



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 10

Место проведения Москва  
город

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

Олимпиада школьников Ломоносов  
наименование олимпиады

по математике  
профиль олимпиады

Грыкина Евгения Павловна  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата  
«25» февраля 2024 года

Подпись участника  
JK

**Итоговая оценка:**

1	2	3	4	5	6	7	8	$\Sigma$
4	8	4	12	12	12	4	0	56

40

N1

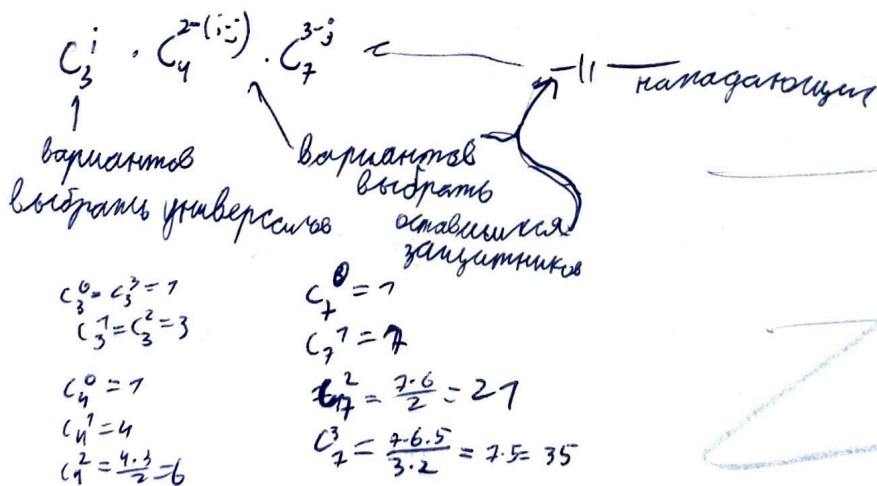
кол-во способов выбрать шестёрку = 3. кол-во способов выбрать пятерку (без вратаря)

↑ кол-во способов выбрать вратаря

кол-во способов выбрать пятерку

кол-во универсалов в пятерке	кол-во универсалов среди нападающих	кол-во пятерок
0	0	$C_3^0 \cdot C_4^2 \cdot C_7^3 = 1 \cdot 6 \cdot 35 = 210$
1	0	$C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_7^3 = 3 \cdot 4 \cdot 35 = 420$
1	1	$C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot C_7^2 = 3 \cdot 6 \cdot 21 = 378$
2	0	$C_3^2 \cdot C_4^0 \cdot C_7^3 = 3 \cdot 1 \cdot 35 = 105$
2	1	$C_3^2 \cdot C_4^1 \cdot C_7^2 = 3 \cdot 4 \cdot 21 = 252$
2	2	$C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot C_7^1 = 3 \cdot 6 \cdot 7 = 126$
3	0	невозможен м.к. среди защитников <sup>всего 2</sup>
3	1	$C_3^3 \cdot C_4^0 \cdot C_7^2 = 1 \cdot 1 \cdot 21 = 21$
3	2	$C_3^3 \cdot C_4^1 \cdot C_7^1 = 1 \cdot 4 \cdot 7 = 28$
3	3	$C_3^3 \cdot C_4^2 \cdot C_7^0 = 1 \cdot 6 \cdot 1 = 6$

если в пятерке  $i$  универсалов из которых  $j$  среди нападающих ( $j \leq i, j \leq 3, i-j \leq 2$  (м.к. защитников  $\geq 2$ )), то всего таких <sup>пятерок</sup>



всего вариантов  $210 + 420 + 378 + 105 + 252 + 126 + 21 + 28 + 6 = 1546$   
 шестёрок =  $7 \cdot 1546 = 4638$

Ответ: 4638 вариантов

N 2

$R=1$  - радиус <sup>дуги</sup> окружности с центром в  $(0; 0)$   
 $r=\sqrt{2}$  - радиус <sup>окружности</sup> центра  $(1; 0)$

$O_1 = (0; 0)$   
 $O_2 = (1; 0)$

$r_0 = 0,25$  - радиус <sup>внутренней</sup> окружности

"внешней", "левой" <sup>окружности</sup> радиуса  $R+r_0$  (см. рис. 1)

