1)^2(1+(\frac{x_2+x_1}{9})^2) + (x_2+x_1)^2(1+(\frac{x_2-x_1}{9})^2) = 4x_2^2$;

$x_2 = b$, $x_1 = a$. $(b-a)^2(1+\frac{(a+b)^2}{81}) + (b+a)^2(1+\frac{(b-a)^2}{81})$.

$(b-a)^2 = k$, $(b+a)^2 = m$;

$k(1+\frac{m}{81}) + m(1+\frac{k}{81}) = k + \frac{km}{81} + m + \frac{km}{81} =$

$= k + m + \frac{2km}{81}$;

Черновик №4:

$(b-a)^2+(b+a)^2+\frac{((b-a)(b+a))^2}{81}=4b^2;$ $\quad 68\cdot 9 = 612$

$b^2-2ab+a^2+b^2+2ab+a^2+\frac{(b^2-a^2)^2}{81}=4b^2;$ $\quad 612-36=600$; $600-24=576$

$2(a^2+b^2)+\frac{(b^2-a^2)^2}{81}=4b^2;$ $\begin{cases} a^2+b^2=k \\ b^2-a^2=m \end{cases}$

$\cancel{2k}+\frac{m^2}{81}=\cancel{2k}+2m;$ $\quad 2(k+m)=4b^2;$

$\frac{m^2}{81}=2m;$ $\quad m=0:\ b^2=a^2;$ - нет;

$\frac{m}{81}=2;$ $\quad m=162;$ $\quad b^2-a^2=162.$

$\boxed{x_2^2-x_1^2=162}$; $AD\cdot BP=(x_2^2-x_1^2)\sqrt{\left(1+\frac{(x_2^2+x_1^2)^2}{81}\right)\left(1+\frac{(x_2^2-x_1^2)}{81}\right)}$

$162=81\cdot2=9\cdot9\cdot2:$ $\quad 18\sqrt{(81+(x_2+x_1)^2)(81+(x_2-x_1)^2)}.$

$18\sqrt{9^4+9^2((x_2-x_1)^2+(x_2+x_1)^2)+(\underbrace{x_2^2-x_1^2}_{162^2})^2}$ $\quad 24^2=3\cdot8^2;$

$8a^2+64a+81;$

$8(a^2+8a+16)$

$x_1^2=x_2^2-162.$ $\quad \cancel{x_2^2-x_1^2+x}$

$x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=2(x_1^2+x_2^2);$

$x_1^2+x_2^2=2x_2^2-162=2(x_2^2-81).$ $\quad 9^2\cdot2^2=76$

$18\sqrt{9^4+9^2\cdot2(x_2^2-81)+9^4\cdot2^2}=162\sqrt{81+2x_2^2-\cancel{162}+\cancel{162}}$

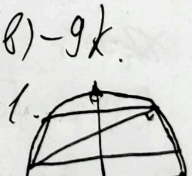
$162\sqrt{2x_2^2+81}$?

$4x=2x_2$

$S(n);$ $\quad S(mn)=S(n);$

$S(a+b)=S(a)+S(b)-9k.$

$ab>a+b;$ $\quad ab-a-b+1>1;$ $\quad (a-1)(b-1)>1.$



$S(a+b)\le S(a)+S(b);$ - - - - - -

$S(n)\ge1;$ $\quad m\cdot n$ $\quad S(2n)=S(n)?$ $\quad m\cdot n=\underbrace{n+n+n+\dots+n}_{m}$

$S(m\cdot n)=S(n)+S((m-1)n)-9k=S(n);$ $\quad 10\dots08$

$S((m-1)n)=9k;$ $\quad (m-1)n\,\vdots\,9;$ $\quad \boxed{n\,\vdots\,9}$ $\quad =(1\dots8)$

$S(2n)=S(n)+S(n)-9k=S(n);$ $\quad S(n)=9k.$ $\quad =2\dots16$

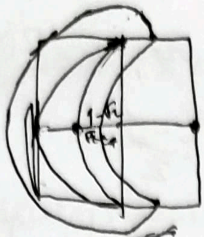
$5\dots4$

$2\cdot(5\dots4)=10\dots08.$ k - кол-во переходов

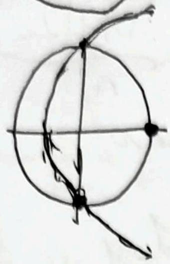
Черновик № 5:

~~$1+\sqrt2-\sqrt2$~~ ~~$1-\sqrt2$~~ $1+1$ $\sqrt2-1,\ 1.$

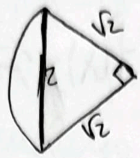
$1-\sqrt2+1 = 2-\sqrt2.$



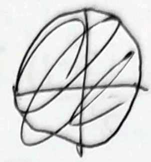
$S_{обычной}$?



