0 879097 280004

87-90-97-28

(161.35)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Аксенова Владимира Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Аксен-

Белоглядки [illegible] ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Борисенко Е.Е. [illegible]

87-90-97-28 (161.35)

70 (сильдент)

Чистовик

№ 1

$$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=\sqrt{3+\sqrt8}-\sqrt{3-\sqrt8}$$

$$\begin{cases}|2x-3|+|x-3|+|x-2|=\sqrt{\left(\sqrt{3+\sqrt8}-\sqrt{3-\sqrt8}\right)^2}\\ -(x-2)\geq 0\\ (2x-3)^2\geq 0\\ (x-3)^2\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}|2x-3|+|x-3|+|x-2|=\sqrt{3+\sqrt8+3-\sqrt8-2\sqrt{3+\sqrt8}\cdot\sqrt{3-\sqrt8}}\\ x\leq 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}|2x-3|+|x-3|+|x-2|=\sqrt{6-2(9-8)}\\ x\leq 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}|2x-3|+|x-3|+|x-2|=2\\ x\leq 2\end{cases}$$

1) $1{,}5\leq x\leq 2$

$2x-3+3-x+2-x=2$

$2=2$

– для ~~всех~~ любого x верно

2) $x<1{,}5$

$3-2x+3-x+2-x=2$

$6-4x=0$

$x=1{,}5.$

нет решений (т.к. $x=1{,}5$ не подходит под $x<1{,}5$)

Итого:

$1{,}5\leq x\leq 2$

Ответ: $x\in[1{,}5;\,2]$.

Чистовик

№3 Пусть четвертая сторона длины a.
Проведем из центра окружности радиусы ко всем вершинам. Тогда в треугольнике со сторонами 5, 5, 5 центральный угол к хорде 5 равен $60°$ (т.к. треугольник правильный).
В треугольнике $5\sqrt{2}$, 5, 5:
$5^2+5^2=50=(5\sqrt{2})^2$ получаем, что центральный угол $90°$ (по обратной т. Пифагора).
Тогда получаем, что цент окружности лежит внутри четырехугольника, т.к. $360-60-60-90=$
$=150°$ - под таким углом видна сторона a из центра окружности (т.к. он меньше $180 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ центр внутри).
Тогда разобьем наш четырехугольник на 4 треугольника (и нам не важно в каком порядке стороны у него), и у каждого треугольника по отдельности посчитаем площадь. (получается, что площадь четырехугольника одинаковая и не зависит от последовательности расположение сторон.
$S_2=S_1=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin 60°=\frac{25\cdot\sqrt{3}}{4}$ - для треугольников 5;5;5.
$S_3=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin 90°=\frac{25}{2}$ - для треугольника $5\sqrt{2}$;5;5.
$S_4=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin 150°=\frac{25}{4}$ - для треугольника a;5;5.
Итого:
$S=S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{25\sqrt{3}}{4}+\frac{25\sqrt{3}}{4}+\frac{25}{2}+\frac{25}{4}=\frac{25\sqrt{3}}{2}+\frac{25}{2}+\frac{25}{4}=$
$=\frac{50\sqrt{3}+75}{4}$
Ответ: $\frac{50\sqrt{3}+75}{4}$.

87-90-97-28 (161.35)

Чистовик

№2

$$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$$

$$3^{5-\frac{1}{x}} - \sin 4^x \geq a$$

1) ~~4x~~ 4^x - бесконечно возрастает и не имеет верхней границы. (Иначе пусть $4^x < m$ $\forall x$. при $x = 1$ $4^x = 4$, а при увеличении x на 1 текущее число 4^x постоянно увеличивается более чем на 1 (в 4 раза) => когда-то станет более, чем m => противоречие).

