



66-32-82-93
(5.3)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 3

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по физике
профиль олимпиады

Добрянского Богдана Васильевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

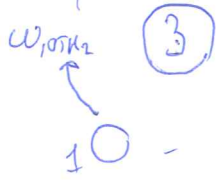
Дата

«9» февраля 2024 года

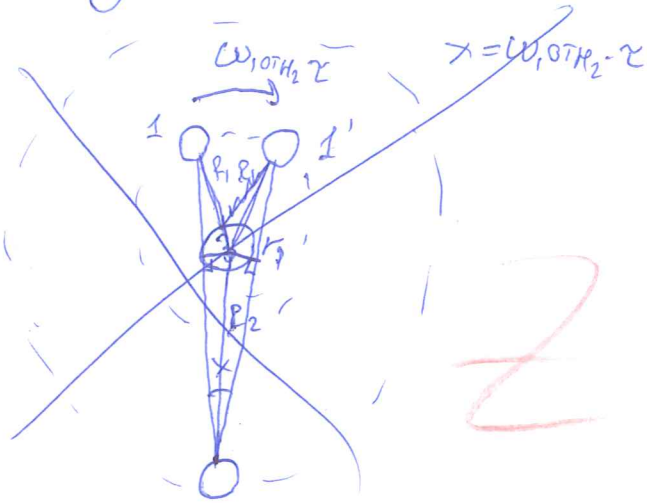
Подпись участника

Добрянского

Рассмотрим крайнее положение, когда лазер не проследит за собой Земли.



С 2 спутника.

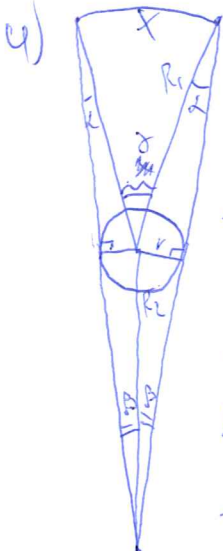


4) Решим теперь несимметричную задачу: пусть Земля и спутники будут ^{три} в

а) из геометрии $R_2 \sin \frac{x}{2} = r$, т.к. $x \ll 1$, то $\arcsin \frac{x}{2} \approx \frac{x}{2} \Rightarrow R_2 \cdot \frac{x}{2} = r$

~~$\frac{R_2 \omega_{отн2} \gamma}{2} = r \Rightarrow \gamma = \frac{2r}{\omega_{отн2} \cdot R_2} = \frac{2r}{(\omega_1 - \omega_2) \cdot R_2}$~~

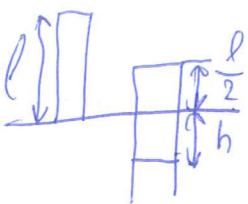
~~$\gamma = \frac{2r}{\left(\sqrt{\frac{GM}{R_1^3}} - \sqrt{\frac{GM}{R_2^3}}\right) \cdot R_2} = \frac{2r}{\sqrt{GM} \cdot \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3}\right) \cdot R_2}$~~



$r = R_2 \sin \beta = R_1 \sin \alpha \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{R_1}{R_2}$, т.к. $\sin \alpha = \frac{r}{R_1} < 1$,
 $\gamma = \omega_{отн2} \cdot \tau$, $\sin \beta = \frac{r}{R_2} < 1$,
 т.к. β и α малые \Rightarrow
 $\alpha \approx \beta = 360 - (2 \cdot (90 - \alpha) + 2 \cdot (90 - \beta)) \Rightarrow \sin \beta \approx \beta$
 $= 360 - (180 - 2\alpha + 180 - 2\beta) = 2\alpha + 2\beta$ ($\frac{\beta}{2} = \frac{R_1}{R_2}$)
 $\cdot (2\alpha + 2\beta) = \gamma$
 $\cdot (2 \cdot \frac{r}{R_1} + 2 \cdot \frac{r}{R_2}) = \omega_{отн2} \tau \Rightarrow$
 $2r + 2 \cdot \frac{R_1}{R_2} r = \omega_{отн2} \cdot \tau$ (Продолжение после задачи 3.10.3)