Если мы нарисуем <sup>через</sup> дугу радиуса  $R$  будет краска (т.к. <sup>дуги</sup> радиуса  $R$  <sup>и</sup> дуги радиуса  $r$  <sup>расходятся</sup> в  $O_1$  и <sup>данную</sup> точку <sup>дуги</sup> радиуса  $R$  <sup>расстояние</sup>  $r_0$ )

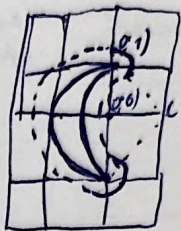
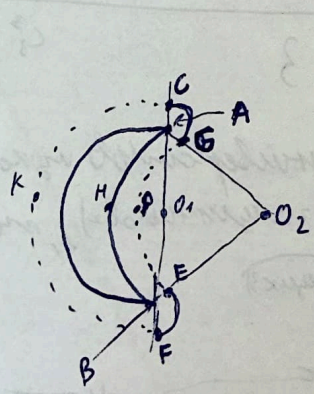
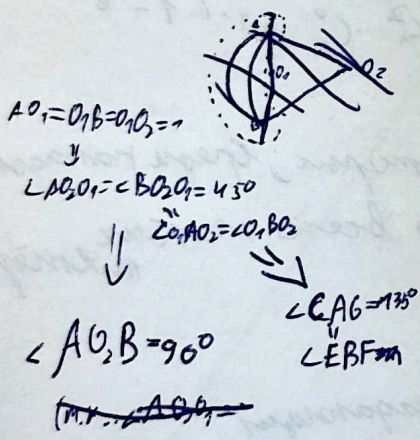


рис. 1

аналогично с дугой радиуса  $r-r_0$  с центром в  $O_2$  ("внутренней" <sup>правой</sup> окружности нарис. 1)

также на <sup>краску</sup> радиуса  $r_0$  от точек  $A(0; 1)$  и  $B(0; -1)$  будут на расстоянии  $r_0$  от <sup>этих</sup> точек <sup>А и В</sup> (рис. 1)

следовательно 2 <sup>радиуса</sup> с <sup>предыдущих</sup> шагов <sup>дуги</sup> с центром в  $A$  и  $B$  радиуса  $r_0$ , мы получим <sup>получившиеся</sup> фигуру <sup>площадь</sup> равна  $\frac{\pi}{4}$



$S$  - общая площадь

$$S = S_{CKFO_1} - (S_{O_2AKB} - S_{\Delta O_2AB}) + S_{AKBERG} + 2S_{ABC}$$

(т.к.  $S_{AKC} = S_{BEF}$  в силу симметрии)

$$S_{CKFO_1} = \frac{\pi(R+r_0)^2}{2}$$

$$S_{\Delta O_2AB} = \frac{1}{2} \cdot O_2O_1 \cdot AB = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

$$S_{AKBERG} = \pi(r^2 - (r-r_0)^2) \cdot \frac{\angle AOB}{360^\circ} = \frac{\pi(1^2 - 0.75^2)}{4}$$

$$S_{O_2AKB} = \pi r^2 \cdot \frac{\angle AOB}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 2}{4}$$

$$S_{ABC} = \pi r_0^2 \cdot \frac{\angle CAG}{360^\circ} = \frac{3\pi r_0^2}{8}$$

69-91-24-10  
(40.61)

№ 2

$$S = \pi \frac{(R+r_0)^2}{2} - \left(\frac{\pi r_0^2}{4} - \pi\right) + \pi \frac{(r_0^2 - 2r_0)}{4} + \frac{3\pi r_0^2}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} (2(R+r_0)^2 - r_0^2 - 2r_0 + 3r_0^2)$$

$$= \pi + \frac{\pi}{4} (2(R+r_0)^2 - 4r_0^2 - 2r_0 - r_0^2)$$

$$S = \pi + \frac{\pi}{4} (2 \cdot 7,25^2 + 4 \cdot 0,25^2 - 2\sqrt{2} \cdot 0,25 - 1,25^2) = \pi + \frac{\pi}{4} (1,25 \cdot 0,25)$$



№ 4

$A \rightarrow B$  7 минут

$B \rightarrow C$  11 минут

$A \rightarrow C$  17 минут

$A \rightarrow B \rightarrow C$   $7+11+7=35$  минут

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  - 35 мин

$A \rightarrow B \rightarrow A$  - 14 мин

$B \rightarrow C \rightarrow B$  - 22 мин  
( $C \rightarrow B \rightarrow C$ )