=> для любого x_0 существует ~~интер~~ отрезок $x_0 \leq x_1 < x_2$, ~~$\frac{4^{x_1}}{2\pi} \equiv 0$, $\frac{4^{x_2}}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} \equiv 0$~~ ~~(при этом x_2 наименьшее возможное большее x_1, которое тоже сравнимо с 0 по модулю 2π.~~ что $\sin 4^{x_1} = 1$, x_2 - наименьшее число больше x_1, что $\sin 4^{x_2} = 1$ => при подставлении всех чисел ~~от x_1 до~~ $[x_1; x_2]$ в $\sin 4^x$ получим все множество чисел $[-1; 1]$.

Тогда получаем, что существует неограниченная бесконечная последовательность $\{x_n\}$, что ~~$\forall x \in X$~~ $\forall i \in \mathbb{N}$ $\sin 4^{x_i} = -1$. Пусть числа в $\{x_n\}$ записаны по возрастанию.

2) x - любое положительное => $\frac{1}{x}$ - тоже => => $5 - \frac{1}{x}$ - любое число меньшее 5 => => $3^{5-\frac{1}{x}}$ - любое число меньшее $3^5 = 243$. (т.к. 3^x - непрерывная)

$3^{5-\frac{1}{x}}$ - возрастающая, т.к. $5 - \frac{1}{x}$ - возрастает, потому что $\frac{1}{x}$ - убывает. ~~[зачёркнуто]~~ Всё это при положительных x.

получаем, что $3^{5-\frac{1}{x}} - \sin 4^x < 243 - (-1) = 244$ => => это число никогда не достигается.

3) Покажем, что для любого числа чуть меньшего 244 существует такой x_0, что $3^{5-\frac{1}{x_0}} - \sin 4^{x_0}$ больше этого числа:

Чистовик

№2 (продолжение)

Будем подставлять в $3^{5-\frac{1}{x}} - \sin 4^x$ только числа из $\{x_n\}$, тогда у нас будет $3^{5-\frac{1}{x}} + 1$.

$3^{5-\frac{1}{x}} + 1 > 244 - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$

$3^{5-\frac{1}{x}} > 243 - \varepsilon$

$5 - \frac{1}{x} > \log_3(243 - \varepsilon)$

$5 - \log_3(243 - \varepsilon) > \frac{1}{x}$ $\cancel{5 > \log_3(243-\varepsilon)}$ $\cancel{\frac{1}{x} > 0}$

$\cancel{x > \frac{1}{5 - \log_3(243-\varepsilon)}}$

— отсюда видно, что значение $\frac{1}{x}$ должно быть меньше, чем $5 - \log_3(243 - \varepsilon)$, которое больше 0 $\Rightarrow$

$\{x_n\}$ — неограниченная

$\Rightarrow$ такое $x_k \in \{x_n\}$ найдется $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для любого числа A меньшего 244 найдется такой x, что $3^{5-\frac{1}{x}} - \sin 4^x > A$

$\Rightarrow$ найдется решение данного в условии неравенства. При $a = 244$ решений нет, т.к. $3^{5-\frac{1}{x}} - \sin 4^x < 3^5 - (-1) = 244$ для любого положительного x.

Ответ: 244.

№4

Сделаем замену:

$a = \sin(\pi x)$

$b = \sin(2\pi x)$

$c = \sin(4\pi x)$

$a^3 - b^3 + c^3 = (a - b + c)^3$

$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b + c)^3 - c^3$

$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b + c - c)((a - b + c)^2 + (a - b + c)c + c^2)$

$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac + ac - bc + c^2 + c^2)$

$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)(a^2 + b^2 + 3c^2 - 2ab - 3bc + 3ac)$