$S = 2.5.3$
 Дано:
 $h = 0.45 \text{ м}$
 $p_{\text{нас}} = 14.5 \text{ кПа}$
 $p_0 = 10^5 \text{ Па}$
 $\rho_0 = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
 $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
 $T = \text{const.}$
 $l = ?$

Решение:



1) Запишем ур-е Менделеева
 Клапейрона для смеси
 воздуха и нас. пара:
 с.в: $p_1 V_0 = \nu_1 RT$; $\nu_1 = \text{const}$,
 $V_0 = S \cdot l$

из з-на Бойля-Мариотта: $p_1 V_0 = p_2 V_1$

$$V_1 = S \cdot (\frac{l}{2} + h)$$

$$p_1 \cdot S \cdot l = p_2 \cdot S (\frac{l}{2} + h) \Rightarrow p_1 l = p_2 (\frac{l}{2} + h) \Rightarrow p_2 = \frac{p_1 l}{(\frac{l}{2} + h)}$$

2) $p_0 = p_{\text{в.в.}} + p_{\text{нас}} \Rightarrow p_{\text{в.в.}} = p_0 - p_{\text{нас}}$; $p_{\text{с.в.}} = p_1 \Rightarrow p_1 = p_0 - p_{\text{нас}}$ +

3) нас. пар: ① $p_{\text{нас}} V_0 = \nu_{H_2O} RT$ + ② $p_{\text{нас}} V_1 = \nu_{H_2O} RT$ +

$p_{\text{нас}} = \text{const}$ (зависит только от T) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{V_0}{\nu_{H_2O}} = \frac{V_1}{\nu_{H_2O}}$$

4) Рассмотрим давление у границы нас. пар + воздух и вода в сосуде. Они должны быть равны \Rightarrow $p_{\text{вода}} = p_0 + \rho_0 \cdot g \cdot h$; $p_{\text{н.п. + возд}} = p_2 + p_{\text{нас}}$

$$p_{\text{н.п. + возд}} = p_1 \frac{l}{2} + h + p_{\text{нас}} = (p_0 - p_{\text{нас}}) \cdot \frac{l}{\frac{l}{2} + h} + p_{\text{нас}} =$$
 +

$$= \rho_0 g h + p_0 \Rightarrow (p_0 - p_{\text{нас}}) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{h}{l}} + p_{\text{нас}} = \rho_0 g h + p_0$$
 +

5) Подставим числа:

$$\frac{(100 \text{ кПа} - 14.5 \text{ кПа})}{\frac{1}{2} + \frac{0.45 \text{ м}}{l}} + 14.5 \text{ кПа} = (1 \cdot 10 \cdot 0.45) \text{ кПа} + 100 \text{ кПа}$$

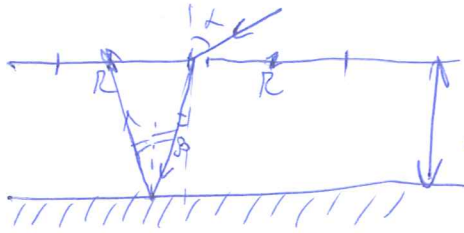
$$\frac{85.5}{\frac{1}{2} + \frac{0.45 \text{ м}}{l}} = 90 \Rightarrow \frac{85.5}{90} = \frac{1}{2} + \frac{0.45 \text{ м}}{l} \Rightarrow \frac{171}{180} - \frac{1}{2} = \frac{0.45 \text{ м}}{l} \Rightarrow \frac{81}{180} = \frac{0.45 \text{ м}}{l} \Rightarrow l = \frac{45}{100} \cdot \frac{180}{81} \text{ м} = (\frac{1}{2} \cdot 2) \text{ м} = 1 \text{ м}$$
 +

Ответ: $n = \sqrt{2}$ при $l = 1 \text{ м}$

№ 4.10.3

Дано:
 $R = 8 \text{ см}$
 $h = 4 \text{ см}$
 $n = ?$

Решение:



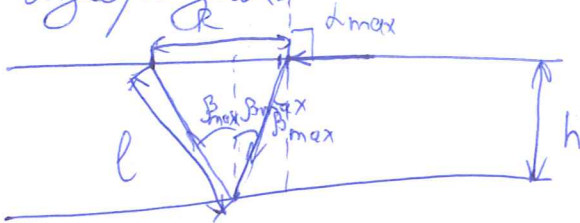
1) Свет рассеянный, значит, он падает под всеми возможными углами.

