0 110291 500001

11-02-91-50
(3.12)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 1

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по Физике
профиль олимпиады

Сабельфельда Никиты Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«9» февраля 2024 года

Подпись участника

Саб

11-02-91-50 (3.12)

Чистовик

1.4.1. Задача

$R_1 = 6{,}4 \cdot 10^4$ км
$R_2 = 10^5$ км
$g = 9$ м/с²

$T = ?$

1) Запишем ускор. св. падения на поверхности:

$$g = G\frac{M}{r^2}$$, где M – масса планеты, r – её радиус

2) Запишем центростремительные ускорения спутников:

$$a_1 = G\frac{M}{R_1^2} = \frac{GM}{r^2}\cdot\frac{r^2}{R_1^2} = g\frac{r^2}{R_1^2}$$

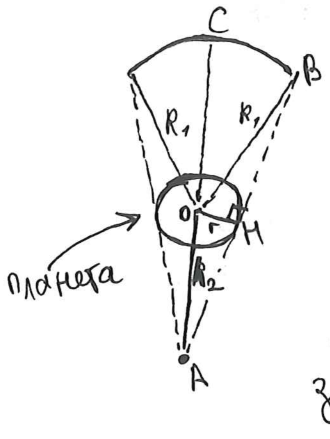
$$a_2 = G\frac{M}{R_2^2} = \frac{GM}{r^2}\cdot\frac{r^2}{R_2^2} = g\frac{r^2}{R_2^2}$$

3) Запишем ~~уг~~ угловые скорости спутников:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{a_1}{R_1}} = \sqrt{g\frac{r^2}{R_1^3}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{a_2}{R_2}} = \sqrt{g\frac{r^2}{R_2^3}}$$

4) Пересядем в СО, вращающуюся относительно планеты ~~со~~ с угл. скоростью ω_2. В этой СО ~~ближний~~ дальний к планете спутник неподвижен, а ~~дальний~~ ближний движется с угл. скоростью $\omega_1 - \omega_2$.



Когда сигнала нет, ближний спутник проходит по дуге своей орбиты, заключённой между касательными к планете, проведёнными из дальнего спутника (т. A на рисунке)

Найдём, какой угол γ он проходит за это время.

$\angle OBH = \arcsin\frac{r}{R_1}$; $\angle OAH = \arcsin\frac{r}{R_2}$.

№	1	2	3	4	5	Σ
балл	20	20	20	20	10	90
	Дмитриев	Губина	[illegible]	[illegible]	Соколовская	

Чистовик.

$\angle COB = \angle OBH + \angle OAH$ (как внешний к $\triangle OBA$), $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle COB = \arcsin\frac{r}{R_1} + \arcsin\frac{r}{R_2}$;

Т.к. R_1 и R_2 порядка 10^4 км, а r порядка 10^3 км, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} r \ll R_1 \\ r \ll R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{r}{R_1} \ll 1 \\ \frac{r}{R_2} \ll 2 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow$ мы можем записать:

$$\angle COB = \frac{r}{R_1} + \frac{r}{R_2}.$$

$$\gamma = 2\angle COB = 2r\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

5) $$\tau = \frac{\gamma}{\omega_1 - \omega_2} = 2\frac{r\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}}{r\sqrt{\frac{g}{R_1^3}} - r\sqrt{\frac{g}{R_2^3}}} = 2\frac{\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}}{\sqrt{g}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^3}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^3}}\right)} =$$

$$= 2\frac{(R_1+R_2)}{R_1R_2\sqrt{g}\cdot\frac{(R_2\sqrt{R_2} - R_1\sqrt{R_1})}{R_1\sqrt{R_1}R_2\sqrt{R_2}}} = 2\frac{(R_1+R_2)\sqrt{R_1R_2}}{\sqrt{g}\left(R_2\sqrt{R_2} - R_1\sqrt{R_1}\right)} =$$

$$= 2\frac{R_1+R_2}{\sqrt{g}\left(\frac{R_2}{\sqrt{R_1}} - \frac{R_1}{\sqrt{R_2}}\right)}$$