$A \rightarrow C \rightarrow A$  - 34 мин

1 ч 25 мин  $\Rightarrow$  85 минут

ответ

Все движения можно разбить  
на один круг  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  и ~~еще~~  
на целое до число кругов  $A \rightarrow B \rightarrow A$ ;  
 $B \rightarrow C \rightarrow B$ ;  
(или  $C \rightarrow B \rightarrow C$ )

длину  $AB = \pi \frac{AB}{2}$   
— | —  $BC = \pi \frac{BC}{2}$

— | —  $AC = \pi \frac{AC}{2} = \pi \frac{AB+BC}{2} = \frac{\pi AB}{2} + \frac{\pi BC}{2}$   
 $= 13+27=34$  км

85/2 и все кроме  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  : 2 (а вк или 1)



если 1 круг  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  и осталось  $85-35=50$  мин

если 1 круг  $A \rightarrow C \rightarrow A$  ( $34 \cdot 2 > 60 > 50$ )



если  
если

на  $B \rightarrow C \rightarrow B$  нужно 22 мин

если 1

осталось  $50-34=16$  мин

на  $B \rightarrow C \rightarrow B$  нужно  $22$  мин  $> 16$  мин

на  $C \rightarrow B \rightarrow C$  ( $22 \cdot 3 = 66 > 50$ )

или

на  $A \rightarrow B \rightarrow A$  нужно 14 мин, но  $16 < 14$  км

Больше вариантов нет, но  
получили противоречие

осталось 50 мин 50 : 14	осталось 28 мин 28 : 14	осталось 6 мин 6 : 14
-------------------------------	-------------------------------	-----------------------------

н.к. Больше вариантов нет,  
то получили противоречие

$\frac{28}{14} = 2$  круга  $A \rightarrow B \rightarrow A$

автоматически  
проехал  $13+27+34+2 \cdot 2 \cdot 13 =$   
 $= 34+34+42 \cdot 2 = 162$  км

40 км

Ответ: 162 км



№5

$$\frac{x+2}{x-2} = \frac{x-2+2+2}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}$$

найдем  $f(k)$  при  $k \neq 1$ 

$$k = 1 + \frac{4}{x-2}$$

$$x = \frac{4}{k-1} + 2$$

$$f(k) = \frac{2}{\left(\frac{4}{k-1} + 2\right) - 2} = \frac{2}{\frac{4}{k-1}} = \frac{k-1}{2}$$

обозначим за  $f_n(k) = \underbrace{f(f(\dots f(k)\dots))}_n$  - n-кратная вложенная функция

$$f_1(k) = \frac{k-1}{2}$$

$$\text{докажем, что } f_n(k) = \frac{k - (2^n - 1)}{2^n}$$

$$\text{База } n=1 \quad f_1(k) = \frac{k-1}{2} = \frac{k - (2^1 - 1)}{2^1}$$

итак пусть для  $n$  верно

$$f_{n+1}(k) = f(f_n(k)) = \frac{\frac{k - (2^n - 1)}{2^n} - 1}{2} = \frac{k - (2^n - 1) - 2^n}{2 \cdot 2^n} = \frac{k - (2 \cdot 2^n - 1)}{2 \cdot 2^n} = \frac{k - (2^{n+1} - 1)}{2^{n+1}}$$

Ч.Т.Д

$$\downarrow$$

$$f_{12}(x) = f_{12}(x) = \frac{x - (2^{12} - 1)}{2^{12}}$$

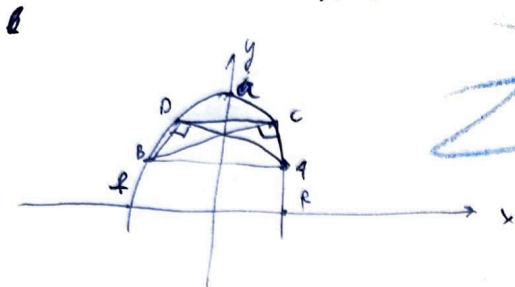
Ч.Т.Д

найти угол наклона касательной к графику  $y = g'(x) =$ 

$$= \left( \frac{x}{2^{12}} - \frac{2^{12}-1}{2^{12}} \right)' = \left( \frac{x}{2^{12}} \right)' - \left( \frac{2^{12}-1}{2^{12}} \right)' = \frac{x'}{2^{12}} = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4096}$$