$(a-b)(3c^2 - 3ab - 3bc + 3ac) = 0$

№4 (продолжение) Чистовик

$(a-b)(c^2-ab-bc+ac)=0$

$(a-b)\left(c(c-b)+a(c-b)\right)=0$

$(a-b)(c-b)(c+a)=0$

$$\left[\begin{array}{l} a=b \\ c=b \\ c=-a \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(\pi x)=\sin(2\pi x) \\ \sin(2\pi x)=\sin(4\pi x) \\ \sin(\pi x)=-\sin(4\pi x) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(2\pi x)-\sin(\pi x)=0 \\ \sin(4\pi x)-\sin(2\pi x)=0 \\ \sin(4\pi x)+\sin(\pi x)=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\cdot\sin\frac{2\pi x-\pi x}{2}\cdot\cos\frac{2\pi x+\pi x}{2}=0 \\ 2\cdot\sin\frac{4\pi x-2\pi x}{2}\cdot\cos\frac{4\pi x+2\pi x}{2}=0 \\ 2\cdot\sin\frac{4\pi x+\pi x}{2}\cdot\cos\frac{4\pi x-\pi x}{2}=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{\pi x}{2}\cdot\cos\frac{3\pi x}{2}=0 \\ \sin\pi x\cdot\cos 3\pi x=0 \\ \sin\frac{5\pi x}{2}\cdot\cos\frac{3\pi x}{2}=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi x}{2}=\pi k \\ \pi x=\pi k \\ \frac{5\pi x}{2}=\pi k \\ \frac{3\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k \\ 3\pi x=\frac{\pi}{2}+\pi k \end{array}\right., k\in\mathbb{Z} \iff \left[\begin{array}{l} x=2k \\ x=k \\ x=\frac{2}{5}k \\ x=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}k \\ x=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}k \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

~~Для $x=2k$ подходит~~ отрезок $[0,3; 1,6]$

~~$x=2k$ не рассматриваем, т.к.~~

1) $x=2k$ – таких нет
2) $x=k$ – 1 при $k=1$
3) $x=\frac{2}{5}k$ – 0,4 при $k=1$; 0,8 при $k=2$, 1,2; 1,6.
4) $x=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}k$ – 1 при $k=1$.
5) $x=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}k$ – $\frac{1}{2}$ при $k=1$; $\frac{5}{6}$ при $k=2$; $\frac{7}{6}$; $\frac{9}{6}$.

Итого: $\{1; 0,4; 0,8; 1,2; 1,6; 0,5; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}; 1,5\}$

Ответ: $\{0,4; 0,5; 0,8; \frac{5}{6}; 1; \frac{7}{6}; 1,2; 1,5; 1,6\}$

Чистовик

№5

$(x+a_1)(x^2+b_1x+6)=(x+a_2)(x^2+b_2x+8)$

$x^2(b_1+a_1-b_2-a_2)+x(a_1b_1-a_2b_2-2)+6a_1-8a_2=0$

- при любом x => все коэффициенты равны 0.

$\begin{cases} b_1+a_1=b_2+a_2 \\ a_1b_1=a_2b_2+2 \\ 6a_1-8a_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+b_1=a_2+b_2 \\ a_1b_1=a_2b_2+2 \\ a_2=\frac{3}{4}a_1 \end{cases}$

Аналогично для других пар:

$\begin{cases} a_1+b_1=a_3+b_3 \\ a_1b_1=a_3b_3+6 \\ a_3=\frac{1}{2}a_1 \end{cases}$

$\begin{cases} a_2+b_2=a_3+b_3 \\ a_2b_2=a_3b_3+4 \\ a_3=\frac{2}{3}a_2 \end{cases}$

все числа положительные

1) $a_1b_1=a_2b_2+2$

$b_2=\frac{a_1b_1-2}{a_2}=\frac{4}{3}b_1-\frac{8}{3a_1}$

$a_1+b_1=\frac{4}{3}b_1-\frac{8}{3a_1}+\frac{3}{4}a_1$

$b_1=\frac{3}{4}a_1+\frac{8}{a_1}$ =>

=> $b_2=a_1+\frac{8}{a_1}$

2) $a_1b_1=a_3b_3+6$

$b_3=\frac{a_1b_1-6}{a_3}=2b_1-\frac{12}{a_1}=$

$=\frac{3}{2}a_1+\frac{16}{a_1}-\frac{12}{a_1}=\frac{3}{2}a_1+\frac{4}{a_1}$

3) $a_2+b_2=a_3+b_3$

$\left(\frac{3}{4}a_1\right)+\left(a_1+\frac{8}{a_1}\right)=\left(\frac{1}{2}a_1\right)+\left(\frac{3}{2}a_1+\frac{4}{a_1}\right)$