Теперь подставим числа:

$$\tau = 2\cdot\frac{16{,}4\cdot10^4\cdot10^3\,(м)}{3\left(\frac{м^{\frac{1}{2}}}{c}\right)\cdot\left(\frac{10^5\cdot10^3}{\sqrt{6{,}4\cdot10^4\cdot10^3}} - \frac{6{,}4\cdot10^4\cdot10^3}{\sqrt{10^5\cdot10^3}}\right)\left(м^{\frac{1}{2}}\right)} =$$

$\approx 2\cdot 8962 = 17924$ (с)

Промежуточные вычисления сделал на черновике

$\tau = 4$ часа 58 мин. 44 сек.

Ответ: 4 часа 58 мин 44 сек.

Чистовик.

3.10.1. Задача

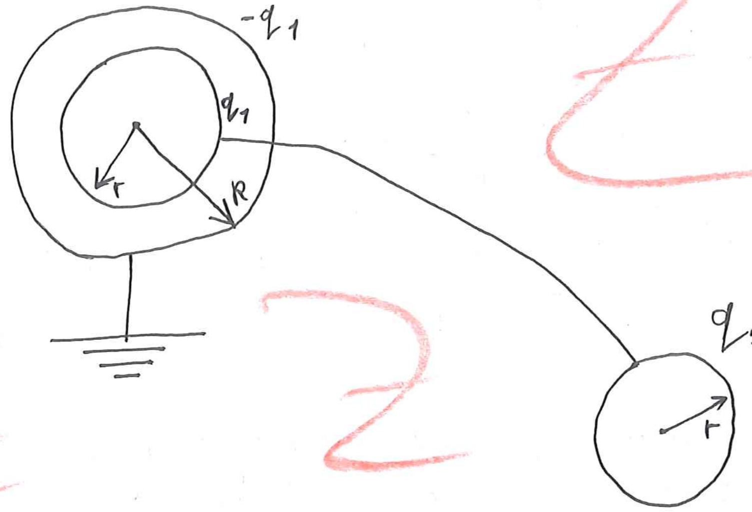
$r = 2$ см

$q_1 = 6 \cdot 10^{-10}$ Кл

$q_2 = 2 \cdot 10^{-10}$ Кл

$R = ?$

1)



2) Примем потенциал на бесконечности равным нулю. Т.к. большой шар заземлён, то ~~то~~ его потенциал такой же, как на бесконечности, ⇒ снаружи его поля нет, ⇒ раз на внутреннем шаре собрался заряд q_1, ⇒ на большом шаре соберётся заряд $-q_1$, чтобы снаружи поля не было (следствие теоремы Гаусса)

3) $\varphi = k\frac{q_2}{r}$ — потенциал соединённых шаров (они равны, ⇒ можем посчитать как потенциал удалённого шара)

4) В силу симметрии распределение зарядов на шарах равномерное.

Пусть $x \in [r; R]$, тогда $E = k\frac{q_1}{x^2}$ — эл-поле между шаром радиусом r и R в зависимости от расстояния до центра

5) Зная, что потенциал шара с радиусом r равен φ, а с радиусом R равен нулю, запишем следующее соотношение (связь потенциала и напряжённости):

$$\varphi = \int_r^R E\,dx = \int_r^R \frac{kq_1}{x^2}dx,$$

Чистовик.

$$\frac{kq_2}{r} = kq_1 \left(-x^{-1}\right)\Big|_r^R,$$

$$\frac{q_2}{r} = q_1\left(-\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{q_2}{q_1 r}, \Rightarrow R = r\frac{q_1}{q_1 - q_2}$$

Видно, что на внутреннем шаре действительно соберется заряд q_1, а не q_2. В противном случае R был бы отрицательным (т.к. $q_1 > q_2$)