$$\text{Ответ: } 2^{-12} = \frac{1}{4096}$$

№ 6



$$y = a - bx^2$$

$$x^2 = \frac{a-y}{b}$$

$y = a - bx^2$  симметрично относительно  $Oy$  ( $x=0$ )  
 высота  $y(0) = a = 9$

$$y(R) = 0$$

$$a - bR^2 = 0$$

$$bR^2 = a$$

$$R^2 = \frac{a}{b}$$

$$R = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (\text{или } -\sqrt{\frac{a}{b}} \text{ - другой край})$$

$$2R = \frac{18}{9}$$

$$R = 9$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = 9$$

$$\frac{a}{b} = 9^2$$

$$b = \frac{a}{9^2} = \frac{9}{9^2} = \frac{1}{9}$$

т.к.  $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$

$C, D$  - лежат на окружности с диаметром  $AB$  (радиус  $r$ )

т.к.  $AB \parallel Ox$ , то

а  $x_A = -x_B = x_1$       есть симметрия относительно  $Oy$ , то  
 $y_1 = y(x_1)$

$x_C = -x_D = x_2$        $y_2 = y(x_2)$

$$2r = x_A - x_B = 2x_1$$

$$r = x_1$$

$(y_2 - y_1)^2 + x_2^2 = r^2$  (уравнение окружности с центром в  $(0; y_1)$  для точки  $C$ )

$$(y_2 - y_1)^2 = x_1^2 - x_2^2 = \frac{a - y_1}{b} - \frac{a - y_2}{b} = \frac{y_2 - y_1}{b}$$

$y_2 - y_1 = 0$  (тогда  $A$  и  $C$  совпали и нет угла  $BCA$ )  
 $y_2 - y_1 = \frac{1}{b} = \frac{1}{1/9} = 9$

$y_2 - y_1$  - расстояние между точками

Ответ: 9



N 7

наибольшее натуральное число -  $10^{100} - 1 = \underbrace{99 \dots 99}_{100 \text{ цифр}}$

докажем что оно подходит

~~докажем~~  

$$m! = \underbrace{m + m + \dots + m}_m$$

$m=1 \rightarrow$   

$$\begin{array}{r} 9 \dots 99 \\ + 9 \dots 99 \\ \hline m=2 \rightarrow 19 \dots 98 \end{array}$$

при  $m \in 10$  ~~в конце~~ ~~послед~~

данные цифры просто проводят 1 цифра

$m=9$   

$$\begin{array}{r} 99 \dots 990 \\ - 99 \dots 990 \\ \hline 99 \dots 990 \\ + 99 \dots 990 \\ \hline m=10 \rightarrow 109 \dots 989 \end{array}$$

на данной шаге сумма не изменилась  
 в данных цифр провели +1 и слева сумма  
 цифр увеличилась на 8, справа  
 увеличилась на  $9 - 1 = 8$

нетрудно заметить что так будет дальше

в частности при  $m=n$

$$m! = 10^{100} \cdot (90^{100} - 1) - (10^{100} - 1)$$

Ответ:  $10^{100} - 1 = \underbrace{9 \dots 9}_{100 \text{ цифр}}$

$m=$   

$$\begin{array}{r} 99 \dots 980 \dots 01 \\ - 99 \dots 999 \\ \hline \end{array}$$

сумма  $99 \cdot 9 + 8 + 1 = 99 \cdot 9 + 9 = 100 \cdot 9$

N 3

$$\text{да } xy + 4x - y - 4 = (x-1)(y+4)$$

при  $x=1$  верхнее уравнение имеет вид  $0=0$

$$\sqrt{y-x+10} = y-3$$

$$\sqrt{y+9} = y-3$$

возведем в квадрат

$$y+9 = y^2 - 6y + 9$$

$$y^2 - 7y = 0$$

$$\begin{cases} y=0 & y-3 = -3 < 0 \Rightarrow \text{не подходит} \\ y=7 & y-3 = 4 > 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{y-x+10} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} = 4$$

при  $y=-4$  верхнее уравнение имеет вид  $0=0$

нижнее

$$\sqrt{6-x} = -7$$

не имеет корней (т.к.  $\sqrt{x} \geq 0$ )

