



82-03-С 49
(162.9)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 - 1

Место проведения Краснодар
город

13⁴⁵ — 13⁵²
14³⁶ — 14⁴³

11
+ 1

черновика
нет

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ломоносов
наименование олимпиады

Александра Георгиевна Артуровна

по математике
профиль олимпиады

Александра Георгиевна Артуровна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» 04 2025 года

Подпись участника

Александра

№ 1.

Исходник.

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} + (\sqrt{-(x-2)})^2 =$$

$$\sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + (\sqrt{-(x-2)})^2 =$$

$$\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$$

$$|2x-3| + |x-3| + 2-x = \sqrt{2}+1 - (\sqrt{2}-1)$$

$$\sqrt{2} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$$

$$2 > 1$$

$$|2x-3| + |x-3| + 2-x = 2$$

$$\text{огр. } \sqrt{-(x-2)} \Rightarrow 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow$$

$$|x-3| = 3-x$$

$$|2x-3| + 3-x-x=0$$

$$|2x-3| = 2x-3$$

$$\text{или } x \in [1,5; 2]; \quad 2x-3 = 2x-3 \Rightarrow$$

$$\text{корень - } x \in [1,5; 2]$$

на Чинговик.

15.

$$f_1(x) = x^3 + x^2(a_1 + b_1) + x(a_1 b_1 + 6) + 6a_1$$

$$f_2(x) = x^3 + x^2(a_2 + b_2) + x(a_2 b_2 + 8) + 8a_2$$

$$f_3(x) = x^3 + x^2(a_3 + b_3) + x(a_3 b_3 + 12) + 12a_3$$

заменим это условие

$$f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) \text{ для любого } x \in \mathbb{R}$$

означает это какое из разностей

$$f_1(x) - f_2(x) = 0$$

$$f_1(x) - f_3(x) = 0$$

$$f_2(x) - f_3(x) = 0$$

или так, то может быть только

при равенстве коэф. при соответствующих степеням x !

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 \\ a_1 b_1 + 6 = a_2 b_2 + 8 = a_3 b_3 + 12 \\ 6a_1 = 8a_2 = 12a_3 \end{cases}$$

зададим:

$$6a_1 = 8a_2 = 12a_3 = 24t \Rightarrow$$

$$a_1 = 4t$$

$$t \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$a_2 = 3t$$

$$a_3 = 2t$$

подставим в первую строку:

$$4t + b_1 = 3t + b_2 = 2t + b_3 \Rightarrow$$

$$b_2 = b_1 + t$$

$$b_3 = b_1 + 2t$$

подставим во вторую строку ш-мы:

$$6 + 4tb_1 = 3t(b_1 + t) + 8 = 12 + 2t(b_1 + 2t)$$

$$6 + 4t \cdot b_1 = 8 + 3tb_1 + 3t^2 = 12 + 4t^2 + 2t \cdot b_1$$

~~$$6 + 4tb_1 = 8 + 3tb_1 + 3t^2$$~~

$$3t^2 - tb_1 + 2 = 0$$

$$t \cdot b_1 - 3t^2 = 2$$

$$8 + 3t \cdot b_1 + 3t^2 = 12 + 4t^2 + 2tb_1$$

$$t \cdot b_1 - t^2 = 4$$

$$\begin{cases} tb_1 - 3t^2 = 2 \\ tb_1 - t^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2t^2 = 2$$

$$t^2 = 1 \Rightarrow t = 1, \text{ т.к. } t > 0$$

$$t \cdot b_1 - t^2 = 4$$

гипотеза:

$$b_1 - 1 = 4$$

$$b_1 = 5$$

$$b_2 = b_1 + t = 5 + 1 = 6$$

$$b_3 = b_1 + 2t = 5 + 2 = 7$$

$$6a_1 = 24 \Rightarrow a_1 = 4$$

$$8a_2 = 24$$

$$a_2 = 3$$

$$12a_3 = 24$$

$$a_3 = 2$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + a_1 + a_2 + a_3 =$$

$$5 + 6 + 7 + 4 + 3 + 2 = 10 + 10 + 7 = 27$$

Ответ: 27.