$-\frac{1}{4}a_1+\frac{4}{a_1}=0$

$\frac{4}{a_1}=\frac{a_1}{4}$

$a_1^2-16=0$

$\left[\begin{array}{l} a_1=4 \\ a_1=-4 \text{ — не подходит, т.к. } a_1>0 \end{array}\right.$

$a_1=4.$

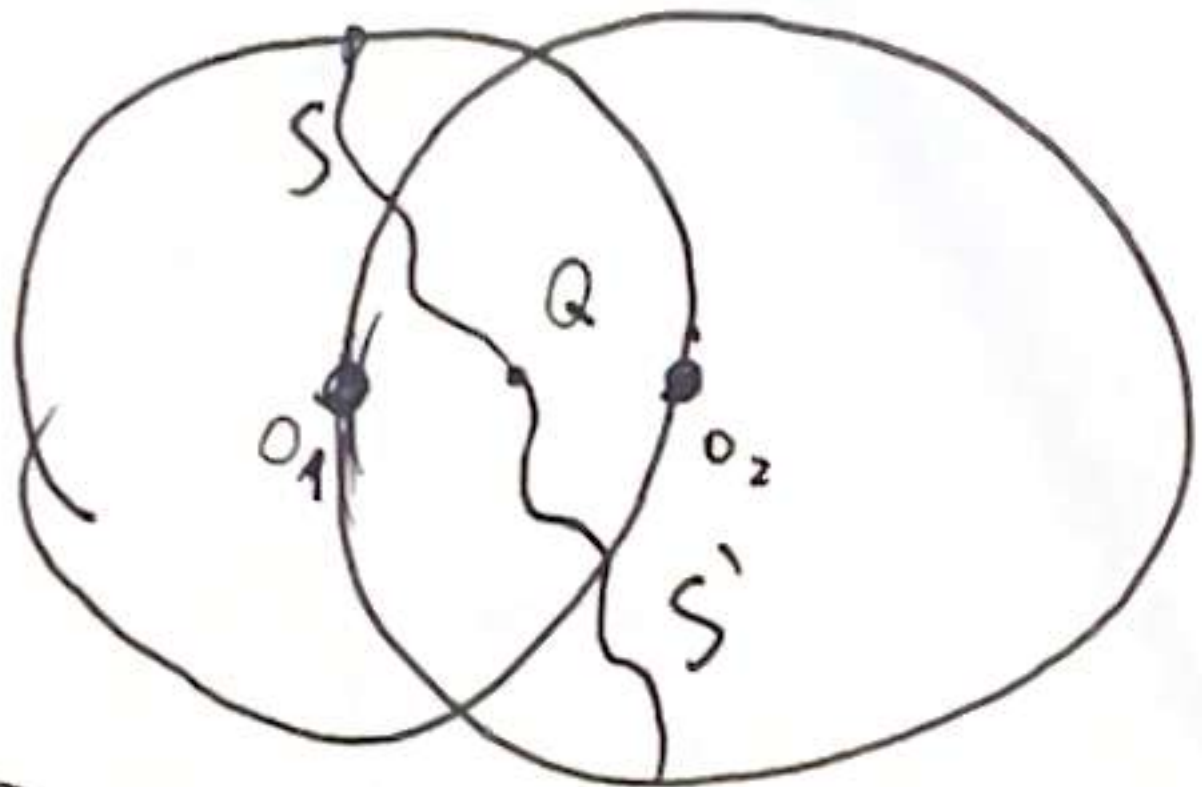
№5 (продолжение)

$b_1 = \frac{3}{4} \cdot 4 + \frac{8}{4} = 3+2=5.$

$a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3 = 3(a_1+b_1) = 3(4+5) = 27.$

Ответ: 27.