б) Подставим числа:

$$R = 2\cdot\frac{6\cdot10^{-10}}{6\cdot10^{-10} - 2\cdot10^{-10}} = 2\cdot\frac{6}{4} = 3 \text{ (см)}$$

Ответ: $R = 3$ (см)

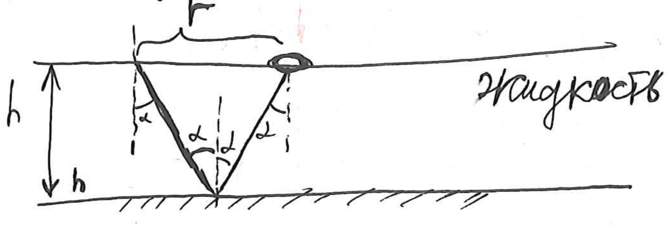
N 4.10.1. Задача.

$h = 5$ см

$n = 1{,}5$

$R = ?$

1) Пусть ~~какой~~ какой-то луч света преломился на границе раздела и идёт в жидкости под углом α к вертикали:



Этот луч попадёт на экран, отразившись от зеркала на расстоянии

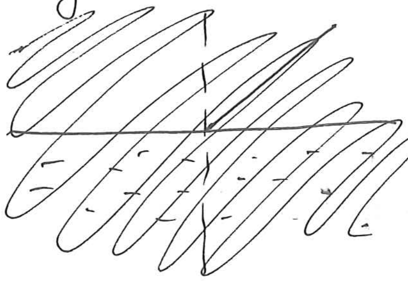
$r = 2h\,tg\,\alpha$ - видно, что r положительно зависит от α, $\Rightarrow$ радиус освещённой области определяется

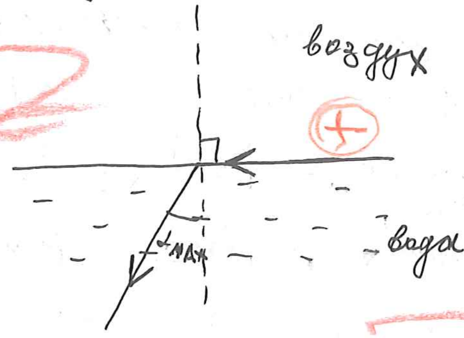
11-02-91-50 (3.12)

Чистовик

лучом с наибольшим α.

2) Найдём α_{MAX}. Свет на отверстие падает рассеяно, т.е. под всевозможными углами. α_{MAX} соответствует макс. угол падения $90°$.





Закон Снелла: $n\sin(\alpha_{MAX}) = 1\cdot\sin 90°$,

$$\sin(\alpha_{MAX}) = \frac{1}{n} = \frac{2}{3}.$$

$$\cos(\alpha_{MAX}) = \sqrt{1-\frac{2^2}{3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$tg(\alpha_{MAX}) = \frac{\sin(\alpha_{MAX})}{\cos(\alpha_{MAX})} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

3) $R = 2h\cdot tg(\alpha_{MAX}) = 2\cdot 5\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$ (см.)

радиус освещённой области.

Ответ: $R = 4\sqrt{5}$ см.

№2.5.1. Задача.

$l = 1$ м. $h = 0{,}45$ м. $p_0 = 10^5$ Па $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3 $g = 10$ м/с^2 $p_{нас} = ?$	1) Когда трубку опускают вниз, гидростатическое давление увеличивается, $\Rightarrow$ при неизменной температуре содержимого трубки начинает ~~уб~~ уменьшатся объём содержимого и увеличиваться его давление. Но т.к. изначально пары воды уже

чистовик

насыщены, $\Rightarrow$ их давление увеличиваться не может и часть пара будет конденсироваться, а в сосуде по прежнему будет насыщенный водяной пар (только в меньшем кол-ве).

