02-13-61-73
(162.7)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11-1

Место проведения Краснодар
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов по математике
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Абрамян Марии Григорьевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
02-13-61-73	70	+	+	±	+	+	∓	0	0

02-13-61-73
(162.7)

70 (семьдесят)

Царёв
Роман

Черновик

1). $\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$

$\cancel{\sqrt{(2x-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}}$

$\sqrt{(2x-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+(-x+2)=\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{8}}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$

ОДЗ
$x\le 2$

$\cancel{2x-3+x-3-x+2=\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{8}}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}}$

$\cancel{2x-4=\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}}$

$\cancel{2x-4=1-\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^2}$

Чистовик

1) $\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$

Запишем ОДЗ: $-(x-2)\geq 0$

$-x+2\geq 0$

$x\leq 2$

$\sqrt{(2x-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+(-(x-2))=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$

$|2x-3|-(x-3)-(x-2)=2$

$|2x-3|=2x-3 \Rightarrow x\geq\frac{3}{2}$

$x\geq 1{,}5$

Ответ: $x\in\left[\frac{3}{2};2\right]$

5). $f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)\Rightarrow x^3+x^2\cdot(a_1+b_1)+x(6+a_1b_1)+$
$+6a_1=x^3+x^2(a_2+b_2)+x(8+a_2b_2)+8a_2=x^3+x^2(a_3+b_3)+$
$+x(12+a_3b_3)+12a_3\Rightarrow$ 1). $a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3$

2) $6+a_1b_1=8+a_2b_2=12+a_3b_3$ $\Rightarrow$

3). $6a_1=8a_2=12a_3$

$\Rightarrow 6+a_1b_1=8+\frac{3}{4}a_1\left(a_1+b_1-\frac{3}{4}a_1\right)=12+\frac{1}{2}a_1\left(a_1+b_1-\frac{1}{2}a_1\right)\Rightarrow$

Выразим a_2 через a_1 выразим b_2 через a_1, b_1, a_2

$\Rightarrow a_1b_1=2+\frac{3}{4}a_1\left(\frac{1}{4}a_1+b_1\right)=6+\frac{1}{2}a_1\left(\frac{1}{2}a_1+b_1\right)$

$a_1b_1=2+\frac{3}{4}a_1\left(\frac{1}{4}a_1+b_1\right)$

$16a_1b_1=32+3a_1^2+12a_1b_1$

$\boxed{4a_1b_1=32+3a_1^2}$

02-13-61-73
(162.7)

$a_1 b_1 = 6 + \frac{1}{2} a_1 \left(\frac{1}{2} a_1 + b_1\right)$

$4a_1 b_1 = 24 + a_1^2 + 2a_1 b_1$

$\boxed{2a_1 b_1 = 24 + a_1^2}$

$\Rightarrow 32 + 3a_1^2 = 48 + 2a_1^2$

$16 = a_1^2$, т.к. $a_1 > 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 4}$, тогда $8b_1 = 24 + 16 = 40$

$8b_1 = 40$

$\underline{b_1 = 5}$

Тогда $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + a_3 + b_3 = 3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 9 = \underline{27}$

Ответ: 27

2). $3^{5 - \frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$

Утверждение 1: для любого $\varepsilon > 0$ и $N > 0$

существует $k > N$: $|3^5 - 3^{5-\frac{1}{x}}| < \varepsilon \Rightarrow$ очевидно, т.к.

$5 - \frac{1}{k}$ стремится к 5 (при k стремится к бесконечности).

$\Rightarrow 3^{5 - \frac{1}{k}}$ стремится к 3^5 (при k стремится к бесконечности).

Утверждение 2: для любого $N > 0$ существует $k > N$:

$\sin(4^k) = -1$

И правда, хотим k:

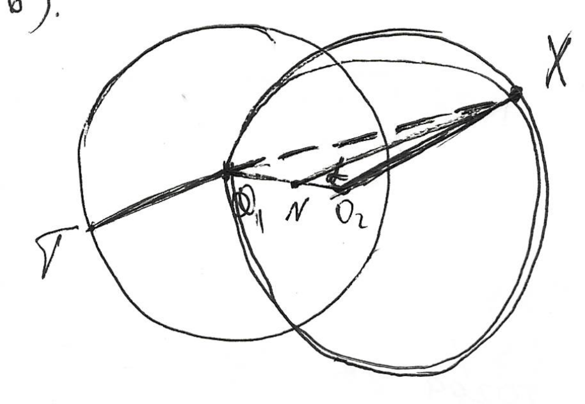
$4^k = 2\pi S - \frac{\pi}{2}$ при $S \in \mathbb{R} \Rightarrow k = \log_4\left(2\pi S - \frac{\pi}{2}\right)$