при  $x \neq 1$  и  $y \neq -4$

$$|y-x-8| = (x+4) \frac{|xy+4x-y-4|}{|xy+4x-y-4|}$$

$$|y-x-8| = \text{знак}(x-1)(y+4) (x+4) \quad (*)$$

$$\sqrt{y-x+10} = y-3$$

$$y-x+10 = y^2 - 6y + 9$$

$$-x = y^2 - 7y - 1$$

$$x = -y^2 + 7y + 1$$

$$\text{знак}(x-1)(y+4) = -\text{знак}(y-7)(y+4)$$

$$\text{знак}(x-1)(y+4) = -\text{знак}(y(y-7)(y+4))$$

$$y-x-8 = y^2 - 6y - 9 = 0$$

$$x-4 = -y^2 + 7y - 3 = -(y^2 - 7y + 3)$$

(\*) принимает вид

$$|y^2 - 6y - 9| = (y^2 - 7y + 3) \text{знак}(y(y-7)(y+4))$$

$$y^2 - 6y - 9 = y^2 - 7y - 5 \quad \text{или}$$

$$y = 4$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{288 + 1} = 29 - 16 = 13}{-16 \pm \sqrt{288 + 1} = 29 - 16 = 13}$$

~~проверка~~  
 $x = 13$   
 $y = 4$



$$y^2 - 6y - 9 + y^2 - 7y - 5 = 0$$

$$2y^2 - 13y - 14 = 0$$

$$y^2 - 6y - 7 \neq 0$$

$$(y-7)(y+1) = 0$$

$$\begin{cases} y = 7 \Rightarrow x = -49 + 49 + 1 = 1 \\ y = -1 \Rightarrow x = -49 - 49 + 1 = -97 \end{cases}$$

$y = -1$  не подходит

$$\text{т.к. } \sqrt{y^2 - 7y + 10} = -1 - 3 = -4 < 0$$

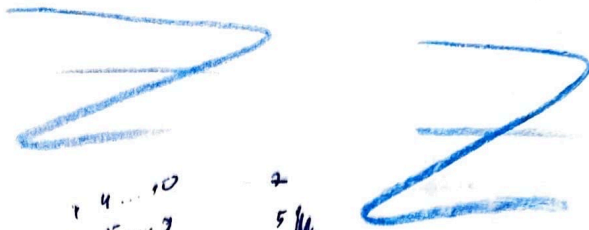
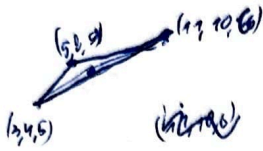
$$\begin{aligned} 7 - 3 &= 4 > 0 \\ 4 - 3 &= 1 > 0 \end{aligned}$$

Ответ:  $(3; 4)$

$(4; 7)$



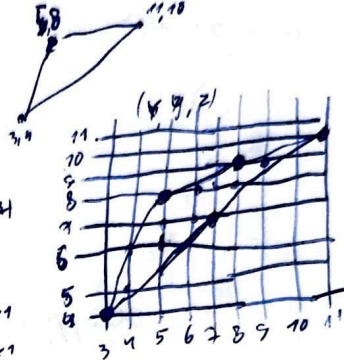
ИЕРМОВИК



1 4...10  
 4 5...7  
 2 6...8

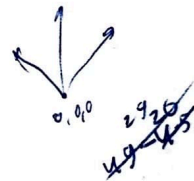


~~(2,4,4)~~ = (1,2,2)  
 (8,6,1)



1 → 2 101  
 2 → 4  
 3 → 6  
 4 → 8  
 5 → 1011  
 6 → 2 + 1  
 7 → 4 11  
 8 → 6 + 1  
 9 → 8 11

1. 9.00000  
 9. n n < 4.10<sup>10</sup>



700

100 град

9	999
19	456
9 0	990
10 9	989
11 9	766
19 9	980
20 9	779
34 9	706
44 9	809
100	01
999	999
999	00
999	000