$S_{сектора}$?



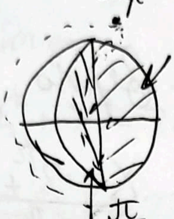
$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\sqrt2\cdot\sqrt2 = 1.$



$S_{2окр} = \pi\cdot(\sqrt2)^2 = 2\pi;$

$\frac{\pi}{2}-1;$ $\frac{1}{4}S_{окр}.$

$S_1 = \pi;$

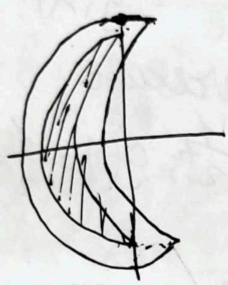


$\frac{\pi}{2}$

$\pi-1;$

$1-\pi+1 = \boxed{2-\pi}$

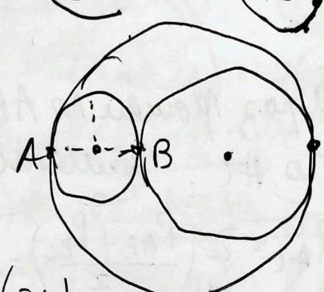
$\frac{\pi}{2}-1;$

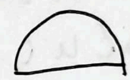


AB = 13км = 7мин

BC = 21км = 11мин

AC = 34км = 17мин.





$L_{окр} = 2\pi R;$

$\frac{L_{окр}}{2} = \pi R = 13;$

$R_1 = \frac{13}{\pi}.$

$R_2 = \frac{21}{\pi};$

$R_1+R_2 = R = \frac{1}{\pi}(34) = \frac{34}{\pi};$

$L_{окр} = 34$ км

1ч 25мин = 85мин; $7a+11b+17c = 85;$ $a\geq1$ $b\geq1;$

~~$a=b=c$~~ ~~$7a+11b : 17;$~~ $85 = 17\cdot5;$

~~$11b+24 = 11b-3 : 17;$~~ ~~$a=b;$~~ ~~$17a+17c = 85;$~~

$7a+11b+17c = 17\cdot5;$ $+68$, 17, 85 ~~$a+c=5$~~

$7a+11b : 17;$ $\boxed{b=4,\ a=1}$ $\boxed{c=2}$ нет $68 = 7a+11b;$ $\boxed{b=3,\ a=5}$ $\boxed{c=1}$ ✓

$c=0?: 7a+11b = 85;$ $85-66 = 19;$

$b=2,\ a=9,\ c=0$ $a=8$ нет

$2\cdot2^n = 2^{n+1}$

Чистовик №3:

(5) Пусть $\frac{x+2}{x-2}=t$. Тогда $x+2=tx-2t$; $x=\frac{2(t+1)}{t-1}$.

Отсюда $f(t)=\frac{2}{\frac{2(t+1)}{t-1}-2}=\frac{1}{\frac{t+1}{t-1}-1}=\frac{1}{\frac{t+1-t+1}{t-1}}=\frac{t-1}{2}$.

Докажем по индукции, что $\underbrace{f(f(\ldots(x))\ldots)}_{n}=$

$=\frac{x-(2^n-1)}{2^n}$. База $n=1$: $f(x)=\frac{x-1}{2}$ - верно.

Переход: $\underbrace{f(f(\ldots(x))\ldots)}_{n+1}=\frac{\frac{x-2^n+1}{2^n}-1}{2}=$

$=\frac{x-2^n+1-2^n}{2^{n+1}}=\frac{x-(2^{n+1}-1)}{2^{n+1}}$ - верно. □

Тогда $\underbrace{f(f\ldots(x))\ldots)}_{\cancel{n}\,k}=\frac{x-2^k+1}{2^k}=g(x)$.

Тангенс угла наклона в $x=0$ равен значению производной в этой точке. $g'(x)=\frac{1}{2^k}$, $g'(0)=\frac{1}{2^k}$.

Ответ: 2^{-k}.

(4) Пусть автомобиль a раз проехал по AB (или BA), b раз по BC и c раз по AC. Заметим, что $R_{AB}=\frac{13}{\pi}$; $R_{BC}=\frac{21}{\pi}$; $R_{AC}=2\left(\frac{R_{AB}+R_{BC}}{\pi}\right)=\frac{34}{\pi}$, т.е. $AC=34$ км.