При $S > 4^n$ – верно $\Rightarrow 3^{5 - \frac{1}{x}} - \sin(4^x)$ сколь угодно близко к $3^5 + 1$ при некоторых x, но $3^{5 - \frac{1}{x}} - \sin(4^x) < 3^5 - (-1) =$

$= 3^5 + 1 \Rightarrow a$ и есть $3^5 + 1$

Ответ: $3^5 + 1$

6).



Решение:

Пусть X - точка, в которой мышь заходит в зону двойного полива => чтобы дойти до точки X мышь идет по прямой O_1X (как кратчайшее расстояние). Пусть она заходит в точке T в область => мышь была полита как: $XT+2XN$.

Пусть $\angle O_1O_2X=\alpha$, $O_1O_2=r$, $O_1X=2r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$ =>

=> тогда $XT=r-2r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$

$XN=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2(2r\cdot\sin\frac{\alpha}{2})^2+2r^2-r^2}$ (по формуле медианы)

$XN=\frac{1}{2}\sqrt{8r^2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}+r^2}$

Тогда надо минимизировать $f(\alpha)=r-2r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{8r^2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}+r^2}$

$$f'(\alpha)=r\left(-\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{8\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}+1}}\right)=0$$

$$\frac{4\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{8\sin^2\frac{\alpha}{2}+1}}=1$$

$16\sin^2\frac{\alpha}{2}=8\sin^2\frac{\alpha}{2}+1$ $\qquad 8\sin^2\frac{\alpha}{2}=1$

$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{8}$ $\qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{8}}$ $(\alpha\in[0;60^\circ])$ =>

=> $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{8}}$

02-13-61-73 (162.7)

$\frac{1}{2+\sqrt{2}}$

$f = r\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right) = \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2} = 0,5$ у.е.

Проверим крайние точки: $\sin\frac{\alpha}{2} = 1$

$f = r(1 - 2 + 3) = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{5} > \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$

$f = r(1 - 1 + \sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{5} > \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

Ответ: 0,5 у.е.

4). $\sin^3(\pi x) - \sin^3(2\pi x) + \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x))^3$

$\sin^3(\pi x) - \sin^3(2\pi x) + \sin^3(4\pi x) = \sin^3(\pi x) - \sin^3(2\pi x) + \sin^3(4\pi x) -$

$-3(\sin(\pi x) - \sin(2\pi x))(\sin(4\pi x) - \sin(2\pi x))(\sin(\pi x) + \sin(4\pi x))$ + все

возможные производ. по тройкам. $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3(\sin(\pi x) - \sin(2\pi x))(\sin(4\pi x) - \sin(2\pi x))(\sin(\pi x) + \sin(4\pi x)) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin(\pi x) = \sin(2\pi x) & ① \\ \sin(4\pi x) = \sin(2\pi x) & ② \\ \sin(\pi x) = -\sin(4\pi x) & ③ \end{array}\right.$

Наш отрезок от $[0,3; 1,6]$

1). $\sin(2\pi x) - \sin(\pi x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = 0$

$\left\{\begin{array}{l} \frac{\pi x}{2} = \pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x = 2k \text{ - нет решений} \\ x = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3} \end{array}\right.$ $x = \frac{1}{3}$, $k = 0$