№6



Пусть Q – точка, где находится Мышкина нора, O_1 и O_2 – расположение поливалок, S – путь, который пробежала мышка. Не умаляя общности, ~~...~~ первая поливалка (с центром O_1) начала мочить мышку не позже второй. Сделаем центральную симметрию с центром Q пути, который пробежала мышь, получим S'. Тогда мышь, если будет бегать S + S', то будет мокнуть вдвое меньше (т.к. при такой симметрии круги брызгов поливалок перейдут друг в друга). При этом заметим, что количество ~~брызгов~~ брызгов от одной поливалки равно кол-ву брызгов другой, т.к они симметричны относительно Q.

Т.к. начальное число брызгов для S минимально, то для S + S' тоже минимально. Тогда получаем, что мышь вбежала в круг с центром O_1 через т. пересечения кругов

Черновик

$$a^3 - b^3 + c^3 = (a-b+c)^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = (a-b+c-c)((a-b+c)^2 + (a-b+c)c + c^2)$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = (a-b)(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac+ac-bc+c^2+c^2)$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = (a-b)(a^2+b^2+3c^2-2ab-3bc+3ac)$$

$$(a-b)(3c^2-3ab-3bc+3ac)=0$$

$$(a-b)(c^2-ab-bc+ac)=0$$

$$(a-b)(c(c-b)+a(c-b))=0$$

$$(a-b)(c-b)(a+c)=0$$

$$\frac{3x}{2} = \frac12 + k$$

$$3x = 1+2k$$

$$x = \frac13 + \frac23 k$$

$$(x+a_1)(x^2+b_1x+6) = (x+a_2)(x^2+b_2x+8)$$

$$\cancel{x^3} + b_1x^2 + 6x + a_1x^2 + a_1b_1x + 6a_1 = \cancel{x^3} + b_2x^2 + 8x + a_2x^2 + a_2b_2x + 8a_2$$

$$x^2(b_1+a_1-b_2-a_2) + x(a_1b_1 - a_2b_2 - 2) + 6a_1 - 8a_2 = 0$$

$a_2 = \frac34 a_1$

$a_3 = \frac12 a_1$

$a_3 = \frac23 a_2$

$b_1 + a_1 - b_2 - \frac34 a_1 = 0$

$b_2 - b_1 = \frac14 a_1$

$b_2 = b_1 + \frac14 a_1$

$a_1b_1 - \frac34 a_1(b_1 + \frac14 a_1) = 2$

$a_1b_1 - \frac34 a_1b_1 - \frac{3}{16}a_1^2 = 2$

$\frac{3}{16}a_1^2 - \frac14 a_1b_1 = 2$

$\frac{3}{16}a_1 = \frac14 b_1$

$b_1 = \frac34 a_1$

$a_1b_1 - 2 = \frac34 a_1 b_2$

$b_2 = \frac43 b_1 - \frac{8}{3a_1}$

$\frac14 a_1 + b_1 - \frac43 b_1 + \frac{8}{3a_1} = 0$

$\frac14 a_1 + \frac{8}{3a_1} = \frac13 b_1$

$b_1 = \frac34 a_1 + \frac{8}{a_1}$

$\frac34 a_1 + a_1 + \frac{8}{a_1} = \frac12 a_1 + \frac32 a_1 + \frac{4}{a_1}$

$b_2 = a_1 - \frac{32}{3a_1} + \frac{8}{3a_1} = a_1 - \frac{24}{3a_1} = a_1 + \frac{8}{a_1}$

$\frac54 a_1 + \frac{4}{a_1} = \frac32 a_1$

$a_1 = 4$ $\quad \frac{4}{a_1} = \frac14 a_1$

Черновик

$x \le 2$

$\sqrt{4x^2-12x+9} + \sqrt{x^2-6x+9} + \left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2 = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$