задание: № 4.

$$\sin^3(\pi x) = a \quad - \sin(2\pi x) = b \quad \sin(4\pi x) = c$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \leftarrow (a + b + c)^3 = -3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\begin{cases} a = -b \\ b = -c \\ c = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\pi x) = \sin(2\pi x) \\ \sin(2\pi x) = \sin(4\pi x) \\ \sin(4\pi x) = -\sin(\pi x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin(\pi x) = 2 \cdot \sin \pi x \cdot \cos \pi x \\ \sin(2\pi x) = 2 \sin(2\pi x) \cdot \cos(2\pi x) \\ -\sin(4\pi x) + \sin(\pi x) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2 \sin(\pi x) \left(\cos(\pi x) - \frac{1}{2} \right) = 0 \\ 2 \sin(2\pi x) \left(\cos(2\pi x) - \frac{1}{2} \right) = 0 \\ 2 \sin \frac{4\pi x + \pi x}{2} \cos \frac{4\pi x - \pi x}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin(\pi x) \left(\cos(\pi x) - \frac{1}{2} \right) = 0 \\ \sin(2\pi x) \left(\cos(2\pi x) - \frac{1}{2} \right) = 0 \\ \sin \frac{5\pi x}{2} \cos \frac{3\pi x}{2} = 0 \end{cases}$$

Штабильно

$$\sin \pi x = 0$$

$$\cos \pi x = \frac{1}{2}$$

$$\sin(2\pi x) = 0$$

$$\cos 2\pi x = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{5\pi x}{2} = 0$$

$$\cos \frac{3\pi x}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \pi x = \pi k & k, n \in \mathbb{Z} \\ \pi x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi \cdot t & t, m \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m \end{cases}$$

$$\frac{5\pi x}{2} = \pi \cdot y \quad y, z \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi z$$

$$x = k$$

$$x = \pm \frac{1}{3} + 2n$$

$$x = \frac{t}{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{6} + m$$

$$x = \frac{2y}{5}$$

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2 \cdot z}{3}$$

$$x \in [0, 3, 1, 6]$$

$$k, n, t, m, y, z \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \pi x = k &\Rightarrow x = 1 \\ x = \pm \frac{1}{3} + 2n &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{3} + m \cdot k.$$

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{10} \rightarrow 30$$

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{4}{3} \rightarrow 30$$

$$4 \cdot 8 \rightarrow 50 \Rightarrow$$

$$x = \frac{5}{3} \text{ некорень}$$

$$1) x = K \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in [0, 3; 1,6] \end{array} \right\} \rightarrow x = 1 \quad \text{шмтовик}$$

$$2) x = \pm \frac{1}{3} + 2n$$

$$\begin{cases} \frac{3}{10} \leq \frac{1}{3} + 2n \leq \frac{16}{10} & | \cdot 30 \Rightarrow \\ \frac{3}{10} \leq -\frac{1}{3} + 2n \leq \frac{16}{10} & | \cdot 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 \leq 10 + 60n \leq 48 & \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 \leq -10 + 60n \leq 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq 60n \leq 38 \\ 19 \leq 60n \leq 58 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{60} \leq n \leq \frac{38}{60} \\ \frac{19}{60} \leq n \leq \frac{58}{60} \end{cases}$$

$$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ \emptyset \end{cases}$$

$$\text{при } K=0: \\ x = \frac{1}{3}$$

3) $x = \frac{t}{2}$

при $t < 0$: $\frac{t}{2} < 0 \Rightarrow x \in [0, 3; 1, 6]$

на дан
лине

Штефан

$t \geq 0$

при $t = 0$: $x = 0$ не корень

при $t = 1$: $x = \frac{1}{2}$ - корень

при $t = 2$: $x = 1$ - корень

при $t = 3$: $x = 1,5$ - корень

при $t = 4$: $x = 2$ - не корень

при дальнейшем увеличении

корней не будет т.к. $x \in [0, 3; 1, 6]$

4) $x = \pm \frac{1}{6} + m$

$\begin{cases} \frac{3}{10} \leq \frac{1}{6} + m \leq \frac{16}{10} \quad | \cdot 30 \\ \frac{3}{10} \leq -\frac{1}{6} + m \leq \frac{16}{10} \quad | \cdot 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 \leq 5 + 30m \leq 48 \\ 9 \leq -5 + 30m \leq 48 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 4 \leq 30m \leq 43 \\ 14 \leq 30m \leq 53 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{30} \leq m \leq \frac{43}{30} \\ \frac{14}{30} \leq m \leq \frac{53}{30} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 1 \end{cases}$

при $m = 1$ $x = \pm \frac{1}{6} + 1 \Rightarrow x = \frac{7}{6}; \frac{5}{6}$

82-03-06-49
(162.9)

Задача № 4 продолжение

5) $x = \frac{2y}{5}$

$$\frac{3}{10} \leq \frac{2y}{5} \leq \frac{16}{10} \quad | \cdot 30$$

$$9 \leq 12y \leq 48$$

$$\frac{9}{12} \leq y \leq 4 \quad \Rightarrow$$

$$y \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1; 2; 3; 4 \Rightarrow$$

$$x = \frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{6}{5}; \frac{8}{5}$$

6) $x = \frac{1}{3} + \frac{2 \cdot 2}{3}$

$$\frac{3}{10} \leq \frac{1}{3} + \frac{2 \cdot 2}{3} \leq \frac{16}{10} \quad | \cdot 30$$

$$9 \leq 10 + 20 \cdot 2 \leq 48$$

$$-1 \leq 20 \cdot 2 \leq 38$$

$$-\frac{1}{20} \leq 2 \leq \frac{38}{20} \quad \Rightarrow$$

$$2 \in \mathbb{Z}$$

$$2 = 0; 1$$

$$x = \frac{1}{3}; 1$$

гитовик N 4.