$x = 1$

$k = 1$

2) $\sin(4\pi x) - \sin(2\pi x) = 2\sin(\pi x)\cdot\cos(3\pi x) = 0$

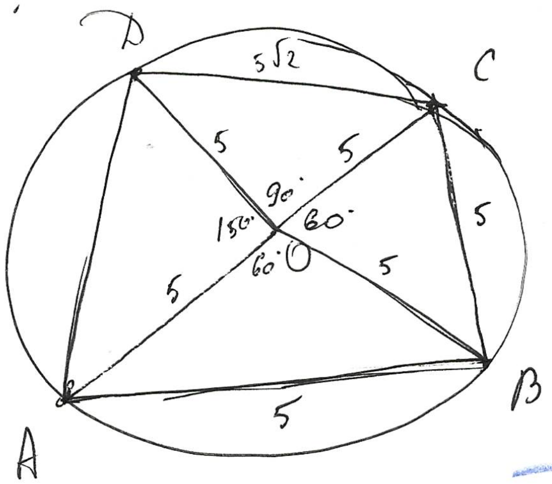
$$\left\{\begin{array}{ll} \pi x = \pi n, & k \in \mathbb{Z} \\ 3\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lll} x = k, & x = 1, & k = 1 \\ x = \frac{1}{6} + \frac{k}{3}, & x = \frac{1}{2} & k = 1 \\ & x = \frac{5}{6} & k = 2 \\ & x = \frac{7}{6} & k = 3 \\ & x = 1{,}5 & k = 4 \end{array}\right.$$

3). $\sin(4\pi x) + \sin(\pi x) = 2\cdot\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = 0$

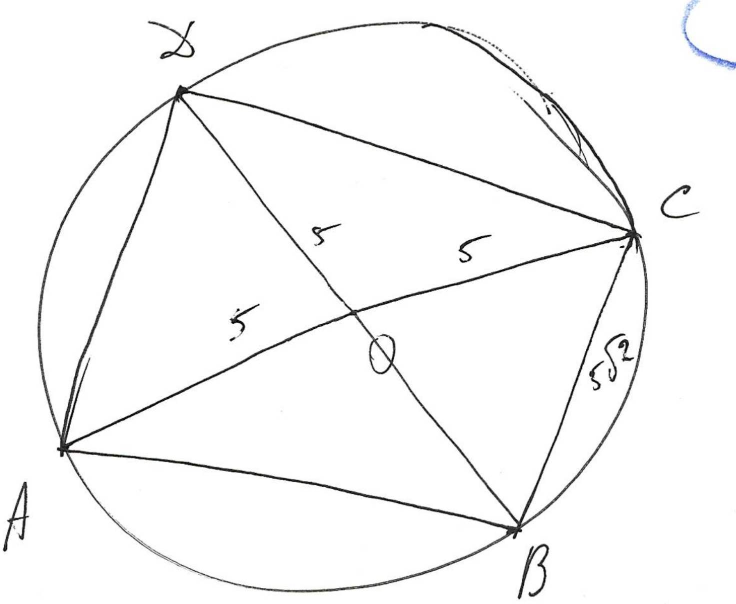
$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{5\pi x}{2} = \pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lll} x = \frac{2k}{5}, & x = \frac{2}{5} & k = 1 \\ & x = \frac{4}{5} & k = 2 \\ & x = \frac{6}{5} & k = 3 \\ & x = \frac{8}{5} & k = 4 \\ x = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3}, & x = \frac{1}{3} & k = 0 \\ & x = 1 & k = 1 \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; 1; \frac{7}{6}; \frac{6}{5}; \frac{3}{2}; \frac{8}{5}\right\}$

3). 1 случай:

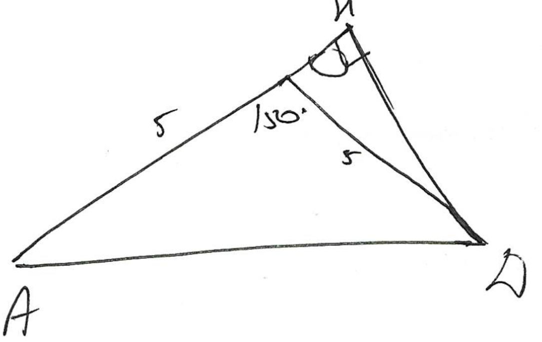


2 случай:



Рассмотр. 1 случай: $\triangle OAB$ и $\triangle OBC$ равностор.

$\triangle COD$ – прямоуг., т.к. $5^2+5^2=25^2 \Rightarrow \angle AOD = 360° - 60° - 60° - 90° = 150°$



$DH = OD\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AOD} = \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2} = \frac{25}{4}$

$S_{ABO} = S_{BOC} = \frac{25}{4\sqrt{3}}$ арифм. ошибка

$S_{COD} = \frac{5\cdot 5}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{25}{4} + \frac{25}{4\sqrt{3}} + \frac{25}{2}$