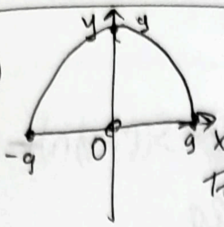
Тогда $7a+11b+17c=85$ (в минутах).

Заметим, что все три переменные a, b и c должны быть нечетными, т.к. 85 нечетно, а любое чётное движение по окружности приводит в ту же точку. Несложным перебором получим решение $a=5$, $b=3$, $c=1$. Тогда автомобиль проехал

$5\cdot13+3\cdot21+34=65+66+34=165$ км.

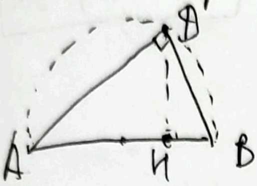
Ответ: 165 км.

Чистовик №4

(6) 

Введем систему координат Oxy (см. рис.)
Тогда парабола проходит через $(0;9)$ и $(9;0)$.
Тогда $a=9$, $b=\frac{1}{9}$, $\boxed{y=9-\frac{x^2}{9}}$

Рассмотрим $\triangle ABD$:



$A(-x_2;\ 9-\frac{x_2^2}{9})$, $B(x_2;\ 9-\frac{x_2^2}{9})$
$D(x_1;\ 9-\frac{x_1^2}{9})$

По условию $AD^2+BD^2=AB^2$.

$AD^2=(x_1+x_2)^2+\left(\frac{x_2^2-x_1^2}{9}\right)^2$; $BD^2=(x_2-x_1)^2+\left(\frac{x_2^2-x_1^2}{9}\right)^2$

$AB^2=4x_2^2$. Тогда

$x_1^2+\cancel{2x_1x_2}+x_2^2+x_1^2-\cancel{2x_1x_2}+x_2^2=2(x_1^2+x_2^2)$;

$x_1^2+x_2^2+\left(\frac{x_2^2-x_1^2}{9}\right)^2=2x_2^2$. Пусть $\begin{cases}x_1^2=a\\x_2^2=b\end{cases}$.

$a+b+\frac{(b-a)^2}{81}=2b$ (*);

$\boxed{DH}$ — высота в $\triangle ABD$ ⇒ $DH=\frac{AD\cdot BD}{AB}$.

$\boxed{\rho(AB;CD)=DH}$

(*): $a+\frac{(b-a)^2}{81}=b$; $\frac{(b-a)^2}{81}=(b-a)$;

$b\neq a$; $\frac{b-a}{81}=1$; $b-a=81$; $\boxed{x_2^2-x_1^2=81}$

$AD^2=2x_2^2-\cancel{81}+2x_1x_2+\cancel{81}$; $BD^2=2x_2^2-81-2x_1x_2+81$.

$AD^2=2x_2^2+2x_1x_2=2x_2(x_1+x_2)$;

$BD^2=2x_2(x_2-x_1)$. $AD^2\cdot BD^2=4x_2^2\cdot 81=324x_2^2$;

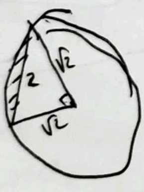
$AD\cdot BD=18x_2$; $\rho(AB;CD)=\frac{AD\cdot BD}{AB}=\frac{18x_2}{2x_2}=\boxed{9}$

Ответ: 9.

Чистовик №5:

(1) Заметим, что $S(mn)=S(n)+S((m-1)n)-9k$, где k - кол-во переходов через разряд.
Тогда $S((m-1)n)-9k+S(n)=S(n)$; т.е. $\boxed{S((m-1)n)=9k}$
$\Rightarrow \boxed{n \vdots 9}$

(2) Площадь области без раздувания равна $S_{\text{мал}} - S_{\text{сектор большой}}$. $S_{\text{мал}}$, очевидно, $=\pi$.
$S_{\text{сектор большой}}$: (прям угол, т.к. вершина т, Пиф.)



$\frac{S}{4} - S_\Delta = \frac{\pi}{2} - 1$. ~~Тогда~~ $\frac{S_{\text{мал}}}{2} = \frac{\pi}{2}$.

~~$S_{\text{без раздувания}} = \pi - \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi}{2} + 1$~~

Тогда $S_{\text{без раздувания}} = \boxed{2-\pi}$,
т.к. $1-\frac{\pi}{2}+1-\frac{\pi}{2} = 2-\pi$.