2) Пусть p_1 и p_2 - соответственно парциальное давление „сухого" остатка в начальном и конечном состояниях, тогда запишем закон Бойля-Мариотта:

$$p_1 S l = p_2 S\left(\frac{l}{2}+h\right) \quad (1)$$

3) Вначале вода не затекает в трубку, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow p_1 + p_{нас} = p_0 \quad (2)$$ +

4) Запишем условие равновесия в конечном состоянии:

$$p_2 + p_{нас} = p_0 + \rho g h \quad (3)$$

5) Составим систему из ур-ний (1), (2), (3) и найдём $p_{нас}$:

$$\begin{cases} p_1 l = p_2\left(\frac{l}{2}+h\right) \\ p_1 + p_{нас} = p_0 \\ p_2 + p_{нас} = p_0 + \rho g h \end{cases} + \Rightarrow (p_0 - p_{нас})l = (p_0 + \rho g h - p_{нас})\cdot\left(\frac{l}{2}+h\right),$$

$$\Downarrow$$

$$(p_0 - p_{нас}) = (p_0 + \rho g h - p_{нас})\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{h}{l}\right),$$

$$\Leftarrow$$

$$p_0 - p_{нас} = (p_0 + \rho g h - p_{нас})\left(\frac{1}{2} + 0{,}45\right),$$

$$p_0 - p_{нас} = (p_0 + \rho g h - p_{нас})\cdot 0{,}95,$$

$$0{,}05 p_0 - 0{,}95 \rho g h = 0{,}05 p_{нас},$$

$$p_{нас} = p_0 - \frac{95}{5}\rho g h = p_0 - 19\cdot\rho g h = 10^5 - 19\cdot 10^3\cdot 10\cdot 0{,}45 =$$

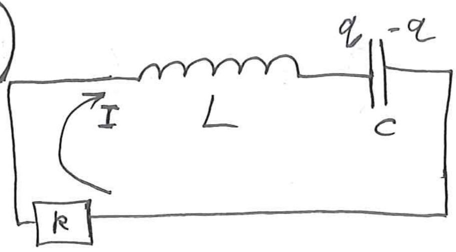
$$= 10^5 - 4500\cdot 19 = 100000 - 85500 = 14500 \ (Па)$$

Ответ: $p_{нас} = 14{,}5$ (кПа) +

№ 5.4.1. Задача Чистовик

$L = 0{,}3$ Гн
$R = 1$ Ом
$C = 30$ мкФ
$U = 2$ В
$\pi = 3{,}14$

$Q = ?$

1) 

2) Слабо затухающие колебания, ⇒ ⇒ период колебаний можно рассчитать как для цепи без R:

$L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0,$ +

$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0,$ Гарм. колебания

$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0, \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - циклическая частота.

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$ + - Период колебаний (если пренебречь затуханием)

3) Сила тока достигает локального максимума, ⇒ ⇒ $\frac{dI}{dt} = 0$, ⇒ записав второе правило Кирхгофа, получаем $IR = \frac{q}{C} = U, \Rightarrow I = \frac{U}{R} = 2$ (А) - сила тока в этот момент. +

4) Т.к. происходят гармонические колебания, то 2 А - амплитуда колебаний силы тока. (если пренебречь затуханием)

5) Найдём кол-во энергии, запасённой в системе: $E = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{30\cdot10^{-6}\cdot 4}{2} + \frac{0{,}3\cdot 2^2}{2} =$
$= 0{,}6 + 60\cdot10^{-6} = 0{,}60006$ (Дж) − крит. 4

6) Добротность системы $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 1\cdot\sqrt{\frac{0{,}3}{30\cdot10^{-6}}} =$
$= \sqrt{\frac{0{,}1\cdot10^{6}}{10}} = \sqrt{10^4} = 100.$?

7) Найдём Q по определению добротности:

$$Q = \frac{E}{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{0{,}60006}{100} = 0{,}0060006 \text{ (Дж)}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q \approx 6 \text{ (мДж)}$$

⊖ крит. 5

Ответ: $Q \approx 6$ мДж. ⊖

Чистовик.