Ответ: $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1,5; \frac{7}{6}; \frac{5}{6}; \frac{2}{5};$
 $\frac{4}{5}; \frac{6}{5}; \frac{8}{5}$ и др.

N 2.

$$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$$

при $x > 0$; $5 - \frac{1}{x} < 5 \Rightarrow$

$$3^{5-\frac{1}{x}} < 3^5 = 243$$

заменим это при $x > 0$

найдем также x это

$$\sin 4^x = -1.$$

$$f(x) = 3^{5-\frac{1}{x}} - \text{монотонно}$$

возрастает к 243 $\Rightarrow$

невозможно чтобы при $x > 0$

$$\text{были верны: } a + \sin 4^x > 3^{5-\frac{1}{x}} \Rightarrow$$

$$a > 243 - \sin 4^x \geq 244 \Rightarrow$$

$$\text{при } a < 245; a + \sin 4^x < 244$$

при всех x для которых

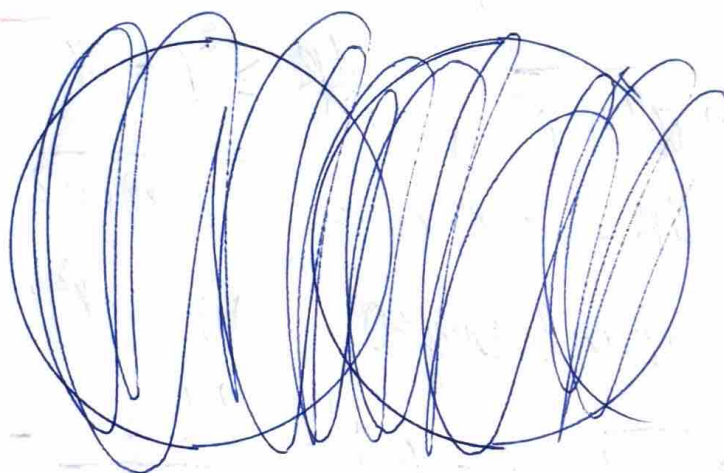
$\sin \alpha^x = 1$ или при стремлении x к $\frac{\pi}{2}$
 дискретности ~~каждого~~ ^{каждого} решения
 неравенства:

$$3 \left(5 - \frac{1}{x} \right) \geq a + \sin \alpha^x \Rightarrow$$

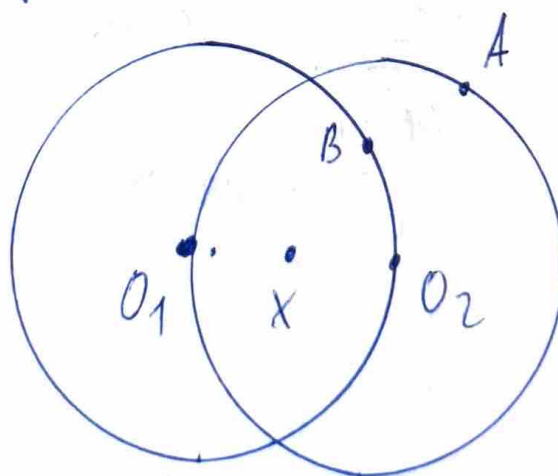
$$\min a = 244$$

Ответ: 244.

NG.



r -радиус



№ 6 задание

мышь вводит в одну зону где 1 помывалка
в (.) А, там где 2 помывалки в (.) В.

X - точка. $\Rightarrow$ минимизируем
 $AB + 2BX$. O_1, O_2 - центры окр.