2) Из z -на Снеллиуса: $n_{\text{воз}} \cdot \sin \alpha = n \cdot \sin \beta$

$n_{\text{воз}} = 1 \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$

3) $\beta = \text{max}$, когда $\alpha = \text{max} \Rightarrow \sin \alpha = 1 \Rightarrow \sin \beta_{\text{max}} = \frac{1}{n}$

4) Изобразим.



угол отражения равен углу падения

5) Из геометрии очевидно, что $l \cos \beta_{\text{max}} = h$

① $2l \sin \beta_{\text{max}} = R$; ② $\frac{\cos \beta_{\text{max}}}{2 \sin \beta_{\text{max}}} = \frac{h}{R} \Rightarrow \frac{2h}{R} = \text{ctg} \beta_{\text{max}}$

$\text{ctg}^2 \beta_{\text{max}} + 1 = \frac{1}{\sin^2 \beta_{\text{max}}} \Rightarrow \text{ctg}^2 \beta_{\text{max}} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{n^2}} = n^2$

$\text{ctg}^2 \beta_{\text{max}} = (n-1)(n+1) = n^2 - 1 \Rightarrow \text{ctg} \beta_{\text{max}} = \sqrt{n^2 - 1}$

$\frac{2h}{R} = \sqrt{n^2 - 1} \Rightarrow \frac{4h^2}{R^2} = n^2 - 1 \Rightarrow n^2 = \frac{4h^2 + R^2}{R^2} \Rightarrow n = \frac{\sqrt{4h^2 + R^2}}{R}$

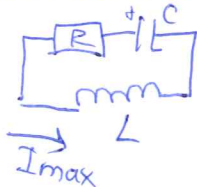
$n = \frac{\sqrt{4 \cdot 4^2 \text{ см}^2 + 8^2 \text{ см}^2}}{8 \text{ см}} = \frac{8\sqrt{2}}{8} = \sqrt{2}$

Ответ: $n = \sqrt{2}$

№ 5.4.3.

Дано:
 $R = 0,4 \text{ Ом}$
 $C = 40 \text{ нкФ}$
 $\Delta W \ll W$
 $u = 1 \text{ В}$

Решение:



1) 2 правила Кирхгофа для контура в момент, когда $I = I_{\text{max}}$:

$\mathcal{E}_{\text{си}} = U_C - I_{\text{max}} R$

$\mathcal{E}_{\text{си}} = L \frac{dI}{dt}$; когда $I = I_{\text{max}}$, $\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{си}} = 0$

66-32-82-93
(5.3)

$Q = 31,4 \text{ мДж} \Rightarrow I_{\max} R = U_c \Rightarrow I_{\max} = \frac{U_c}{R} = \frac{U}{R} = \frac{115}{31,4 \text{ Ом}} = 3,66 \text{ А}$
 $L = ?$

2) Рассмотрим колебание в произвольный момент t :

~~$|\mathcal{E}_{\text{свт}}| = U_c - IR; L \frac{dI}{dt} = U_c - IR; U_c = \frac{q}{C} \Rightarrow I - 2\sin^2 x$~~

~~$L \frac{dI}{dt} = \frac{q}{C} - IR \Rightarrow L \ddot{q} = \frac{q}{C} - \dot{q}R$~~

~~$W_0 = W_1 + Q \Rightarrow Q = \frac{1}{2} W$~~

~~$W_0 = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{40 \cdot 10^{-6} \cdot 115^2}{2} + \frac{L \cdot \frac{25}{4} \text{ А}^2}{2} = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 115^2 + \frac{25}{8} \text{ А}^2 \cdot L$~~

$\sqrt{T} \approx 2\pi \sqrt{LC}$

~~$W_0 = W + Q \left(\frac{1}{2}\right); W_0 = \frac{1}{2} I_{\max}^2 L; W = \frac{CU_{\max}^2}{2}$~~