10 9 ... 8 9

$y^2 - 7y + 5$

$(y - 3.5)^2$

$49 - 7y + 12.25$

$\frac{7}{2} = \frac{49}{4} = 10 + \frac{9}{4} = 10 + 2\frac{1}{4}$

$y^2 - 6y - 9$

$36 + 36$   
 $\sqrt{-36}$

$\frac{6 \pm 6\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 3\sqrt{2}$

$4 < 3(1 - \sqrt{2}) < 0$

$3(1 + \sqrt{2})$

$3(1 + \sqrt{2}) \approx 7$

$\sqrt{2} \approx 1 \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

$4 \approx 1 \frac{7}{9}$

$4.9 \approx 1 \frac{16}{9}$

ЦЕРКОВИК

$f(0) = f$

$f(1 + \frac{1}{k-2}) = \frac{2}{k-2}$

$f(k) = \frac{2}{k-2} = \frac{2}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k-2} = \frac{2(k-1)}{(k-1)(k-2)} = \frac{2}{k-2} = \frac{k-1}{k-2} \cdot \frac{2}{k-1}$

$k \neq 1$

$k-1 = \frac{4}{k-2}$

$1-2 = \frac{4}{k-1}$

$x = \frac{4}{k-1} + 2$

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10

125  
25  
40  
8

$x = \frac{4}{k-1} + 2$

$f(k) = \frac{k-1}{2}$

$F(f(k)) = \frac{k-1-1}{2} = \frac{k-2}{2} = \frac{k-2}{4}$

$f(f(f(k))) = \frac{k-3}{4}$

9.5  
19.5  
29.5  
39.5  
49.5  
59.5  
69.5  
79.5  
89.5  
99.5

$f(x) = \frac{x-k}{2} = \frac{x}{2} - \frac{k}{2}$

$f'(x) = (\frac{x}{2})' - (\frac{k}{2})' = \frac{1}{2}$

$f_n^{(n)} = f(f(\dots f(x)\dots)) = \frac{k-(2^n)}{2^n}$

$f_1(x) = \frac{k-(2^1)}{2^1} = \frac{k+(2-1)}{2} = \frac{k-1}{2}$

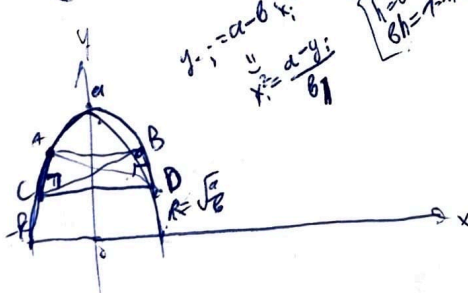
$f_n$  верно

$f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) = f(\frac{k-(2^n)}{2^n}) =$

$= \frac{k-(2^n)-1}{2} = \frac{k-(2^n-1)-2^n}{2 \cdot 2} = \frac{k-(2^{n+1}-1)}{2^{n+1}}$

$\frac{x \cdot b - x \cdot b}{b^2} = \frac{x \cdot b}{b^2} = \frac{x}{b}$

$(y_1 - y_2)^2 = z^2 - x^2 = \frac{(a-y)(a+y)}{b} = \frac{y_1 \cdot y_2}{b}$   
 $y_1 = a - b \cdot x_1^2$   
 $x_1^2 = \frac{a - y_1}{b}$   
 $AK = h$   
 $h = 1 - x_1^2 \Rightarrow$



$x_1^2 + b^2(x_1^2 + x_2^2)^2 = x_2^2$   
 $x_1(1-b) = x_2^2(1-b)$   
 $2b^2x_1^2 = (x_1^2 + x_2^2)(1-b) + 2bx_1x_2$   
 $x_1^2 + (y_1 - y_2)^2 = x_2^2$   
 $(x_1 - y_1 - (x_2 - y_2))^2$   
 $a - b \cdot x_1^2 - a + b \cdot x_2^2 = b(x_1^2 - x_2^2)$

$2r = 1b \rightarrow r = \frac{b}{2}$

$a = g$

$\frac{\sqrt{a}}{b} = r$

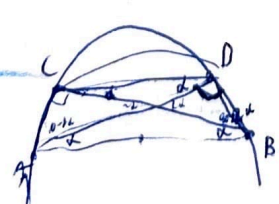
$b = \frac{a}{r^2} = \frac{a}{\frac{a}{b^2}} = \frac{a}{\frac{a}{b^2}} = b^2$

$x_1 = x_2 = x_3 = \dots$   
 $y_2 = y_3 = \dots$

$y_1 = y_2 = y_3 = \dots = \frac{b^2}{9}$

$y_2 = y_3 = y_4 = \dots = (n)$

$x \leq 9$   
 $y \geq 0$



$(0, y_2)$   
 $r = \frac{y_2}{2}$