Черновик.

Добротность $= 1 \cdot \sqrt{\frac{0,3}{30 \cdot 10^{-6}}} = \sqrt{\frac{0,3 \cdot 10^6}{30}} = \sqrt{\frac{0,1 \cdot 10^6}{10}} = \frac{\sqrt{10^5}}{10} =$

$= \sqrt{10^4} = 10^2 = 100.$

№2.5-1.

$\frac{I^2}{2} R = 2$

$$\begin{cases} (p_{сух} + p_{нас}) S\ell = (\nu_{сух} + \nu_1) RT \\ (p + p_{нас}) S\left(\frac{\ell}{2} + h\right) = (\nu_{сух} + \nu_2) RT \\ p_{сух} + p_{нас} = p_0 \\ p + p_{нас} = p_0 + \rho g h \end{cases}$$

0,000060

$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$

$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$

$\frac{30 \cdot 10^{-6} \cdot 4}{2} + \frac{+0,3 \cdot 4}{2} = 0,6 + 60 \cdot 10^{-6} = \cancel{0,6}+0,60006$ 0,060006

$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

$T = 2\pi\sqrt{LC}$

$$\begin{cases} p_{сух} S\ell = \nu_{сух} RT \\ p_{нас} S\ell = \nu_1 RT \\ p\, S\left(\frac{\ell}{2} + h\right) = \nu_{сух} RT \\ p_{нас} S\left(\frac{\ell}{\ell} + h\right) = \nu_2 RT \\ p_{сух} + p_{нас} = p_0 \\ p + p_{нас} = p_0 + \rho g h \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{p_{сух} \cdot \ell}{p\left(\frac{\ell}{2} + h\right)} = \\ p_{сух} + p_{нас} = p_0 \\ p + p_{нас} = p_0 + \rho g h \end{cases}$$

$q(t) = q_0 \sin(\omega t) + \varphi_0$

$I = q_0 \omega \cos(\omega t)$

$\frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} =$

$\int_0^T p\,dt = \int_0^T I^2 R\, dt =$

$= \int_0^T \cos^2(\omega t) R\, dt =$

$= \frac{1}{\omega} \int_0^T \cos^2(\omega t) R\, d(\omega t) =$

$= \frac{R}{\omega} \int_0^T \cos(\omega t)\, d(\sin \omega t)$

$\frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$

$\frac{LI^2}{2} = \cancel{\frac{ct \cdot q}{2}}\ \frac{\frac{1}{ct^2} \cdot \frac{q^2}{t^2}}{2} = \cancel{\frac{Rq}{t^2}} \cancel{2}\ \frac{1}{ct^2} \cancel{I \cdot \frac{q}{t}} = \cancel{\frac{R}{t} \cdot I \cdot \frac{q}{t}}$

$q = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$

$= \frac{R}{4} \int_0^T \nu_1 -$

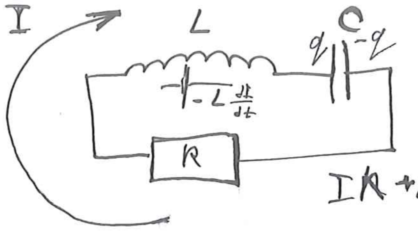
$\dot{q} = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x}$

$\ddot{q} = C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}$

$(C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cancel{+ C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x}}) R + L(C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} \cancel{+ C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}}) + \frac{C_1 e^{\lambda_1 x} \cancel{+ C_2 e^{\lambda_2 x}}}{C}$