б) $I = A \cdot \sin(\omega t); \omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}; A = I_{\max}$

$dQ = I^2 R dt \Rightarrow Q = \int I^2 R dt$

$I = I_{\max} \sin\left(\frac{t}{2\pi \sqrt{LC}}\right) \Rightarrow Q = \int_0^T I_{\max}^2 \sin^2\left(\frac{t}{2\pi \sqrt{LC}}\right) R dt =$
 $= I_{\max}^2 \cdot R \int_0^T \sin^2\left(\frac{t}{2\pi \sqrt{LC}}\right) dt = I_{\max}^2 R \cdot \frac{\cos^3\left(\frac{t}{2\pi \sqrt{LC}}\right)}{3}$

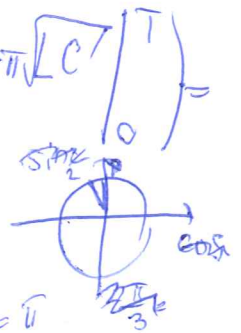
$1 - 2\sin^2\left(\frac{t}{2\pi \sqrt{LC}}\right) = \cos\left(\frac{t}{\pi \sqrt{LC}}\right) \Rightarrow \sin^2\left(\frac{t}{2\pi \sqrt{LC}}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{t}{\pi \sqrt{LC}}\right)}{2}$

$Q = I_{\max}^2 R \cdot \left(\int_0^T \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos\left(\frac{t}{\pi \sqrt{LC}}\right) dt \right)$

$Q = I_{\max}^2 R \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2\pi \sqrt{LC} - \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{t}{\pi \sqrt{LC}}\right) \cdot \pi \sqrt{LC} \Big|_0^T \right)$
 $= I_{\max}^2 R \left(\pi \sqrt{LC} - \frac{1}{2} \pi \sqrt{LC} \cdot (\sin(2) - 1) \right)$

$Q = I_{\max}^2 R \pi \sqrt{LC} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} (\sin(2) - 1) \right)$

(Пропускание после продолжения 1.4.3)



№ 3.10.3

Дано:

$r = 2 \text{ см}$

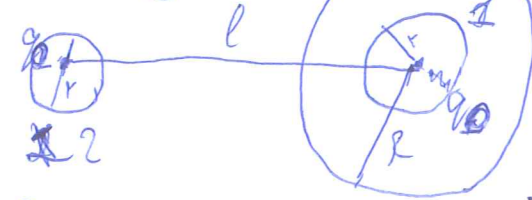
$R = 3 \text{ см}$

$q_1 = 6 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}$

$q_2 = ?$

Решение:

"До соединения":



$l \gg R$

$\varphi = 0$ (т.к. сфера заземлена)

1) Закон Гаусса

Теорема Гаусса

две поверхности - совпадают с сферой с поверхностью $q_1 = q_2 = q$

с центрами, совпадающими с центром шара:

$\oint_S E_{шара}(x) \cdot dS = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow$ из симметрии на расстоянии x от центра $E_{шара}(x) = \text{const} \Rightarrow$

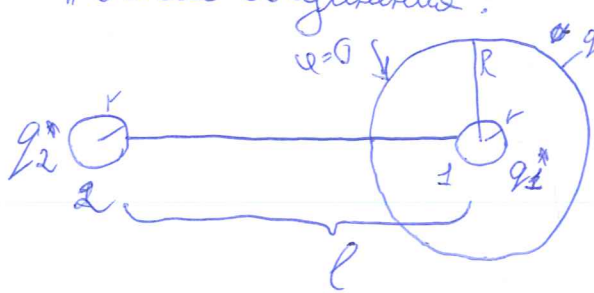
$\Rightarrow E_{шара}(x) \cdot \oint_S dS = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{шара}(x) \cdot 4\pi x^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{шара}(x) = \frac{q}{4\pi x^2 \epsilon_0}$

$\Rightarrow \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \int_{x_1}^{x_2} E_{шара}(x) \cdot dx = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) = \varphi_2 - \varphi_1$

$\varphi = \frac{kq}{r}$, где r - расстояние от центра шара до рассматриваемой точки. $l \gg r$.