$$\Rightarrow O_1B = r = O_1O_2 \Rightarrow$$

пусть $O_2B = a \Rightarrow$

$$BX = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2r^2 - r^2} =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + r^2}, \quad AB \geq r - a$$

$$\min_{\text{от}} AB + 2BX = \sqrt{2a^2 + r^2} + r - a$$

найдем производную по a :

$$(\sqrt{2a^2 + r^2} + r - a)' = \frac{2a}{\sqrt{2a^2 + r^2}} - 1$$

$$\frac{2a}{\sqrt{2a^2 + r^2}} = 1 \Rightarrow$$

~~$$2a = \sqrt{2a^2 + r^2}$$~~

$$2a = \sqrt{2a^2 + r^2}$$

$$4a^2 = 2a^2 + r^2$$

$$2a^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$r = a\sqrt{2} \text{ т.е. минимума}$$

$$a = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

ф-ции $\Rightarrow$

№6 задание

$$\Rightarrow \text{пусть } r = \sqrt{2} \cdot a - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 =$$

$$= r \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right)$$

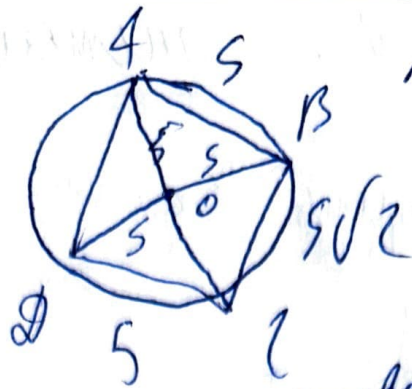
$$\text{при } r = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \text{ (по условию)}$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+2} =$$

$$\frac{\sqrt{2}+1}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Ответ: 0,5.

Враг шмтовик



1/3. (Это продолжение
решения предыдущей
задачи)

Исходные:

$$AB = AC = 5$$

$$BC = 5\sqrt{2}$$

аналогично

$$\angle BAC = 90^\circ$$

$$\angle ABC = 60^\circ$$

$$\angle ACB = 60^\circ$$

противоположно $\Rightarrow$

$\triangle AOB, \triangle AOC$ - прав

$\triangle BOC$ - прямоугольный по обратной теореме Пифагора

$$\angle AOD = 150^\circ \Rightarrow$$

$$\angle AOD = 150^\circ \Rightarrow$$

$$AD = \sqrt{5^2 + 25\sqrt{3}} = 5\sqrt{2+\sqrt{3}} = 5\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sin 135^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \cdot \sin 15^\circ =$$

$$\frac{25}{2} \cdot \left(\sin 45^\circ + \sin 15^\circ \right) =$$

$$\frac{25}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} + \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right) = \frac{25\sqrt{3}}{8} \cdot (1+\sqrt{3}) =$$

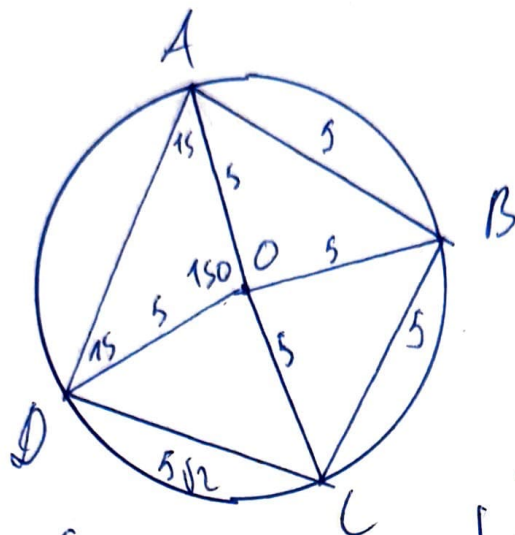
$$\frac{25\sqrt{3} (4+2\sqrt{3})^2}{8} = \frac{25\sqrt{3} (2+\sqrt{3})^2}{4}$$

Ответ: $\frac{25\sqrt{3} (2+\sqrt{3})^2}{4}$

~~Задание~~

№ 3 геометрия.

1-й шаг: стороны с длиной 5 и 5
шестиугольник



$$AB = BC = 5$$

$$CD = 5\sqrt{2}$$

(-) O - центр окр.

$\triangle AOB$ - рав.

$\triangle BOC$ - рав.

$\triangle AOC$ - прямоуго.

по обратным теор. Пифаг.

$$\angle AOB = 60^\circ$$

$$\angle BOC = 60^\circ$$

$$\angle AOC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AOD = 150^\circ$$

теор. кос в $\triangle AOD$:

$$AD^2 = 25 + 25 + 2 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos 150^\circ$$

$$AD^2 = 50 + 25\sqrt{2} \Rightarrow AD = 5\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$S_{ABCD} =$$

$$S_{ABC} + S_{ADC} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin \angle ABC + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin \angle ADC$$

$$= \frac{25}{2} \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ$$

$$\cdot \sin 60^\circ =$$

$$\frac{25}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{25}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$\frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{4} = \frac{50\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{25\sqrt{3}(2 + \sqrt{2})}{4}$$

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
82-03-06-49		+	+	±	+	+	±	∅	∅
	75	15	15	10	15	15	5	0	0

6 - евро цена при покупке, но требуется разрешение
 (списание) в офисе и (списание)