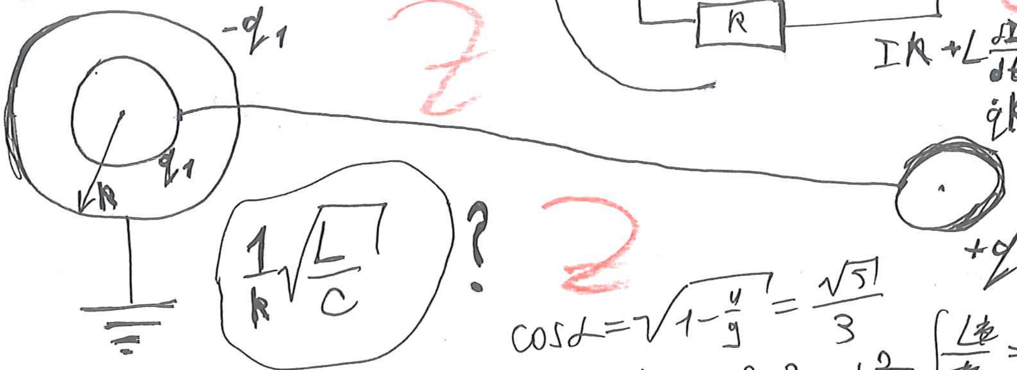
$C_1 \lambda_1 R + L C_1 \lambda_1^2 + \frac{C_1}{C} = 0$

Черновик



$$IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\dot{q}R + L\ddot{q} + \frac{q}{c} = 0$$



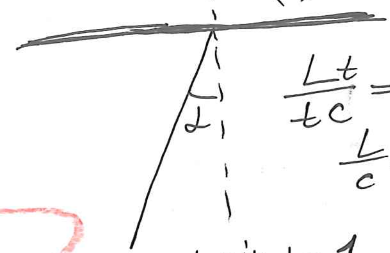
$$\boxed{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}\ ?$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\cdot 3}{3\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{cases} \frac{L\cancel{t}}{\cancel{t}} = Rt \\ \frac{1}{\cancel{t}C} = R/t \end{cases}$$

$$\varphi = K\frac{q_2}{r}$$



$$\frac{Lt}{tC} = R^2$$

$$\frac{L}{c} = R^2$$

$$\frac{q_1}{\varepsilon_0} = 4\pi x^2 E,$$

$$E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{Kq_1}{x^2}$$

$$h\sin\alpha = 1,$$

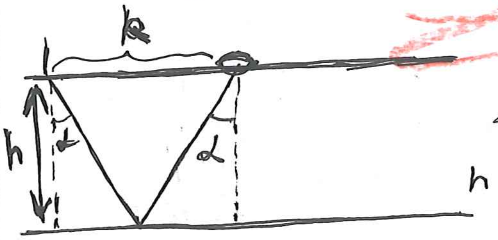
$$\sin\alpha = \frac{1}{h} = \frac{2}{3}$$

$$+\varphi = \int_r^R E\,dx = \int_r^R \frac{kq_1}{x^2}dx,$$

$$+\frac{\cancel{K}q_2}{r} = kq_1\int_r^R \frac{dx}{x^2} = \cancel{k}q_1\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_r^R = q_1\left(-R^{-1}+r^{-1}\right),$$

$$\cancel{\frac{q_2}{r} = q_1(R-r) \Rightarrow R = q}$$

$$\frac{q_2}{r} = \frac{q_1}{\cancel{\frac{1}{r}-\frac{1}{R}}},\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$$



$$\cancel{\frac{1}{r}-\frac{1}{R} = \frac{q_1}{q_2}r}$$

$$\frac{q_2}{q_1 r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R},$$

$$\cancel{\left(\frac{1}{r}-\frac{q_1}{q_2 r}\right) = \frac{1}{R}}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{q_2}{q_1 r},$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ +4500 \\ \hline 95 \\ +6 \\ \hline 85500 \end{array}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{q_1 - q_2}{q_1 r},$$

$$\frac{R}{2}\cdot\frac{1}{h} = \mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$R = r\frac{q_1}{q_1 - q_2},$$

$$\frac{R}{2h} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow R = \frac{4h}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}\ (\text{см})$$

$$R = 2\cdot\frac{6}{6-2} = 2\cdot\frac{6}{4} =$$

$$= 3\ (\text{см})$$

Черновик.