2) $\varphi = \varphi_{сф} + \varphi_{шара1} = 0 \Rightarrow \varphi_{сф} = -\varphi_{шара1} = -\frac{kq_0}{R}$; т.к. $\varphi_{шара2} = 0$

3) "После соединения":



$\varphi_{шара1}' = \varphi_{шара2}'$
 $\varphi_{шара2}' = k \frac{q_2'}{R}$; т.к. $l \gg R$
 $\varphi_{шара1}' = k \frac{q_1'}{r} + \varphi_{сф}'$

4) "До соединения" можно также отметить, что заряды на сфере распределены равномерно, т.к.

$\varphi_{шара2} \approx 0$ ($l \gg R$) $\Rightarrow \varphi_{сф} = \frac{kq_{инд}}{R}$

$\varphi_{сф} + \varphi_{шара1} = 0 \Rightarrow \frac{kq_{инд}}{R} = -\frac{kq_0}{R} \Rightarrow q_{инд} = -q_0$

5) "После соединения" также $q_{инд}$ распределён равномерно $\Rightarrow \varphi_{сф}' + \varphi_{шара1}' = \varphi = 0$ (т.к. $\varphi_{шара2}' = 0$)

б) $\varphi'_{шара_2} = \varphi'_{шара_1}$; $\varphi'_{шара_1} = k \frac{q_1}{r}$; $\varphi'_{от шара_1} + \varphi'_{сф} = \varphi = 0$
(т.к. соединены проводом)

$\varphi'_{сф} = -\varphi'_{от шара_1} \Rightarrow \varphi'_{шара_1} = \frac{kq_1}{r} - \varphi'_{от шара_1}$

$\varphi'_{от шара_1} = k \frac{q_1}{R} \Rightarrow \varphi'_{шара_1} = \frac{kq_1}{r} - k \frac{q_1}{R} = kq_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$

$\varphi'_{шара_1} = \varphi'_{шара_2} \Rightarrow k \frac{q_2}{r} = kq_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow q_2 = q_1 \left(1 - \frac{r}{R} \right)$

$q_2 = 6 \cdot 10^{-10} \text{ Кл} \cdot \left(1 - \frac{2 \text{ см}}{3 \text{ см}} \right) = 2 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}$

Ответ: $q_2 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}$

§ 1.4.3. (продолжение)

$2 \left(r + \frac{R_1}{R_2} r \right) = \left(\sqrt{G \frac{M}{R_1^3}} - \sqrt{G \frac{M}{R_2^3}} \right) \tau$

$2r \left(\frac{R_2 + R_1}{R_2} \right) = \sqrt{GM} \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^3}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^3}} \right) \tau$

$4r \cdot \frac{(R_2^2 + 2R_2R_1 + R_1^2)}{R_2^2} = \sqrt{GM} \cdot \tau^2 \cdot \left(\frac{1}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^3} - \frac{2}{\sqrt{(R_1R_2)^3}} \right)$

Подставим числа:

$4 \cdot (64 \cdot 10^5 \text{ м})^2 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot 64 \cdot 10^6 \text{ м}}{10^8 \text{ м}} + \frac{(64 \cdot 10^6 \text{ м})^2}{(10^8 \text{ м})^2} \right) = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$
 $\cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ кг} \cdot \tau^2 \cdot \left(\frac{1}{(64 \cdot 10^6 \text{ м})^3} + \frac{1}{(10^8 \text{ м})^3} - \frac{2}{\sqrt{(64 \cdot 10^6 \text{ м} \cdot 10^8 \text{ м})^3}} \right)$

$\tau = \frac{2r \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right)}{\left(\sqrt{G \frac{M}{R_1^3}} - \sqrt{G \frac{M}{R_2^3}} \right)}$

$2r \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) = 2 \cdot 64 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \text{ м}$

$\cdot \left(1 + \frac{64 \cdot 10^4}{10^5} \right) = 12,8 \cdot 10^6 \text{ м} \left(1 + \frac{64}{10} \right)$