$|2x-3| + |x-3| + |x-2| = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$

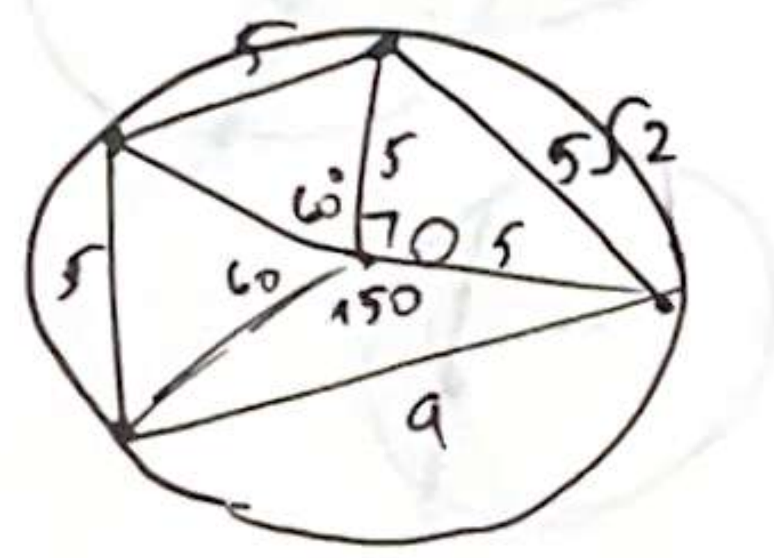
$|2x-3| + |x-3| + |x-2| = \sqrt{3+\sqrt{8}+3-\sqrt{8}-2(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})}$

$|2x-3| + |x-3| + |x-2| = \sqrt{6-2(9-8)}$

$|2x-3| + |x-3| + |x-2| = 2$

$\underbrace{3^{5-\frac{1}{x}}}_{\to 243} \geqslant a + \underbrace{\sin 4^x}_{\text{от } -1 \text{ до } 1.}$

555√2 22
5 5√2 5



$3^{5-\frac{1}{x}}$, $5-\frac{1}{x} = 1$

$x = \frac{1}{5}.$

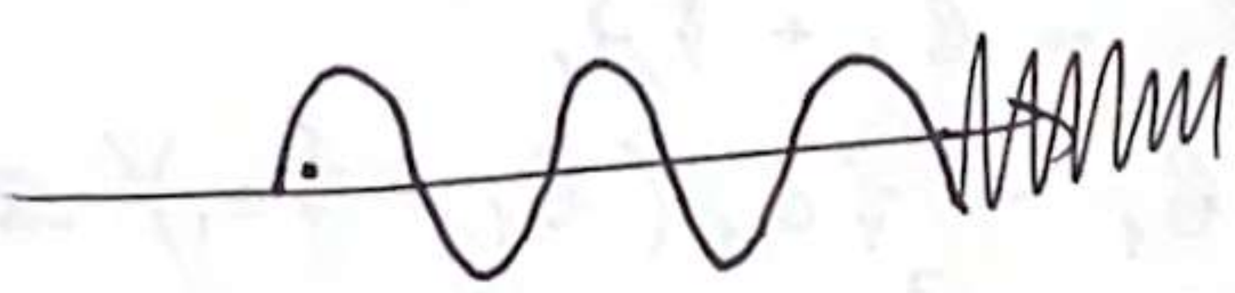
при $x > \frac{1}{5}$ решений нет.

$3^5 = 243$

$(0; 243)$

x от $\frac{1}{\infty} \to \infty$ $\Rightarrow 3^{5-\frac{1}{x}}$ от 0 к 243

$244 > 3^{5-\frac{1}{x}} - \sin 4^x \geqslant 4$



от 0 до 243.

$-3^{5-\frac{1}{x}} + 243 < \varepsilon$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$3^{5-\frac{1}{x}} < 243 - \varepsilon$

1 0 90 $2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$5 - \frac{1}{x} < \log_3 243 - \varepsilon$

$5 - \log_3 243 - \varepsilon < \frac{1}{x}$

$4 + (3+2) = 3 + 4 + 2$

$x < \frac{1}{5 - \log_3 243 - \varepsilon}$

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
87-90-97-28		+	+	+	±	+	−	−	−