№1.

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

$$a_1 = G\frac{M}{R_1^2} = \frac{GM}{r^2}\cdot\frac{r^2}{R_1^2} = g\frac{r^2}{R_1^2}$$

$$a_2 = g\frac{r^2}{R_2^2}$$

$$v = \sqrt{R a_ц}$$

$$\cancel{R = \frac{v^2}{a_ц}} \quad \omega = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{R a_ц}}{R} = \sqrt{\frac{a_ц}{R}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{a_1}{R_1}} = \sqrt{\frac{g r^2}{R_1^3}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g r^2}{R_2^3}}$$

$$\omega_{отн} = \omega_1 - \omega_2$$

$$\cancel{\alpha = \arccos\frac{r}{R_2}}$$

$$\cancel{\beta = \arccos\frac{r}{R_1}}$$

$$\gamma = \arcsin\frac{r}{R_1} + \arcsin\frac{r}{R_2}$$

$$l = R_1\gamma = r + r\frac{R_1}{R_2} = r\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$t = \frac{\gamma}{\omega_{отн}} = \frac{r\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}{r\sqrt{\frac{g}{R_1^3}} - r\sqrt{\frac{g}{R_2^3}}} = \frac{\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}}{\sqrt{g}\left(\frac{1}{R_1\sqrt{R_1}} - \frac{1}{R_2\sqrt{R_2}}\right)} =$$

$$= \frac{R_1+R_2}{R_1R_2\sqrt{g}\cdot\frac{R_2\sqrt{R_2}-R_1\sqrt{R_1}}{R_1\sqrt{R_1}\cdot R_2\sqrt{R_2}}} = \frac{(R_1+R_2)\sqrt{R_1R_2}}{\sqrt{g}\left(R_2\sqrt{R_2}-R_1\sqrt{R_1}\right)} =$$

$$= \cancel{(16{,}4\cdot 10^5)} \; \frac{(R_1+R_2)}{\sqrt{g}\cdot\left(\frac{R_2}{\sqrt{R_1}} - \frac{R_1}{\sqrt{R_2}}\right)} = \frac{16{,}4\cdot 10^4\cdot 10^3\,(м)}{3\left(\frac{\sqrt{м}}{с}\right)\cdot\left(\frac{10^5\cdot 10^3}{\sqrt{6{,}4\cdot 10^4\cdot 10^3}} - \frac{6{,}4\cdot 10^4\cdot 10^3}{\sqrt{10^5\cdot 10^3}}\right)} =$$

$$= \frac{16{,}4\cdot 10^7}{3\cdot\left(\frac{10^8}{8\cdot 10^3} - \frac{6{,}4\cdot 10^7}{10^4}\right)} = \frac{16{,}4\cdot 10^7}{3\cdot\left(\frac{10^5}{8} - 6{,}4\cdot 10^3\right)} = \frac{16{,}4\cdot 10^4}{3\cdot\left(\frac{100}{8} - 6{,}4\right)} =$$

$$= \frac{16{,}4\cdot 10^4}{3\cdot(12{,}5-6{,}4)} = \frac{16{,}4\cdot 10^4}{3\cdot 6{,}1} = \frac{164\cdot 10^4}{183} =$$

$183\cdot 9 = 1647$

$183\cdot 8 = 1464$

$183\cdot 7 = 1281$

$183\cdot 6 = 1098$

$1640 : 183 = 0{,}89617$

-1464, 1760, -1647, 1130, -1098, 320, -183, 1370, -1281, 890

$8962\cdot 2 = 17924$

$17924 : 60 = 298$

-120, 592, -540, 524, -480, 44 с.

$$298\frac{44}{60} = 298\frac{44}{60}$$

$298 : 60 = 4$, -240, 58