$= 12,8 \cdot 10^6 \cdot \frac{164 \text{ м}}{100} = \frac{128 \cdot 164}{100} \text{ м}$

$\sqrt{G \frac{M}{R_1^3}} = \sqrt{6,7 \cdot 10^{-11}}$

в) $2r \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \left(\sqrt{G \frac{M}{R_1^3}} - \sqrt{G \frac{M}{R_2^3}} \right) \tau$

а) $2r \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2 \cdot 64 \cdot 10^5 \text{ м}}{64 \cdot 10^6 \text{ м}} + \frac{2 \cdot 64 \cdot 10^5 \text{ м}}{10^8 \text{ м}} = \frac{1}{5} + \frac{128}{1000} = \frac{328}{1000}$

$$a) \sqrt{G \frac{M}{R_1^3}} = \sqrt{6,7 \cdot 10^{-11} \frac{H \cdot m^2}{K^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} K^2}{(64 \cdot 10^6 m)^3}} = \sqrt{\frac{6,7 \cdot 6}{86 \cdot 10^5}} \frac{1}{c} \approx 6,7 \cdot \frac{20}{3}$$

$$= \sqrt{\frac{10}{8 \cdot 64}} \frac{1}{c} = \sqrt{\frac{1}{2^8 \cdot 10^4}} \frac{1}{c} = \frac{1}{2^8 c} \cdot \frac{1}{10^2} = \frac{1}{256} \cdot \frac{1}{100}$$

$$b) \sqrt{G \frac{M}{R_2^3}} = \sqrt{\frac{20}{8} \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{10^{24}}} = \sqrt{4 \cdot 10^{-10}} \frac{1}{c} = 2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{c}$$

$$u) \sqrt{G \frac{M}{R_1^3}} - \sqrt{G \frac{M}{R_2^3}} = \left(\frac{1}{256} \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-5} \right) \frac{1}{c}$$

$$g) \left(\frac{1}{256} \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-5} \right) \frac{1}{c} \tau = \frac{328}{1000} \cdot 10^3$$

$$\left(\frac{10}{256} - 2 \cdot 10^{-2} \right) \frac{1}{c} \cdot \tau = 328$$

$$\tau = \frac{328 \cdot 256}{10 - 2^9 \cdot 10^{-2}} c = \frac{164 \cdot 256 c}{5 - 2^8 \cdot 10^{-2}} = \frac{164 \cdot 256 c}{5 - 2,56} = \frac{164 \cdot 256 c}{2,44}$$

$$= \frac{41 \cdot 256 c}{0,61}, \frac{41}{61} \approx \frac{2}{3} \Rightarrow \tau = \frac{2}{3} \cdot 256 \cdot 10^2 = \frac{512 c}{3} \approx 170,6 c \approx 1766,6 c$$

$$\begin{array}{r} 51200 \overline{) 3} \\ \underline{3} \\ 21 \\ \underline{-21} \\ 20 \\ \underline{-18} \\ 20 \\ \underline{-18} \\ 20 \end{array}$$
 Ответ: $\tau \approx 176,6,6 c$ **29 мин**

5.4.3. (продолжение)

$$2 \approx \frac{2\pi}{3} \Rightarrow Q = I_{\max}^2 R \cdot \pi \sqrt{LC} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) \right)$$

Подставим числа:

$$3,4 \cdot 10^3 = \frac{25}{H} \cdot \frac{H}{10} \cdot 349 \cdot \sqrt{L \cdot 40 \cdot 10^{-6}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1,73 - 2}{2} \right)$$

$$1 = 250 \cdot \sqrt{L \cdot 40 \cdot 10^{-6}} \cdot \left(1 + \frac{1}{16} \right)$$

$$\frac{16}{17} = 250 \sqrt{L \cdot 40 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow L = \frac{256}{62500 \cdot 343 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} \text{ Гн}$$

$$L \approx \frac{64 \cdot 10^6}{625 \cdot 10^4 \cdot 343} = \frac{100}{343} \approx 0,3 \text{ Гн} \quad \text{Ответ: } L \approx 0,3 \text{ Гн}$$